Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

"El Cisne Negro", un análisis de la profesión actuarial

REPORTE DE DIVULGACIÓN

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuario

P R E S E N T A :

Gerardo Crespo Bravo

TUTOR

Malinalli Wong Rueda

Ciudad Universitaria, CDMX, 2023

1. Datos del alumno
Crespo
Bravo
Gerardo
55 43 41 14 15
Universidad Nacional Autónoma de
México
Faculta de Ciencias
Actuaría
316084006

2. Datos del tutor
M. en HA.
Malinalli
Wong
Rueda

3. Datos del sinodal 1
M. en F. & M. en E.D.
Karina
Vargas
Cruz

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Freddy
Palma
Mancilla

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
José Enrique
Perez

Salvador

6. Datos del sinodal 4
Luis Enrique Ignacio
Gómez
Ordoñez

7. Datos del trabajo escrito
"El Cisne Negro"
Un análisis de la profesión actuarial
114p
2023

Aquí van a ir las dedicatorias

«Hay hombres que luchan un día y son buenos. Hay otros que luchan un año y son mejores. Hay quienes luchan muchos años y son muy buenos. Pero hay los que luchan toda la vida. Esos son los imprescindibles.»

Bertolt Brecht

Agradecimientos

Resumen

Esta tesina acompañada de un proyecto de divulgación busca explicar, exponer y brindar una visión tal vez, no nueva, pero sí analítica, retrospectiva y crítica de la carrera de actuaría, así como de la profesión actuarial empleando el punto de vista particular de *"El cisne negro: El impacto de lo altamente improbable"*, libro escrito por Nassim Nicholas Taleb. A través del análisis e investigación de bibliografía adicional relacionada con este texto, además de otros trabajos más técnicos realizados por Taleb, se pretende darle al lector una opinión crítica desde la cual éste pueda ver de una manera distinta o en su defecto conocer un poco mejor la profesión actuarial.

En cuanto a la parte de divulgación, esta se aborda en tres principales proyectos, siendo el primero un artículo para la página web: "Ouroboros ars et Scientia", en segundo lugar, un video para el canal de YouTube con este mismo nombre sobre el análisis del libro antes mencionado y, en tercero y último, un artículo para la revista "Cómo Vez" que a tiempo de términado este trabajo se espera que ya esté en proceso de publicación.

Índice general

1 Motivación

En ocasiones, al ser humano se le olvida su capacidad infinita de cuestionar, analizar o pensar por qué hace lo que hace. El actuario no es una excepción, este proyecto se enfoca en las cosas epistemológicas, técnicas y matemáticas que nosotros como actuarios, o bien estadísticos pasamos por alto. Tomando como inspiración y base de este proyecto el libro titulado; "El cisne negro" de Nassim Nicholas Taleb, estadístico, matemático y gestor de riesgos (risk analyst), Taleb nos abre los ojos y redescubre el concepto de riesgo, su manera de verlo y tratarlo puede diferir o cambiar la manera en la que vemos los riesgos. El libro se puede sentir como una crítica a los modelos actualmente usados para predecir o estimar riesgos. Sin embargo, también nos hace pensar y reflexionar si de verdad estamos tratando de manera correcta al riesgo, llegando a cuestionar los propios modelos que realizamos como actuarios.

La idea principal de este proyecto es invitar a cuestionar como actuarios todo lo que se nos ha enseñado, buscar mejores modelos con los cuales podamos acercarnos a una solución, encontrar o descubrir nuevas aportaciones a la matemática o tal vez, mantenernos curiosos ante las sorpresas que se nos muestran en la cotidianidad y que se encuentran ocultas a simple vista. Este es un viaje en el cual la actuaría se ve desde un punto de vista llamativo e innovador. También es uno donde se invita a los actuarios a no olvidar lo hermosa pero rigurosa que es la matemática lo que a su vez, motiva a mantenerse sorprendidos de las cosas que ya hacen en esta.

2 Introducción

¿Qué es un riesgo?, este concepto es uno de los que se cree tener muy dominado además de controlado, algunos actuarios se creen sus dueños o tal vez otros le tengan un inmenso respeto puesto que conocen su delicadeza tan explosiva. No obstante la diferencia entre conocerlo y saber de él no permite controlarlo, Modelarlo tal vez, ya que, como se sabe, la profesión actuarial se enfoca en modelar sucesos impredecibles y fortuitos. Sin embargo, dentro del caos inherente de tan solo mencionar el concepto de riesgo se encuentra la definición de Nassim Taleb que se verá más adelante. Este proyecto se enfoca entonces en diversas cuestiones, partiremos desde la pregunta ¿Qué es la actuaría?, pasando por ¿Cómo se ve y maneja está dentro de México?, hasta abordar los planteamientos, argumentos e ideas que nos plantea el libro "El cisne negro".

En el México actual la carrera de actuaria tiene un crecimiento constante, observando el portal de estadística universitaria de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) entre los años 1999-2000 la población escolar de las ciencias físico matemáticas e ingenierías (área en la cual se encuentra la carrera de actuaría) se encontraba en 29,240 alumnos, para los años 2020-2021 esta área contaba con 49,704 [52], un aumento del 69.98 %.

La divulgación de la carrera de actuaría, aunque existente, se considera que puede ser mayor desde una opinión personal, actualmente existen recursos como artículos, videos en la plataforma YouTube, podcasts, asesorías académicas, páginas web entre demás recursos, es entonces que, con el fin de contribuir a la divulgación de esta ciencia, este trabajo aporta un grano de arena a todo lo que se está haciendo para la divulgación de esta.

El primer capítulo de este trabajo se centra en que el lector conozca más acerca de esta profesion, los modelos usados (específicamente se dan ejemplos de modelos de supervivencia, mercados financieros, matemáticas financieras, procesos estocásticos y modelos de riesgo), su uso en el México actual y la percepción del riesgo que tenemos en nuestra sociedad mexicana así como la internacional, para terminar explicando los modelos estadísticos usados y como un actuario los adecua a sus necesidades y aplicaciones.

En el segundo capítulo hablaremos más acerca del libro: "El Cisne Negro", así como de

su autor, ya que más allá de ser un escritor, éste aporta nuevas ideas e investigaciones a la actuaría desde la parte académicamente formal, más específicamente en el área de la estadística [31], teniendo varios artículos publicados que son de interés para este trabajo.

En el tercer capítulo se abordarán cuestiones más formales en donde se verá cómo las implicaciones del trabajo de Nassim Taleb se comportan actualmente a los modelos estadísticos usados, además de analizar las implicaciones de su libro dentro de la actuaría, lo que esto aporta a la ciencia actuarial y cómo podemos solucionar las problemáticas que este autor plantea en sus proyectos. Dichas problemáticas son principalmente el sesgo cognitivo que poseemos, nuestra limitada capacidad para predecir cosas, el sobre simplificar los problemas y el entender lo verdaderamente complicado que es el mundo [46].

Finalmente, terminaremos exponiendo el proceso de divulgación que se llevó a cabo para dar a conocer más acerca de la actuaría, qué hace un actuario y los tres proyectos que se realizaron para la labor de la difusión del material.

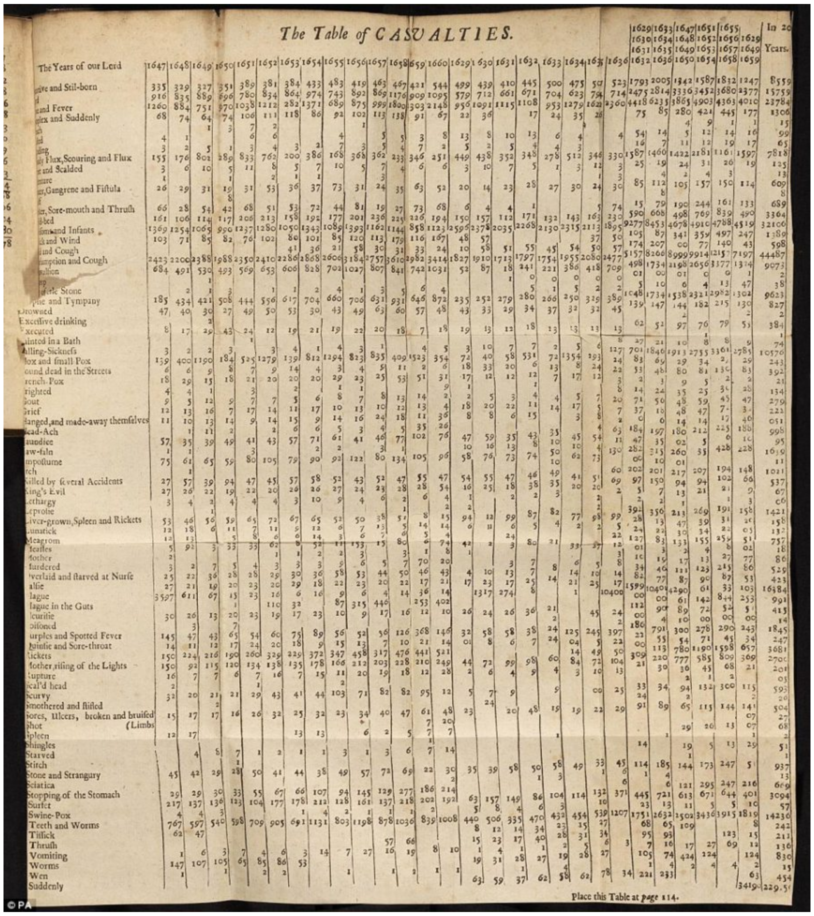
3 ¿Qué es la actuaría?

Partiendo desde los cimientos la palabra: actuaría, etimológicamente hablando viene del latín *actum*, cuyo significado al español es una acción hecha, el hacer algo o llevar a cabo una acción. El término "actuario" o por ende actuarial, del latín *actuarius*, era usado para nombrar a un escritor de taquigrafía o un empleado bancario, proveniente del sustantivo *actus* e influenciado por el sustantivo plural *acta* [34].

Debemos saber entonces que la actuaría sirve a un propósito público, así ha sido dentro de la historia de la profesión actuarial. En cuanto al origen de esta profesión hay varias versiones, sin embargo, hay una en la que muchos coinciden, en la que los orígenes de esta profesión se remontan al siglo XVII, los navíos y los barcos eran unos de los principales medios de comercio en la época, por lo tanto las propias necesidades comerciales dieron origen a transacciones con interés compuesto, el seguro marítimo era algo común y el álgebra de las rentas vitalicias vería su nacimiento [38]. Claro está que las técnicas de valoración para las transacciones financieras eran conocidas incluso en los tiempos de la Roma antigua y se volverían de suma importancia cuando se desarrolló el comercio mundial después del año 1300.

Aunque en el siglo XVI se hablaba de interés compuesto los problemas eran muy elementales. No se hablaba de un actuario en el sentido formal de la palabra, lo más cercano a ello eran los practicantes matemáticos, un consultor que se ocupaba de una gran cantidad de problemas en requerimiento, desde comercio hasta navegación [38]. Richard Witt fue uno de los primeros, cuya principal aportación fue la escritura del primer libro en inglés sobre interés compuesto. Como ya se dijo antes, el nacimiento de la ciencia actuarial se dio en el siglo XVII ya que fue cuando las herramientas necesarias estuvieron disponibles, inclusive estás son las que hoy componen las bases de la actuaría [38]. En primer lugar tenemos el desarrollo de la ciencia de la probabilidad, seguido de las tablas de mortalidad (o tablas de vida) [1] basadas en la investigación y estadísticas de mortalidad, la primera tabla fue desarrollada por John Graunt en 1662 [3.1]. Por lo tanto, para el año 1670 dos de las principales fundaciones de la ciencia actuarial estaban firmemente construidas la probabilidad y las tablas de vida o mortalidad llamadas de estas dos maneras y no olvidemos claro al interés compuesto.

[1] Una tabla de vida se refiere a un conjunto de datos estadísticos que proporciona información sobre las tasas de mortalidad de una población específica a lo largo del tiempo.


The Table of CASUALTIES.

Place this Table at page 114.

© PA

Figura 3.1: Tabla de Vida [37].

Fue hasta 1693 cuando Edmund Halley, matemático inglés, publicó su famoso artículo sobre la descripción de la construcción de la tabla de vida basándose puramente en observaciones, es decir, aunque tenía estadísticas presentes como tal, estás presentaban complicaciones por ello Edmund Halley llamó a su artículo "*Una estimación de los grados de mortalidad de la humanidad; extraído de curiosas tablas de nacimientos y funerales en la ciudad de Breflaw; con un intento de determinar el precio de las anualidades sobre vidas. Por el Sr. E. Halley, R.S.S.*". También desarrolló un método para valuar anualidades vitalicias (o rentas vitalicias). La ciencia actuarial, aunque todavía muy joven y faltante de bases había nacido. Los enfoques de la ciencia actuarial se vieron enfocados por un tiempo en solamente vender rentas vitalicias, sin embargo, se vieron añadidos seguros de vida pero a corto plazo, además no se tenía un cálculo para estos como tal, ya que se vendían de acuerdo a la experiencia y criterio de los vendedores.

Todo cambiaría en 1800 cuando surgieron mentes brillantes que además estarían interesadas en problemas actuariales como Carl Friedrich Gauss, Abraham de Moivre, James y Daniel Bernoulli, Leonhard Euler o Benjamin Gompertz, estos se involucrarían en la ciencia actuarial haciendo grandes contribuciones [38].

Los años 1800 verían así el nacimiento y establecimiento de varias compañías aseguradoras, en consecuencia, una amplia gama de contratos de primas anuales niveladas estaban disponibles para el público. Estas anualidades eran calculadas con métodos apropiados y adecuados, más aun, se conocieron los peligros de hacer tablas de mortalidad inadecuadas [38]. Mencionado todo lo anterior, las matemáticas de los seguros de vida, el interés compuesto y la teoría de la probabilidad se encontraban entonces en un estado avanzado de desarrollo, y las tablas de mortalidad habían pasado de ser tabulaciones rudimentarias de defunciones a ser obras calculadas y consideradas de propiedad. El instituto de Actuarios de Inglaterra se crearía en 1848 y la facultad de actuaría en 1856, en 1880 se crearía la Sociedad Americana de Actuarios. Todo un viaje de descubrimientos, perfeccionamiento de técnicas actuariales y sobre todo unas bases sólidas de instituciones, construirían lo que es hoy la ciencia actuarial. Es importante mencionar que a la actuaría aun le falta perfeccionar sus técnicas, ver sus errores y prepararse para sucesos inesperados por delante, es una ciencia en desarrollo pero esto mismo es lo que la hace única.

Entre las aportaciones significativas del periodo hasta principios de nuestro siglo se encuentra la aparición de la fórmula de Makeham para la fuerza de la mortalidad, que resultó capaz de representar fielmente gran parte de los datos de mortalidad publicados para los 100 años siguientes [38]. El desarrollo del riesgo y la teoría de credibilidad, el desarrollo de la teoría matemática de múltiples decrementos y múltiples modelos. La presentación sistemática de valuación de fondos de pensiones, así como sus fórmulas. Y el acuerdo en una notación estándar actuarial lo que dio un lenguaje para facilitar el dialogo internacional. Todos estos avances fueron los que construyeron lo que hoy es la ciencia actuarial y su profesión.

¿Qué es la profesion actuarial?

Ahora se procederá a analizar una perspectiva de lo que una profesión significa. Hickman describe muy analíticamente la profesión actuarial basándose en el criterio de Gordon y Howell. Primeramente, la práctica de una profesión debe de descansar en un cuerpo sistemático de conocimiento y de intelecto substancial. En segundo lugar, deben existir estándares de conducta profesional. Entonces se puede decir que una profesión tiene sus propios miembros [18].

La profesión actuarial satisface el primer criterio de Gordon y Howell, este criterio establece la diferencia fundamental entre una ciencia básica en la cual se basa una profesión y la aplicación necesaria de esta ciencia. Algo interesante de la actuaría, es su cuerpo sistemático de conocimiento el cual no es invariable con el tiempo. Para los actuarios, cambia a medida que ha cambiado el alcance de los sistemas de seguridad financiera que diseñan y administran [18]. El cuerpo de conocimientos siempre ha contenido elementos de las ciencias matemáticas, la economía, el derecho y la gestión empresarial. Lo anterior quiere decir que, la ciencia actuarial siempre está en desarrollo y en busca de nuevos descubrimientos, adaptándose a estos y evolucionando con el tiempo. Por ejemplo, cuando la actuaría se incorporó a la gestión y el diseño de los sistemas de seguridad social de ingresos para la vejez, la demografía y la macroeconomía pasaron a formar parte de este cuerpo sistemático de conocimientos actuariales.

El segundo criterio de Gordon y Howell también es cumplido por la profesión actuarial. Aunque el desarrollo de códigos de conducta profesional y normas de práctica actuarial no han sido uniformes en todo el mundo. Por ejemplo, en los Estados Unidos, la profesión actuarial tiene un Código Conjunto de Conducta Profesional, Normas de Cualificación y Normas Actuariales de Práctica. La situación en Australia, Canadá, Gran Bretaña, Irlanda y como se verá más adelante en México es similar. Con esto concluimos que la profesión actuarial efectivamente satisface el criterio de Gordon y Howell, existen diversas organizaciones actuariales a lo largo del mundo, casi todas aportando contribuciones y buscando conocimientos, siendo este un trabajo de divulgación centrado en el México actual se procederá a exponer cómo se comporta la actuaría dentro de este país, sus similitudes con otros o las diferencias.

3.1. Antecedentes históricos de la actuaría en México

Claro está hoy en día que la actuaría abarca no sólo la actividad aseguradora, incluye también la rama de las inversiones y las pensiones que son áreas donde también están presentes los actuarios. Sin embargo, bien es cierto que dentro de las actividades más viejas donde un actuario es requerido está el sector asegurador, no por algo en el anterior sub capítulo se vieron los orígenes de la actuaría en el mundo y como esta ciencia surgió a partir de la creación de los seguros, por ello es importante que si queremos analizar los orígenes de la actuaría y su desarrollo en México podemos remontarnos a analizar el seguro en México.

Para referirse a los antecedentes históricos del seguro en México, se necesita de mucha investigación lo más exacta posible. Sin embargo, la escasez de documentos relacionados con la actividad aseguradora en el país, permiten sólo delinear una panorámica bastante reducida de ella, a partir de finales del siglo XVIII, un siglo después del nacimiento de la actuaría que como anteriormente se vio, inició en el siglo XVII, aunque en España varios siglos antes dicha actividad ya ocupaba un amplio espacio en su economía [11].

El seguro en México, como en otros muchos lugares del mundo, habría de nacer en el mar siendo los barcos los principales medios de transporte y comercio en la época. Un puerto resaltaba por su ubicación el cual era usado por España, el puerto de

Veracruz, ciudad que a fines del siglo XVIII gozaba de gran prosperidad comercial y hasta tenía al primer piloto de aeróstatos [11]. Fue en el año de 1789, cuando se constituyó la primera compañía de seguros en ese puerto, que se denominó Compañía de Seguros Marítimos de Nueva España, con el propósito de cubrir los riesgos de los que se denominaba en España como La Carrera de Las Indias. No obstante, de dicha compañía no se tienen registros ni numéricos ni de las actividades que ahí se desarrollaron, se dice que fracaso, pero sentaría las bases para abrir el dialogo a la creación de compañías aseguradoras en México.

México atravesaría cambios complicados en su gobierno en el siglo XIX, la independencia de México ya estaba por iniciar y las actividades de una aseguradora no eran favorables para este periodo. El inicio del siglo XIX, así como su final marcarían dos etapas muy importantes para el seguro en México, el primer suceso siendo el establecimiento de la segunda compañía aseguradora en 1802 y a noventa años de tal fecha la primera ley del seguro en México en 1892. Lo que podemos resumir de este periodo tan conflictivo es que la actividad aseguradora a finales del siglo XIX, tanto en vida como en los seguros generales, no tuvieron un desarrollo tan significativo, pero si hubo un avance sobre todo a finales de siglo, tanto para los seguros de vida y para los otros ramos, de compañías locales y compañías extranjeras [11].

El siglo XX por su parte formó lo que es la actuaría en el México actual, los desarrollos tecnológicos de este periodo junto con la globalización moldearon lo que hoy es el seguro. Lo que podemos resaltar de este periodo fue la gran apertura que tuvo el seguro, la creación de instituciones encargadas para la regulación y los diversos cambios y evolución que formaron lo que es hoy el seguro en México. Esta adaptación se vio por ejemplo en la creación de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, las leyes y decretos al seguro como la Ley sobre el Contrato de Seguro o las circulares. México contaría con una veintena de asociaciones que, en diferentes aspectos, apoyarían al sector asegurador.

Finalmente, no podemos dejar de lado las bases de la enseñanza de la actuaría en México. El Instituto Mexicano de Actuarios organización creada en 1937, adoptó un modelo con una formación universitaria cómo base. Por ello en 1946 dicho instituto (ya desintegrado) presentó a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) una ponencia para crear la carrera de Actuaría dentro de la Facultad de Ciencias. Para el año 1947 la carrera de actuaría se habría incorporado dentro de la UNAM. Este dato resulta de importancia pues abrirá un panorama a lo que la actuaría se está conduciendo actualmente en México [20].

3.2. La actuaría en el México actual

La historia de México se sigue construyendo en este siglo XXI y con ella también la de la actuaría. En México ocurriría una cuestión particular, los actuarios incursionaron en una gama de áreas de aplicación muy diversa, se tiene establecido que no sólo los individuos están sujetos a diferentes tipos de riesgos, ya que la sociedad y su conjunto también. Lo anterior, aunado al hecho del rigor matemático que obtuvo la carrera al ser fundada en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, le ha conferido un rasgo distintivo a la actuaría en México, su carácter multidisciplinario o multifacético [20].

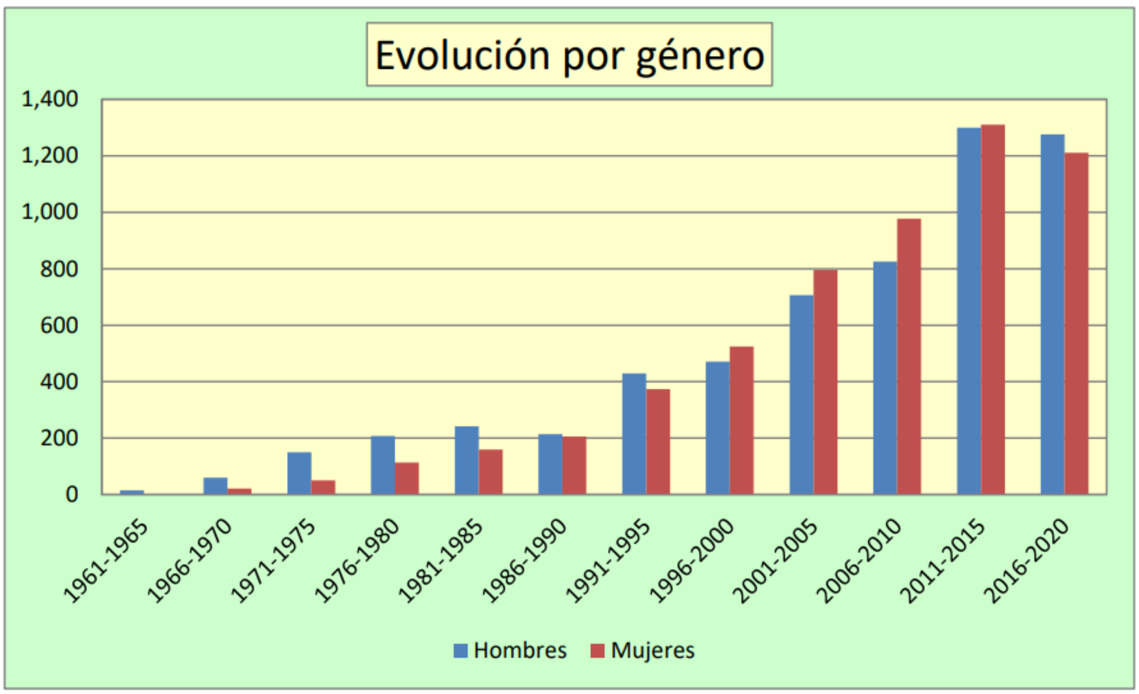


Figura 3.2: Evolución por género de la carrera de actuaría de acuerdo a cédulas profesionales emitidas [24].

De acuerdo con el artículo publicado por El Universal (2015) en su nota Matemáticas vs desempleo, una de las carreras profesionales mejor pagadas es la del actuario, con un sueldo promedio de 21 mil pesos al mes y con una tasa de desempleo del 0 %. El análisis está basado en la Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo y las cifras corresponden al primer trimestre del 2015 [9].

Los actuarios mexicanos, principalmente a partir de los años sesenta, comenzarían a irrumpir en áreas que no son comunes en otros países, como la probabilidad, la demografía, la informática, la investigación de operaciones, y la estadística la cual será de interés en próximos capítulos, entre otras muchas áreas. Las áreas donde un egresado de la carrera puede desarrollarse en México, son muy diversas, pues no son precisamente ramas de estudio de la actuaría, sino que la actuaría es un instrumento con el potencial para aportar soluciones a muchos campos [20].

Esta versatilidad que posee el actuario como parte de su preparación resulta de interés pues en México se abre para el actuario un gran panorama que no vemos en otros países. Actualmente la profesión actuarial tiene una larga historia de proporcionar experiencia crítica a la sociedad. Los profesionistas de esta carrera deben cumplir con estándares muy exigentes para obtener entrada en la profesión. Los servicios prestados, es decir, la práctica actuarial, es de lo más complejo y misterioso para las personas de otras profesiones. Ya sea porque son pocos los que entienden completamente las tareas que un actuario realiza o por otras razones. Gunz nos dice que es poco lo que se ha escrito de las responsabilidades profesionales de los actuarios en la literatura académica más allá de la propia profesión [17].

Independientemente que un actuario en México incursione en varias ramas del conocimiento sobre todo en las matemáticas antes mencionadas, hoy por hoy, internacionalmente se describe a un actuario de la siguiente forma de acuerdo a la "*Society of Actuaries*" [39] una de las organizaciones actuariales más importantes del mundo sino es que la más importante de todas:

> *Los actuarios miden y gestionan el riesgo. Los actuarios tienen un profundo conocimiento de las matemáticas, las estadísticas y la gestión empresarial. Con esto, ayudan a las empresas a crecer y brindar valor a sus clientes. Los actuarios ayudan a los líderes a tomar decisiones estratégicas y a los consumidores a prepararse para su futuro.*
>
> *Los actuarios están en demanda. Trabajan para y con empresas con un enfoque financiero. Negocios que incluyen seguros-vida, salud, propiedad, accidentes, incluso seguros para mascotas. Además, banca, inversiones, gobierno, energía, comercio electrónico, marketing, beneficios para empleados, desarrollo de productos, gestión de riesgos empresariales, análisis predictivo, consultoría y más.*

Es de interés el último párrafo ya que brinda un panorama internacional a lo que un actuario puede ejecutar dentro de sus habilidades de acuerdo a la Society of Actuaries (SOA), no conforme con esto y abordándolo más específicamente en México, los actuarios mexicanos pueden desarrollarse en dos sectores, el público y el privado, citando a la UNAM y la oferta de trabajo para esta carrera tenemos lo siguiente [51]:

Sector Público:

- Institutos Mexicano del Seguro Social (IMSS), de Seguridad y Servicios Sociales para los Trabajadores del Estado (ISSSTE), Federal Electoral (IFE), Nacional de Estadística y Geografía (INEGI).

- Secretarías: Economía, Comunicaciones y Transporte, Desarrollo Social, Hacienda y Crédito Público.
- Comisiones Nacionales: Bancaria y de Valores, de Seguros y Fianzas, parala Defensade los Usuarios de Servicios Financieros.
- Docencia e investigación en universidades e instituciones de educación media y superior.

Sector Privado:

- Instituciones bancarias y financieras.
- Compañías afianzadoras, aseguradoras y reaseguradoras.
- Despachos de consultoría actuarial, estadística y finanzas.
- El egresado tiene la posibilidad, ya frecuente entre los actuarios, del ejercicio independiente, aunque esto requiere de capital, tiempo y de una buena cartera de clientes.

Como se puede ver la oferta de trabajo de estos dos sectores sumada con la globalización hace del actuario en México un profesionista con presencia en el mundo y su país, pues un actuario mexicano en cuanto a profesión se refiere no es tan diferente de uno en otros países. Sobre todo cuando actualmente se trabaja para compañías extranjeras y nacionales. También podemos decir que las bases matemáticas son las mismas pues la educación actual sigue unos estándares sobre los cuales se forman actuarios, dentro de estos estándares es importante hacer mención de los exámenes internacionales de la SOA, no todos los actuarios son obligados a tomarlos en México, después de que un individuo o estudiante apruebe una serie de estos exámenes se le confiere el título de actuario. Es por ello por lo que varias universidades basan sus planes de estudio de acuerdo con los conocimientos requeridos para pasar estos exámenes.

La actuaría junto con las transformaciones que ha traído la historia y el devenir del tiempo, se ha adecuado, evolucionado y mejorado, nuevos métodos más modernos son enseñados, así como nuevos lenguajes de programación, se tienen códigos de ética y conducta para los actuarios tanto nacionales como internacionales.

Los actuarios presentan los mismos conocimientos tanto nacional como internacionalmente, su trabajo es el mismo, no obstante, las leyes y regulaciones cambian de acuerdo con cada país, una cosa se puede decir, los modelos matemáticos y la teoría es la misma no importa que, es por ello que más adelante se dará una definición y se pasará a introducir un concepto altamente relacionado a la actuaría, la base de ella principalmente, el riesgo.

Recapitulando sobre los códigos de ética y conducta en México por ejemplo, para el sector asegurador se tienen leyes e instituciones que rigen el comportamiento y sientan una organización para todos los actuarios de este ramo como la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF), la Ley de Instituciones de Seguros y Fianzas (LISF) o la Circular Única de Seguros y Fianzas (CUSF).

Si se habla del sector financiero en México en el cual un actuario también participa, entonces las entidades encargadas de esta regulación financiera son la Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP), el Banco de México (el cual es autónomo al gobierno mexicano) y la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV).

Las pensiones son otro ramo en el cual la participación de los actuarios es notoria e importante, los organismos reguladores para este ramo son la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (CONSAR), dentro de este se pueden encontrar las Administradoras de fondas para el retiro (AFORE) y a las Sociedades de inversión especializadas de fondos para el retiro (SIEFORES) y leyes como la Ley de los Sistemas para el Retiro (LSAR).

Aunque cabe recalcar que el panorma es tan amplio que no se omite la posibilidad que falten de mencionar algunas instituciones y leyes, pues bien se ha visto la interdiciplina manejada por los actuarios. No obstante, no esta demás proporcionar estos ejemplos. Ahora bien se procede a ver un concepto altamente ligado a la actuaría, el riesgo.

3.3. El riesgo, concepto fundamental de la actuaría

El riesgo, la primera vez que a un actuario se le presenta la definición de riesgo es desde los primeros instantes de su preparación, ya que desde el inicio de su universidad hasta el fin, este concepto acompañará al actuario. Asi en el mundo laboral trabajara con este mismo en aseguradoras o bancos, el riesgo es un concepto tan arraigado y a la misma vez tan versátil.

La actuaria contempla bien este cambio, el término riesgo tiene muchas acepciones dependiendo del área de estudio que se trate. Un riesgo para un ingeniero por ejemplo puede ser la probabilidad de un accidente y sus consecuencias, en el ámbito bancario, más específicamente en las finanzas un riesgo puede ser la volatilidad de una acción o la perdida de ésta [35]. Para un actuario y de acuerdo con la Society of Actuaries un riesgo actuarial es un fenómeno sujeto a incertidumbre con respecto a una o más de las variables: ocurrencia, momento y gravedad. Un actuario es una persona que aplica enfoques matemáticos para anticipar, medir y gestionar el riesgo. Un actuario identifica, analiza y documenta los riesgos, supervisa las áreas de riesgo y saca a la superficie los problemas relacionados con el riesgo [40]. Un riesgo es entonces algo posible, fortuito, lícito y cuantificable en el contexto general. Un riesgo puede ser positivo o negativo, aunque casi siempre se asocian con pérdida. Un actuario identifica los riesgos, los pondera en base a sus consecuencias, decide que riesgos sirven para aceptarlos o no y por último, tomar provecho de su existencia.

Los actuarios han llevado una nueva fase de desarrollo para el riesgo que empezó con los estudios de Filip Lundberg, junto con H. Cramér, C.O. Segerdahl, y otros autores suecos. Lo que se convertiría en la conocida teoría colectiva del riesgo. En cuanto a lo que se refiere a una aseguradora, el enfoque de esta teoría era la del progreso de este negocio desde el punto de vista de la teoría de la probabilidad. Esta teoría tomaría parte de los seguros de vida, así como los seguros de daños o no vida. Esta nueva forma de ver el riesgo provocó grandes avances, así como el acercamiento de más autores, esto provoco grandes avances en la teoría y nuevos modelos probabilísticos [12] [5].

Tanto el modelo individual como el modelo colectivo de los riesgos se condujeron hacía los modelos estocásticos, teoría la cual se ha convertido en una muy desarrollada. Los avances en la teoría de los procesos estocásticos se han reflejado directamente en el desarrollo de la teoría del riesgo, es por lo que se ha desarrollado rápidamente. Actualmente se pueden encontrar numerosos libros y artículos que estudian las fundaciones de la teoría del riesgo [12].

La teoría del riesgo, área fundamental de la actuaría permite tratar al riesgo y estudiarlo, para dár un ejemplo se puede decir el de la actividad aseguradora la cual responde a la incertidumbre que sienten los individuos ante algún suceso que pueda provocar un daño tanto material como personal, la capacidad de llevar estos cálculos para satisfacer la necesidad y tener un beneficio cliente-aseguradora no sería posible sin un estudio posterior de las matemáticas necesarias para modelar y brindar un beneficio a ambas partes. Aunado a esto, las matemáticas actuariales tienen como objetivo el estudio cuantitativo de las operaciones de seguro y financieras para optimizar las decisiones sobre las magnitudes que intervienen en ellas, considerando que estas operaciones son realizadas por un ente asegurador o financiero. Es entonces que la relación entre la teoría del riesgo y la aseguradora es estrecha, pues la teoría del riesgo se podría decir surge como respuesta a la formalización de las matemáticas y modelos necesarios para la ejecución formal de la actuaría.

3.3.1. Ejemplos de modelos para medir riesgo

El proceso de modelado varía dependiendo de las necesidades. Sin embargo, este es un proceso en el que se puede volver atrás para mejorar las especificaciones que se puedan llegar a tener, el modelar es muy técnico y artístico. Tómese por ejemplo una técnica convencional, las técnicas actuariales convencionales se basan en gran medida en las frecuencias y los importes medios de los siniestros. Por ejemplo, si una aseguradora tiene una cartera de N pólizas en riesgo y si el valor medio esperado de la frecuencia de siniestros de estas pólizas durante un periodo determinado es q y el importe medio esperado del siniestro es m, entonces el importe total esperado de los siniestros es Nqm. [5]

El anterior modelo cae en la sobre simplificación de los hechos, en términos probabilísticos el importe real de los siniestros es una variable aleatoria. Es innegable que el anterior ejemplo se trata de una simplificación excesiva de los hechos y resulta útil e interesante desarrollar los principios de las matemáticas del seguro sobre una base más general, en la que tanto el número como el tamaño de los siniestros se consideren variables aleatorias. Los estudios de los distintos tipos de fluctuaciones que aparecen en una cartera de seguros que parten de este punto de vista constituyen la rama de la matemática actuarial denominada teoría del riesgo explicada en el subcapítulo anterior [5].

Se puede también por ejemplo considerar un caso más estructurado en el cual se tenga un proceso con tamaño constante de una reclamación, cuando los siniestros de la cartera de seguros considerada son todos del mismo importe. Si esta cantidad constante se toma como unidad monetaria, el gasto total será igual al número de siniestros. El problema enfrentado en este caso es encontrar la función de probabilidad del número de reclamaciones, es decir una función $f_k(t)$ que arroje la probabilidad que el número de reclamos en el tiempo t sea igual a k.

Existen diferentes maneras de abordar esta problemática, un método es notar que el portafolio está compuesto de pólizas individuales, cada una con una probabilidad de reclamo. Como por ejemplo en las matemáticas actuariales del seguro de personas, donde se asume que la probabilidad de que una persona de edad x muera dentro del próximo año q_x. Entonces el número total de reclamos es la suma de las contribuciones de las pólizas individuales y la función f_k puede ser derivada mediante la suma de las probabilidades gracias al teorema aditivo:

Sean $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $A_1, A_2, ... \in A$
El teorema aditivo es

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}\left(A_i\right) - \sum_{i>j} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{i>j>k} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \cdots \\ - (-1)^{m-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right)\end{aligned} \tag{3.1}$$

En particular para $m = 3$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) = \\ &\mathbb{P}\left(A_1\right) + \mathbb{P}\left(A_2\right) + \mathbb{P}\left(A_3\right) - \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right) - \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_3\right) - \mathbb{P}\left(A_2 \cap A_3\right) + \\ &\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right)\end{aligned}$$

Otra forma de modelar este riesgo es mediante el modelo colectivo, en este método no se tiene en cuenta la estructura individual de las pólizas, sino que se considera la cartera en su conjunto, es decir, se considera un "proceso" en el que sólo se registran los puntos temporales y el número de eventos (es decir, los siniestros) y en el que no se presta atención a las pólizas en particular.

Considerando el portafolio junto y restringiéndolo a las reclamaciones que se presenten, la secuencia de eventos (reclamos de seguros) es un proceso aleatorio y se asumen las siguientes afirmaciones:

i) Los eventos que ocurren en dos intervalos de tiempo disjuntos son independientes (independencia de incrementos).

ii) El número de eventos en un intervalo de tiempo (t_1, t_2) es dependiente únicamente de la longitud del intervalo $t = t_2 - t_1$ y no del valor inicial t_1 (incrementos estacionarios).

iii) La probabilidad que más de un evento ocurra al mismo tiempo y la probabilidad que un número infinito de eventos ocurra en un intervalo finito de tiempo son ambos cero (exclusión de múltiples eventos).

Es entonces que este proceso aleatorio con estas condiciones se representa con la función de Poisson:

$$f_k(t) = e^{-qt}\frac{(qt)^k}{k!} \qquad (q \geq 0) \tag{3.2}$$

Donde f_k es la probabilidad de que exactamente k eventos ocurran en el intervalo de tiempo de longitud t y q siendo el parámetro indicando el promedio de reclamos en una unidad de tiempo [5].

El anterior modelo sirve a un propósito específico, el de modelar el riesgo que conlleva trabajar una cartera de asegurados. Sin embargo, existen métodos y modelos para cada problemática, por ejemplo, existen circunstancias en donde las condiciones i) y ii) no pueden ser satisfechas. Tómese por ejemplo a los seguros de incendio en donde las condiciones climáticas y un periodo soleado muy largo pueden dar origen a incendios anormales. Los huracanes en algunos países dan origen a otros problemas aparte de los daños que estos ya causan. La aplicación de una función de Poisson a estas circunstancias no es tan favorable y limitada. Otro ejemplo es cuando la condición iii) no parece satisfacerse, en el seguro de autos, dos vehículos pueden accidentarse y dar origen a un doble evento, los seguros marinos y de otros ramos también son casos. Esta dificultad puede ser evitada, en el caso de automóviles considerando la coalición doble como una sola reclamación [5].

Viendo más detenidamente los modelos que cuantifican un riesgo tenemos también la existencia de los modelos de supervivencia donde se presenta la vida futura de un individuo como variable aleatoria, sus probabilidades de muerte y supervivencia pueden ser calculadas. En estos modelos se define una cantidad importante denominada la fuerza de mortalidad. Asimismo, es de interés la implementación de la notación actuarial para la facilidad de los cálculos. La implementación de esta teoría es la siguiente [13]

Sea (x) una persona de edad x, donde $x \geq 0$. La muerte de (x) puede ocurrir a cualquier edad mayor a x, modelamos el tiempo futuro de vida de (x) con una variable aleatoria continua que denotamos por T_x. Esto significa que $x + T_x$ representa la variable aleatoria de la edad de muerte para (x).

Sea F_x la función de distribución de T_x, tal que

$$F_x(t) = \mathbb{P}\left[T_x \leq t\right] \tag{3.3}$$

Entonces $F_x(t)$ representa la probabilidad de que (x) no sobreviva mas allá de la edad $x+t$, y nos referimos a F_x como la distribución de vida a edad x. En muchos problemas relacionados a seguros de vida es de interés la probabilidad de supervivencia en vez de la de muerte por lo que se define S_x como:

$$S_x(t) = 1 - F(x) = \mathbb{P}\left[T_x > t\right] \tag{3.4}$$

Por lo que $S_x(t)$ representa la probabilidad que (x) sobreviva por lo menos t años, y S_x es conocida como la función de supervivencia.

Se puede también recalcar el uso de la fuerza de mortalidad concepto fundamental en el modelado del tiempo de vida futuro. Denotamos a la fuerza de mortalidad a edad x por μ_x y definimos como:

$$\mu_x = \lim_{dx \to 0^+} \frac{1}{dx} \mathbb{P}\left[T_0 \leq x + dx \mid T_0 > x\right] \tag{3.5}$$

Los modelos de supervivencia son una aplicación directa de como las matematicas en particular la teoría de probabilidad ayuda a la actuaria a brindar estimaciones y análisis acerca de la vida del ser humano y con esto permitir a las aseguradoras llevar un mejor trabajo a su cartera de asegurados. Otro ejemplo de esta intersecion es la notación actuarial, con la teoría antes mencionada.

$S_x(t), F_x(t)$ y $f_x(t)$ son notaciones estándar en estadística. La ciencia actuarial, como se ha mencionado antes a desarrollado su propia notación, que resume las probabilidades y las funciones de gran interés y útiles para un actuario.

La probabilidad de que una persona de edad (x) sobreviva a edad $x + t$

$${}_tp_x = \mathbb{P}\left[T_x > t\right] = S_x(t) \tag{3.6}$$

La probabilidad de que una persona de edad (x) muera antes de edad $x + t$.

$${}_tq_x = \mathbb{P}\left[T_x \leq t\right] = 1 - S_x(t) = F_x(t) \tag{3.7}$$

La probabilidad de que una persona de edad (x) sobreviva u años y después muera en los subsecuentes t años i.e. entes los años $x + u$ y $x + u + t$.

$${}_{u|t}\, q_x = \mathbb{P}\left[u < T_x \leq u + t\right] = S_x(u) - S_x(u + t) \tag{3.8}$$

Otro ámbito que no se debe olvidar y que también es importante en la actuaría es el rigor matemático que se le brinda a las finanzas, qué, como se comentó anteriormente forman parte importante de la ciencia actuarial.

Desde la medición del interés, anualidades, valuaciones de proyectos de inversión, amortización, hasta pasar por los mercados financieros como lo son los mercados de divisas y capitales, las carteras de inversión, hasta lo más complejo como lo son los modelos de valuación de activos, el riesgo de mercado y los instrumentos financieros derivados, todo esto constituye una parte de lo que un actuario es capaz de analizar y saber dentro del área de las finanzas. Existen modelos matemáticos que nos permiten el análisis de estos instrumentos financieros. Como se ha visto anteriormente, el mundo de la actuaría es grande y la rama de las finanzas no es la excepción, podemos partir desde una simple anualidad cierta:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^n = v \times \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{3.9}$$

La cual es una serie de pagos constantes y preestablecidos desde el inicio, hechos en intervalos de tiempo iguales y de la cual pueden surgir muchos ejemplos prácticos de transacciones financieras, un ejemplo podría ser el pago de una hipoteca en la que el monto del pago mensual es constante a lo largo de la duración del préstamo. Existen anualidades como las anualidades contingentes o rentas contingentes, por ejemplo, una anualidad vencida contingente temporal es de la forma:

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \tag{3.10}$$

donde $D_x = v^x l_x$ y $N_x = \sum_{t=x}^{\infty}, D_t = \sum_{t=x}^{\infty} v^t l_t$. Usando un modelo determinista con una función de supervivencia dada, definimos a l_x como el número de vidas, de una población inicial de recien nacidos, que sobreviven hasta edad x [42].

Estas anualidades tienen aplicaciones como por ejemplo el de un jubilado que compra una renta contingente a una compañía de seguros o la compra de un seguro de vida con primas mensuales. Los ejemplos anteriores son todas operaciones donde se pueden ver involucradas a las anualidades [10], existen diferentes tipos de anualidades, pero en resumen, la principal diferencia entre una anualidad contingente y una anualidad cierta radica en la certeza de los pagos y la influencia de eventos futuros en esos pagos. En una anualidad cierta, los pagos son constantes y preestablecidos desde el inicio, mientras que, en una anualidad contingente, los pagos pueden cambiar debido a condiciones o eventos que se produzcan en el futuro.

Se tienen hasta ejemplos más difíciles y complejos, herramientas y teoremas matemáticos como el teorema de representación de martingalas pueden ser aplicados y adecuados a un modelo financiero. En los modelos más simples como el modelo de Black-Scholes, tendremos un mercado que consistirá en una acción de valor aleatorio y un bono de cuenta de efectivo sin riesgo, de aquí es donde surge el concepto de portafolio [4].

Un portafolio (ϕ, ψ), es un par de procesos ϕ_t y ψ_t que describen respectivamente el número de unidades de acciones y la del bono que se tenga al tiempo t. El proceso puede tomar valores positivos o negativos.

Un portafolio es la primera parte a modelos mas complejos como por ejemplo el modelo de Black-Scholes, una de sus representaciones mas complejas es la siguiente:

Se postula la existencia de un determinista r, μ y σ tal que el precio del bono B_t y el precio de la acción sigan lo siguiente:

$$\begin{aligned} B_t &= \exp(rt) \\ S_t &= S_0 \exp(\sigma W_t + \mu t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Donde r es la tasa libre de riesgo, σ es la volatilidad del mercado y μ la desviación del mercado. No hay costos de transacción y ambos instrumentos son libre e instantáneamente comerciables ya sea en corto o largo al precio cotizado [4].

Ejemplos de modelos matemáticos de utilidad para los actuarios hay demasiados pues es una área en donde se tienen grandes ramas y muchas áreas de estudio, no es malo mirar atrás a todos los modelos matemáticos que aprovecha la actuaría para su uso y aplicación, en capítulos posteriores se verá como estos modelos matemáticos pueden formar parte de lo que Nassim Nicholas Taleb clasifica como un cisne negro, pero por ahora basta con entender los distintos modelos que rodean a la actuaría y como estos conviven juntos para brindar un servicio, ya sea un seguro, una inversión u otro bien.

4 Consecuencias Estadísticas de las Colas Pesadas

Para empezar a adentrarse en el mundo de Nassim Taleb se debe de tener conciencia que hay incertidumbre y opacidad en el mundo que nos rodea, la información incompleta y el poco entendimiento de los modelos matemáticos son algunas de las razones de esta incertidumbre, la premisa del cisne negro es que hay poca certeza de que acciones deberían de tomarse basándose en esa incompletitud, en cualquier situación. El trabajo de Nassim Taleb junto con su libro *El Cisne Negro* buscan exponer esto y como se debería de lidiar con estos problemas tanto por la parte de la estadística como por la toma de decisiones.

En este capítulo se verá que es un cisne negro estadísticamente y por consecuente su ámbito estadístico en relación con la actuaría. El cisne negro más allá de ser un concepto matemático, pasa a ser uno de consecuencia, es la respuesta dada a tratar de nombrar un suceso impredecible, en este mismo capítulo se verá su versión matemática. Las problemáticas que aborda el cisne negro matemáticamente hablando son muchas, pero sobre todo aborda y resalta una en específico, las dificultades y consecuencias que conlleva el uso de las distribuciones de cola pesada en ejemplos muy concretos, además de ciertas propiedades que encontramos dentro de estas, dicho lo anterior este capítulo acerca y resalta la relación entre el cisne negro y la actuaría y como la estadística detrás del cisne negro está altamente relacionada con la actuaría.

La mayoría de las estadísticas "estándares" provienen de teoremas diseñados para las distribuciones de colas ligeras y necesitan ser adaptadas pre asintóticamente a las distribuciones de colas pesadas, lo cual no es trivial. Dicho todo lo anterior un "cisne negro" es ese valor altamente improbable en esa distribución de cola pesada que se pasa por alto al tratar de hacer predicciones o tratar de encajar un modelo. A continuación, se vera la matemática detrás de todo este proyecto de divulgación y las consecuencias que tienen estas distribuciones.

4.1. Conceptos Fundamentales para el Análisis

Las definiciones que se mencionaran son la base de toda la teoría estadística que necesitaremos.

Se empieza definiendo que es un espacio de probabilidad:

Definición: Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ en donde Ω es un conjunto arbitrario, $\mathbb{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad definida sobre $\mathbb{F}$.

Si se tiene un espacio de probabilidad entonces se puede hablar de una variable aleatoria.

Definición: Una variable aleatoria es una transformación X del espacio de resultados Ω al conjunto de los números reales, esto es,

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cualquier número real x,

$$\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} \in \mathbb{F}$$

*Considerando que tenemos un experimento aleatorio cualquiera, junto con un espacio de probabilidad asociado $(\Omega, \mathbb{F}, P)$.

Ahora bien, teniendo esto dos conceptos podemos empezar a hablar de funciones, en particular son de interés las asociadas a la probabilidad

Definición Sea X una variable aleatoria discreta con valores $x_0, x_1, ...$ La función de probabilidad de X denotada por $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se define como sigue

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{si} \quad x_0, x_1, ... \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición: Sea X una variable aleatoria continua. Decimos que la función integrable y no negativa $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función de densidad de X si para cualquier intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x)dx$$

Definición: Sea X una variable aleatoria cualquiera. La función de distribución de X, denotada por $F(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define como la probabilidad

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Para el caso discreto se tiene que suponiendo $f(x)$ una función de probabilidad de X, la función de distribución se calcula como sigue

$$F(X) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

En el caso continuo, si $f(x)$ es la función de densidad de X, se tiene que la función de distribución es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du$$

Otra definición importante es la independencia de variables aleatorias.

Definición: Se dice que las variables aleatorias X y Y son independientes si los eventos $(X \leq x)$ y $(Y \leq y)$ son independientes para cualesquiera valores reales de x y y, es decir, si se cumple la igualdad

$$P\left[(X \leq x) \cap (Y \leq y)\right] = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

Dos indicadores que siempre nos dicen mucho acerca del comportamiento de la variable aleatoria o de su distribución son los indicadores numéricos conocidos como la esperanza y la varianza.

Definición: Sea X una variable aleatoria discreta con función de densidad $f(x)$. La esperanza de X se define como el número

$$E(X) = \sum_{x} x f(x) \tag{4.1}$$

suponiendo que esta suma es absolutamente convergente, es decir, cuando la suma de los valores absolutos es convergente. Por otro lado, si X es continua con función de densidad $f(x)$, entonces la esperanza es

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \tag{4.2}$$

suponiendo que esta integral es absolutamente convergente, es decir, cuando la integral de los valores absolutos es convergente.

Definición: Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $f(x)$. La varianza de X se define como el número

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{x} (x-\mu)^2 f(x) \tag{4.3}$$

cuando esta suma es convergente y en donde μ es la esperanza de X. Para una variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$ se define

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx \tag{4.4}$$

cuando esta integral es convergente.

Hablando de la esperanza y la varianza, estos son conocidos como momentos probabilísticos, una función muy útil que sirve para algunas variables aleatorias, tanto continuas como discretas es la siguiente:

Definición: La función generadora de momentos de una variable aleatoria discreta o continua X es la función $M(t)$ definida como sigue

$$M(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right), \tag{4.5}$$

para valores reales de t en donde esta esperanza existe, además

$$\lim_{t \to 0} M^{(n)}(t) = \mathbb{E}(X^n). \tag{4.6}$$

Ley Potencia o Power Law

Las distribuciones de potencia sirven para medir fenómenos y observaciones entre diferentes campos de estudio incluidos la física, astronomía, biología, economía y ciencias sociales. En [33] se citan una gran cantidad de ejemplos relacionados al mundo real incluyendo distribuciones de riqueza, frecuencia de una palabra en un mismo libro o texto, población en una ciudad, etc.

La clase de distribuciones de esta categoría está definida convencionalmente por la propiedad de la función de supervivencia, como sigue. Sea X una variable aleatoria perteneciente a la clase de distribuciones con una "ley potencia" con cola derecha, esto es:

$$\mathbb{P}(X > x) = L(x)x^{-\alpha} \tag{4.7}$$

donde $L : [x_{\min}, +\infty] \to (0, +\infty)$ es una función definida como

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(kx)}{L(x)} = 1$$

para cualquier $k > 0$

El exponente de cola α se conoce como el índice de cola. El índice de cola también es conocido como el parámetro de forma si se habla bajo el contexto de una distribución Pareto, otro contexto es el parámetro de estabilidad si se habla de una distribución estable y grados de libertad en el contexto de una distribución-t. Así que se puede decir que este índice de cola está presente en muchas distribuciones y es de gran importancia cuando se trata de medir que tan pesada es la cola de una distribución.

Distribuciones subexponenciales

A lo largo de este trabajo se hablará mucho de dos metáforas o regiones importantes conocidas como "Mediocristan & Extremistan", la frontera natural entre estas dos regiones ocurre en la clase subexpoenencial, la cual tiene la siguiente propiedad [47]

Definición: Sea $X = X_1, ..., X_n$ una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con soporte en $(\mathbb{R}^+)$, con función de distribución F. La clase subexponencial de distribuciones se define como:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F(x)} = 2 \tag{4.8}$$

donde $F^{*2} = F' * F$ es la función de distribución de $X_1 + X_2$, la suma de dos copias independientes de X. Esto implica que la probabilidad que la suma $X_1 + X_2$ exceda un valor x es el doble de la probabilidad de que cualquiera de los dos exceda x por separado. Por lo que en cualquier ocasión en la cual la suma exceda x, para valores suficientemente grandes de x, el valor de la suma se debe a que uno u otro exceda x, el máximo sobre las dos variables, y el otro de ellos contribuye de manera insignificante.

De manera más general, se puede demostrar que la suma de n variables está dominada por el máximo de los valores sobre esas variables de la misma manera. Formalmente, las siguientes dos propiedades son equivalentes a la condición subexponencial.

Dada una $n \geq 2$, sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$

a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\mathbb{P}(X > x)} = n$

b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\mathbb{P}(M_n > x)} = 1$

Por lo que la suma S_n tiene la misma magnitud que la muestra más grande M_n, esto es otra forma de decir que las colas de las distribuciones juegan un papel muy importante.

Intuitivamente, los eventos en las colas en distribuciones subexponenciales deberían declinar más lentamente que una distribución exponencial para la cual los eventos de colas largas deberían ser irrelevantes. De hecho, se puede demostrar que las distribuciones subexponenciales no tienen momentos exponenciales:

$$\int_0^\infty \mathbf{e}^{\epsilon x} dF(x) = +\infty \tag{4.9}$$

Para todos los valores de ϵ mayores a cero. Sin embargo, lo contrario no es cierto, ya que las distribuciones pueden no tener momentos exponenciales y, sin embargo, no satisfacer la condición subexponencial.

Obsérvese que si se opta por indicar las desviaciones como valores negativos de la variable x, el mismo resultado se cumple por simetría para valores negativos extremos, reemplazando $x \to \infty$ con $x \to -\infty$. Para las variables de dos colas, se pueden considerar por separado los dominios positivos y negativos.

Value at Risk, Conditional VaR

La expresión matemática del Value at Risk o Valor en Riesgo por su traducción al español, VaR, de una variable aleatoria X con función de distribución F y límite (o umbral) $\lambda \in [0, 1]$

$$\mathrm{VaR}_{\lambda}(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > \lambda\}$$

y el correspondiente CVaR o Expected Shortfall ES con umbral λ:

$$\mathrm{ES}_{\lambda}(X) = \mathbb{E}\left(-X \mid_{X \leq -\mathrm{VaR}_{\lambda}(X)}\right)$$

o bien en el dominio positivo, considerando la cola de X en lugar de $-X$. Mas generalmente el expected shortfall del umbral K es $\mathbb{E}(X \mid_{X>K})$.

Invariancia de escala

Un objeto tiene un escala invariante si se ve igual a pesar de la escala en la que se le observe. La manera más facil de entender esta propiedad es usando fractales, si se observan de cerca y lejos se mantendran iguales. La distribución Pareto por ejemplo tambien tiene esta propiedad.

Aunque inicialmente misteriosa y contraria a la intuición, la invariancia de escala es un fenómeno bello y ampliamente observado que ha llamado la atención mucho más allá de las matemáticas y las estadísticas (por ejemplo, en física, informática, economía e incluso arte). Por ejemplo, la invariancia de escala es un concepto importante tanto en la teoría de campos clásica y cuántica como en la mecánica estadística [30].

Tengase en cuenta que tanto la “invariancia de escala” como la “ley de potencia” a menudo se usan (mal) como sinónimos de “cola pesada” y, por lo tanto, es importante señalar que no todas las distribuciones de cola pesada son invariantes de escala o tienen una ley de potencia (aunque todas las distribuciones invariantes de escala son de cola pesada, al igual que todas las distribuciones de ley de potencia).

Definición: Una distribución F es invariante de escala si existe una $x_0 > 0$ y una función continua positiva g tal que

$$\bar{F}(\lambda x) = g(\lambda)\bar{F}(x)$$

para toda x, λ satisfaciendo $x, \lambda x \geq x_0$.

4.1.1. El Cisne Negro y Gris estadísticamente

El propósito principal de Nassim Nicholas Taleb en su libro *“El Cisne Negro: El impacto de lo altamente improbable”*, no es el de predecir eventos que son impredecibles, pero el de construir “robustez” en contra de los eventos negativos mientras que por el contrario tratar de explotar el máximo de los eventos positivos.

Originalmente los cisnes negros surgieron puramente de la estadística, es decir, aquellos valores atípicos en una distribución de cola pesada. Después el término, cisne negro, pasaría a ser uno más universal pues estos conviven y se encuentran alrededor de la historia, más adelante se verán ejemplos de esto. En el año 2001 (año de publicación del libro) este concepto se volvería sumamente usado para describir aquellos eventos sumamente inesperados e inexplicables. Es interesante ver como un concepto que surgió de la estadística se popularizo bastante, el creador de este concepto Nassim Taleb, es un matemático estadístico, analista de riesgos y una persona con experiencia en las finanzas.

Cisne Negro

Los cisnes negros son el resultado de la incompletitud del conocimiento con efectos que pueden ser muy consecuentes en los dominios de colas pesadas.

Básicamente, hay cosas que se encuentran afuera de lo que uno puede esperar y modelar, y pueden tener grandes consecuencias. La idea no es como predecir estas cosas, pero ser convexo (o al menos no cóncavo) a su impacto: la fragilidad hacia una determinada clase de eventos es detectable, incluso medible (al medir los efectos de segundo orden y la asimetría de las respuestas), mientras que los atributos estadísticos de estos eventos pueden seguir siendo difíciles de alcanzar [47].

Taleb nos dice que es difícil el tratar de explicar a modeladores matemáticos o estadísticos acerca de cosas que nunca hemos visto (o imaginado) antes. También nos habla de muchos problemas filosóficos y epistemológicos a lo largo de su libro pues este no se centra únicamente en el ramo de las matemáticas y le gusta adentrarse en este tipo de áreas. Dicho esto, al cisne negro le precede lo que él llama una dimensión epistémica.

Lo que nos dice esta dimensión epistémica es que los cisnes negros son observadores dependientes, es decir, en capítulos posteriores de este trabajo se hablara del problema del pavo o pollo, el suceso de la muerte de este individuo desde el punto de vista del pavo es un cisne negro, pero para el grajero es un cisne blanco. El ataque terrorista del 11 de septiembre es un cisne negro para las víctimas, pero no para los terroristas. Esta propiedad de dependencia al observador es una propiedad central. Un modelo estadístico “objetivo” de un cisne negro no es solamente imposible, sino que derrota el propósito, debido al carácter incompleto de la información y su difusión.

Los cisnes grises: Las grandes desviaciones que son consecuentes y tienen una frecuencia muy baja, pero siguen siendo consistentes con las propiedades estadísticas se denominan “cisnes grises”. Pero, por supuesto, el “gris” depende del observador: un cisne gris para alguien que use una distribución de la ley de potencia será un cisne negro, sobre todo para algunos estadísticos que se atascan irremediablemente en los marcos y representaciones de cola delgada.

4.1.2. Teoremas fundamentales para análisis

Ley de los grandes números (débil)

La presentación estándar es como sigue. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ una secuencia infinita de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (Lebesgue integrables) con esperanza $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ (en ocasiones la condición i.i.d se puede relajar). El promedio de la muestra $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1, X_2, ..., X_n)$ converge al valor esperado, $\bar{X}_n \to \mu$, para $n \to \infty$.

Teorema del Límite Central

La versión estándar (Lindeberg-Lévy) del TLC es como sigue. Supongamos una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < +\infty$, y $\bar{X}_n$ la muestra promedio para n. Entonces a medida que n se acerca al infinito, la suma de variables aleatorias $\sqrt{n}(\bar{X}_n \mu)$ converge en distribución a una Gaussiana

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

La convergencia en una distribución significa que la función de densidad de $\sqrt{n}$ converge puntualmente a la función de densidad de $N(0, \sigma)$ para cada real z,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \leq z\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq \frac{z}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right), \ \sigma > 0$$

donde $\Phi(z)$ es la distribución normal estándar evaluada en z.

En capítulos posteriores veremos como estos dos teoremas no se comportan como se esperaría bajo los dominios de las colas pesadas, pues estos teoremas tienen la particularidad de necesitar más información si se usan bajo variables de colas pesadas.

4.2. Distribuciones de colas ligeras y pesadas

Uno de los enfoques principales del cisne negro esta en las clases de distribuciones que presentan eventos extremos y como deberíamos de lidiar con ellos tanto estadísticamente como en la toma de desiciones. La mayoría de las estadísticas “estandares” vienen de teoremas diseñados para las distribuciones de colas ligeras o tambien llamense *thin tails* y necesitan ser adaptadas preasintoticamente a las colas pesadas *fat tails* o *heavy tails*, lo cual no es trivial.

4.2.1. Distribuciones de colas ligeras

Las distribuciones de colas ligeras son distribuciones de probabilidad que tienen una menor probabilidad de eventos extremos o valores atípicos ("outliers"). Algunos ejemplos de distribuciones de cola ligera son:

1. Distribución normal: esta es la distribución más común utilizada en el modelado estadístico y, a menudo, se la denomina "curva de campana" debido a su forma característica. La distribución normal tiene colas delgadas, lo que significa que los valores extremos son relativamente raros.

2. Distribución binomial: esta distribución se utiliza para modelar la probabilidad de un cierto número de éxitos en un número fijo de intentos. La distribución binomial también tiene colas ligeras, ya que la probabilidad de valores extremos disminuye rápidamente a medida que aumenta el número de intentos.

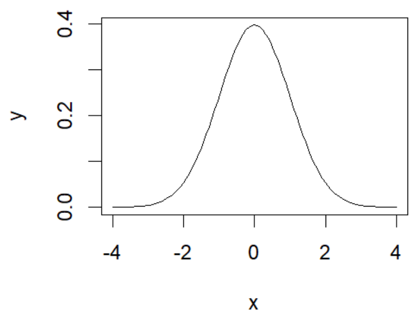
3. Distribución de Poisson: esta distribución se utiliza para modelar la probabilidad de que ocurra un cierto número de eventos en un intervalo fijo de tiempo o espacio. La distribución de Poisson tiene colas ligeras, ya que la probabilidad de eventos extremos disminuye rápidamente a medida que aumenta el número esperado de eventos.

4. Distribución exponencial: esta distribución se utiliza para modelar el tiempo entre ocurrencias de un determinado evento. La distribución exponencial también tiene colas ligeras, ya que la probabilidad de valores extremos disminuye rápidamente a medida que aumenta el tiempo medio entre ocurrencias. Sin embargo, más adelante se verá como esta distribución sirve como frontera entre las distribuciones ligeras y las pesadas.

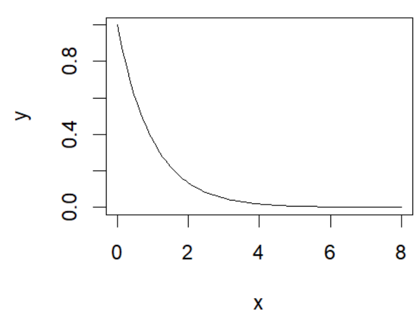
En general, las distribuciones de cola ligeras son útiles en muchas áreas de modelado estadístico, ya que pueden ayudar a identificar situaciones en las que los eventos extremos son relativamente raros o es poco probable que ocurran. Graficando las distribuciones anteriores en R tenemos:

```r
# Distribución normal con media 0 y desviación estándar 1
Dist_Normal <-
curve(dnorm(x, 0, 1), from=-4, to=4, xlab = "x", ylab = "y")

# Distribución exponencial con parámetro lambda 1
Dist_Exponencial <-
curve(dexp(x,1), from=-0, to=8, xlab = "x", ylab = "y")

# Distribución binomial de tamaño 50 y probabilidad 0.45 en cada
    intento
success <- 0:50
Dist_Binomial <-
plot(success, dbinom(success, size=50, prob=.45),type='h',xlab = "x"
    , ylab = "y")

```

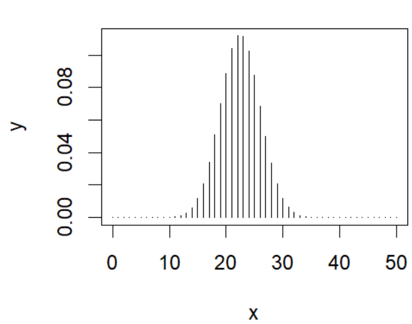
```r
# Distribución Poisson de tamaño 50 y con parámetro lambda 4
Dist_Poisson <-
plot(success, dpois(success,lambda = 4), type = 'h',xlab = "x", ylab
    = "y")
```



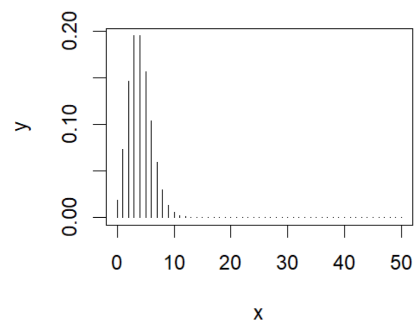
(a) Distribución Normal



(b) Distribución Exponencial



(c) Distribución Binomial



(d) Distribución Poisson

Figura 4.1: Ejemplos de distribuciones de colas ligeras

4.2.2. Distribuciones de colas pesadas

Las distribuciones de cola pesada son distribuciones de probabilidad que tienen una mayor probabilidad de eventos extremos o valores atípicos de lo que se esperaría de una distribución normal o gaussiana. Algunos ejemplos de distribuciones de colas pesada son:

1. Distribución de Pareto: esta distribución se usa comúnmente para modelar distribuciones de riqueza e ingresos, así como otros fenómenos que exhiben un comportamiento de ley de potencia. La distribución de Pareto tiene una cola

pesada que se declina muy lentamente, lo que significa que existe una alta probabilidad de eventos extremos, como por ejemplo el 1 % de las personas que posee una cantidad desproporcionada de riqueza.

2. Distribución t de Student: esta distribución se usa a menudo en la inferencia estadística y las pruebas de hipótesis cuando el tamaño de la muestra es pequeño y se desconoce la varianza de la población. La distribución t tiene colas más gruesas que la distribución normal, lo que significa que es más probable que ocurran valores extremos.

3. Distribución de Cauchy: Esta distribución también se conoce como distribución de Lorentz y tiene la propiedad de ser infinitamente divisible, lo que significa que puede usarse para modelar muchas otras distribuciones. La distribución de Cauchy tiene una cola muy pesada, lo que la hace útil para modelar datos financieros, donde los eventos extremos pueden tener un impacto significativo en los mercados.

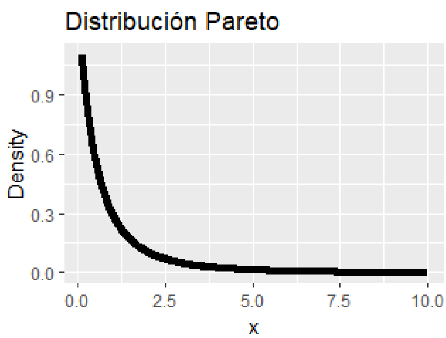
4. Distribución Levy: esta distribución se utiliza para modelar procesos estocásticos y, a menudo, se usa en finanzas para modelar movimientos de precios. La distribución Levy tiene una cola de ley de potencia que es mucho más pesada que la distribución normal, lo que significa que es mucho más probable que ocurran grandes movimientos de precios de lo que se esperaría de una distribución normal.

En general, las distribuciones de cola pesada son importantes en muchas áreas de las finanzas, la economía y el modelado estadístico, ya que pueden ayudar a capturar la alta probabilidad de eventos extremos que no se tienen en cuenta en las distribuciones normales tradicionales. Graficando las funciones de distribución en R tenemos lo siguiente:

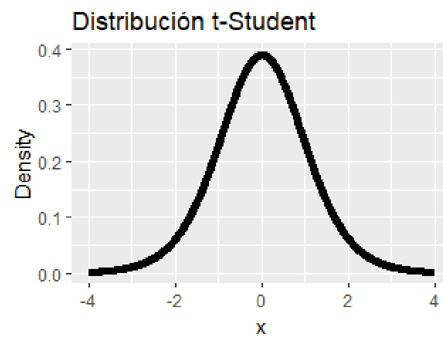
```
library(dplyr)
library(ggplot2)
library(tidyverse)
library(EnvStats)
library(rmutil)

# ---------------- Pareto ----------------

# Parametros de forma y escala
shape <- 1.5
scale_1 <- 2

# Se crea un data frame con valores en x & y
df <- data.frame(x = seq(0.1, 10, length=1000),
                 y = dpareto(seq(0.1, 10, length=1000), shape, scale
    _1))

# Se grafica la distribución Pareto
ggplot(df, aes(x, y)) +
  geom_line(size = 2) +
```

```
  labs(x = "x", y = "Density",
       title = "Distribución Pareto")

# ---------------- t-Student ----------------

# Grados de libertad
tS <- 10

# Se crea un data frame con valores en x & y
tS <- data.frame(x = seq(-4, 4, length=1000),
                 y = dt(seq(-4, 4, length=1000), tS))

# Se grafica la distribución t-Student
ggplot(tS, aes(x, y)) +
  geom_line(size = 2) +
  labs(x = "x", y = "Density",
       title = paste("Distribución t-Student"))

# ---------------- Cauchy ----------------

# Parametros de localización y escala
location <- 0
scale_2 <- 1

# Se crea un data frame con valores en x & y
df_2 <- data.frame(x = seq(-10, 10, length=1000),
                 y = dcauchy(seq(-10, 10, length=1000), location,
    scale_2))

# Se grafica la distribución Cauchy
ggplot(df_2, aes(x, y)) +
  geom_line(size = 2) +
  labs(x = "x", y = "Density",
       title = "Distribución Cauchy")

# ---------------- Levy ----------------

# Parametros de localización y escala
location_2 <- 0
scale_3 <- 1

# Se crea un data frame con valores en x & y
df_3 <- data.frame(x = seq(0, 10, length=1000),
                 y = dlevy(seq(0.01, 10, length=1000), location_2,
    scale_3, log = FALSE))

# Se grafica la distribución Lévy
ggplot(df_3, aes(x, y)) +
  geom_line(size = 2) +
  labs(x = "x", y = "Density",
       title = "Distribución Lévy")
```

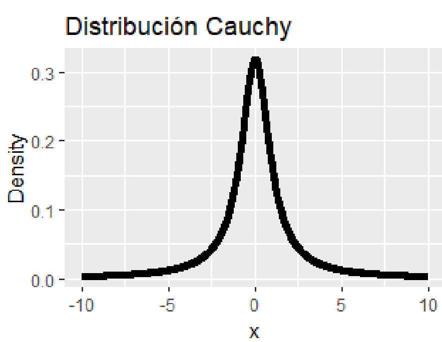
Más específicamente se tiene lo siguiente:



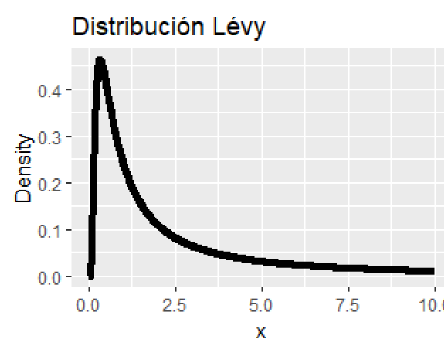
(a) Distribución Pareto



(b) Distribución t-Student



(c) Distribución Cauchy



(d) Distribución Levy

Figura 4.2: Ejemplos de distribuciones de colas pesadas

Definición Una distribución F se dice que es de cola pesada si y solo si, para toda $\mu > 0$,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1-F(x)}{e^{-\mu x}} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\mu x}} = \infty \tag{4.10}$$

De otra manera, F será de cola ligera. Una variable aleatoría X se dice que es de cola pesada (cola ligera) si su función de distribución es de cola pesada (cola ligera) [30].

Por ejemplo, tomese la distribución Pareto:

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \bar{F}(x) = \left(\frac{x}{x_m}\right)^{-\alpha}, \qquad \text{para } \alpha > 0, x > x_m > 0$$

La variable α es el parametro de forma de la distribución y como se vio anteriormente tambien es conocida como el índice de cola, mientras que x_m es el mínimo valor de la distribución, esto es, $X \geq x_m$. Dada la función de supervivencia arriba es directo obtener su función de distribución diferenciando.

$$f(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \qquad x \geq x_m.$$

Es facíl ver que a partir de la función de supervivencia la distribución Pareto es de cola pesada. En particular, usando la definición 4.10 se obtiene:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\mu x}} = \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha e^{\mu x} = \infty$$

ya que la exponencial $e^{\mu x}$ crece más rápido que el polinomio x^α. Esto recalca un contraste entre la distribución Pareto y las distribuciones de cola ligera comunes como la Gaussiana y la exponencial, la cola de la distribución Pareto decae polinomialmente. Como consecuencia valores más grandes son posibles de ocurrir bajo una distribución Pareto en vez de una Gaussiana o exponencial.

Además en el capítulo 4.2.3 se verá como las catastrofes y las conspiraciones se relacionan con esos eventos impredecibles que ya hacen en las distribuciones de cola pesada, estas definiciones clasifican a estos sucesos de acuerdo al tipo de distribución, ya sea de cola ligera (conspiraciones) o pesada(catastrofes).

Más aun recuerdese la definición 4.8 en donde se define la clase de distribuciones subexponenciales, es en esta clase de distribuciones que veremos la frontera entre distribuciones de cola ligera y de cola pesada. Las distribuciones subexponenciales son de cola pesada además de cumplir varias caracteristicas de ser pertenecientes a la clase de colas pesadas entre ellas esta el siguiente lema en donde se recalca que una distribución subexponencial cumple con satisfacer el principio de catastrofe [30].

Lema. Considerese $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias independientes con distribución F teniendo soporte $\mathbb{R}_+$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) F es subexponencial, i.e., $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + ... + X_n > t) \sim n\mathbb{P}(X_1 > t)$ para toda $n \geq 2$

(ii) F satisface el principio de catastrofe, i.e.,
$\mathbb{P}\left(\max\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) > t\right) \sim \mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n > t\right)$ para toda $n \geq 2$.

Sumado con el siguiente Lema

Lema. Las distribuciones subexponenciales son de cola pesada.

4.2.3. Diferencias entre las colas ligeras y pesadas

Nasssim Nicholas Taleb hace una clara diferenciación entre estas dos clases de distribuciones, para ello emplea una metáfora con el fin de separar la forma en la que vemos estas dos. Por un lado, tenemos que las distribuciones de colas ligeras pertenecen a lo que él llama Mediocristán, mientras que las distribuciones de colas pesadas pertenecen a Extremistán.

En Mediocristán, cuando una muestra bajo consideración incrementa, ninguna observación puede realmente modificar las propiedades estadísticas. Un punto que para la región de Extremistán no importa, puesto que, en este lugar, las colas y los eventos inusuales juegan un rol desproporcional en determinar estas propiedades, es decir que una observación si tiene mucho peso en esta región.

En Mediocristán si se toma aleatoriamente la altura de dos personas y se obtiene una altura de estas combinada de 4.1 metros entonces se puede suponer que de acuerdo a una distribución Gaussiana las alturas individuales de cada individuo podrían ser de 2.05 y 2.05 metros cada una, no cabe la posibilidad de que una mida 10 centímetros y la otra 4 metros. Algo contrario pasa si en Extremistán si se selecciona aleatoriamente la riqueza de dos personas y se observa que combinadas juntan los $36 millones la combinación de cada persona individual no sería de 18 millones cada una sino de aproximadamente $35,999,000 y $1000.

Lo anterior separa muy bien los conceptos entre los tipos de distribuciones de cola ligera (Mediocristán) y los de cola pesada (Extremistán), para las distribuciones subexponenciales, la ruina es más probable de venir de un solo evento extremo que de una serie de malas rachas. Esta lógica también es analizada en la teoría clásica del riesgo por el actuario Filip Lundberg a principios del siglo 20 y formalizada en 1930 por Harald Cramer, pero según Taleb, olvidada por los economistas en nuestro tiempo. En términos de la industria aseguradora, es más probable que las pérdidas provengan de muchos eventos que de uno solo, lo que permite la diversificación. Esto indica que el seguro solo puede funcionar en Mediocristán, nunca se debe suscribir un contrato de seguro **sin** tope si existe un riesgo de catástrofe. Esto se llama el principio de catástrofe [47].

Dentro de las distribuciones de colas pesadas existen niveles de clasificación como se muestra a continuación:

$$\text{Cola Pesada} \supset \text{Subexponencial} \supset \text{Ley Potencia (Paretiana)}$$

Las distribuciones de colas pesadas de primer nivel son cualquier distribución con colas más pesadas que la Gaussiana i.e. con más observaciones dentro de ± 1 desviación estándar que $\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 68.2\,\%$[1] y con curtosis mayor a 3.

En segundo lugar, están las distribuciones subexponenciales, a menos que entren en la clase de las de ley potencia, las distribuciones no son de cola pesada porque no tengan impactos extremos de eventos raros. En otras palabras, todas pueden tener momentos.

En el tercer nivel se tiene lo que es llamado por varios nombres, ley potencia, o miembro de la clase variante regular, o las colas Pareto, estas corresponden verdaderamente a colas pesadas pero el grosor depende de la parametrización del índice de la cola.

[1]La función error erf es la integral de la distribución Gaussiana $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dte^{-t^2}$.

La anterior clasificación separa las distribuciones de colas pesadas en tres tipos, a continuación se muestra una imagen que trata de resumir el panorama general de las distribuciones para este trabajo.

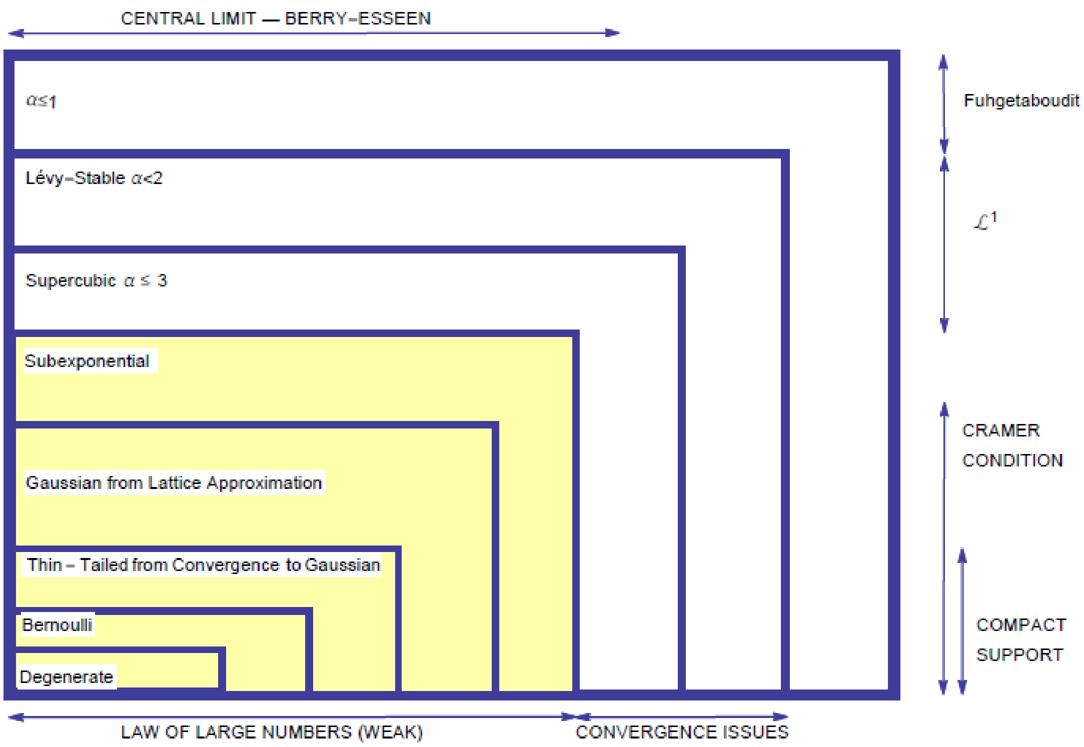


Figura 4.3: Tabla de clasificacion de distribuciones [47].

En la figura 4.3, en el extremo inferior izquierdo se tiene una de las distribuciones de probabilidad más simples, la distribución degenerada, no posee varianza y no hay aleatoriedad ya que solo hay un posible resultado. La siguiente distribución por otra parte llamada la Bernoulli tiene dos posibles resultados. Las siguientes dos distribuciones son Gaussianas, las primeras siendo las que tienen soporte en más y menos infinito, y las demás Gaussianas que son obtenidas agregando caminatas aleatorias (con soporte compacto, a menos que se tengan sumandos infinitos), es por ello que son distintas. Arriba de las distribuciones Gaussianas se encuentran las que caen dentro de la clase subexponencial y que no son miembros de las de ley potencia. Todas las distribuciones anteriores tienen momentos probabilísticos. Entre las distribuciones subexponenciales se encuentra la log normal, la cual poseé cualidades extrañas estadísticamente hablando, a menor varianza es de cola ligera, a mayor varianza se comporta como una de cola pesada.

Ser una distribución de la clase subexponencial no garantiza la condición de Cramer[2],

[2] Sea X una variable aleatoria. La condición de Cramer: para toda $r > 0$,

$$\mathbb{E}\left(e^{rX}\right) < +\infty$$

permitiendo manejar seguros. Más técnicamente, la condición de Cramer significa que la esperanza de la variable aleatoría exponencial existá.

Las distribuciones subexponenciales fueron estudiades por primera vez en 1964 por Chistyakov, en la epoca de los setentas, la investigación se centro en aplicaciones para los seguros [16].

Una vez que se abandona el área amarilla, donde la ley de los grandes números rara vez funciona y el teorema del límite central eventualmente termina de funcionar, se encuentran los problemas de convergencia y las distribuciones que se llaman las de ley potencia. Estas distribuciones se clasifican por índice, cuando $\alpha \leq 3$ se les llama super cúbicas, la distribución no tiene otro momento que no sea el primero y el segundo, lo que significa que el teorema del límite central y la ley de los grandes números aplicarían en teoría.

La clase $\alpha \leq 2$ se le llama la Levy-Stable (Levy-Estable) para simplificar, aunque se encuentren otras distribuciones similares de ley potencia no específicamente en la clase Levy. En teoría, mientras más se añadan variables, la suma terminara en dicha clase en vez de en una Gaussiana, esto se puede explicar debido al teorema generalizado del límite central, a partir de esta clase se incrementan las dificultades ya que no existe varianza, pero desviación absoluta media (es decir, las variaciones medias tomadas en valor absoluto).

En la parte más superior de la tabla existen las distribuciones que no poseen media, la imagen las pone como Fuhgetaboudit abreviación del inglés *forget about it* u olvídalo una forma en la que nos indica Taleb las extrañas propiedades que poseen estas distribuciones. También nos dice que el acercamiento que tienen los estadísticos a las distribuciones de colas pesadas es el de asumir una distribución diferente, pero seguir haciendo lo mismo, las mismas métricas, los mismos test y pruebas de significancia. Sin embargo, una vez que se traspasa la línea amarilla, para la cual estas técnicas estadísticas fueron desarrolladas, las cosas no salen de acuerdo a lo esperado.

Téngase presente uno de los fenómenos estadísticos más conocidos, la distribución Pareto 80/20, es decir, por ejemplo, que el 20 por ciento de italianos son dueños del 80 por ciento de la tierra. La siguiente Tabla 4.4 muestra cómo mientras a una distribución Gaussiana le toma 30 observaciones estabilizar la media hasta cierto punto, a una distribución Pareto le toma 10^{11} observaciones para reducir el error de muestra a la misma cantidad [47]. Y a pesar de que hacer este ejercicio es trivial muy pocas personas lo hacen. No se pueden hacer afirmaciones sobre la estabilidad de la media muestral cuando se emplean distribuciones de colas pesadas. Existen otras formas de hacer lo mismo, pero no bajo observaciones sobre la media muestral.

¿ Qué herramientas pueden servir para diferenciar a una distribución de cola pesada?

Entre las medidas convencionales que dicen que tan pesada es una cola se tienen el índice de cola α del cual se hablo anteriormente en en capítulo 4.7 y también la curtosis

α	n_α Simétrica	$n_\alpha^{\beta=\pm\frac{1}{2}}$ Sesgada	$n_\alpha^{\beta=\pm 1}$ De una cola
1	*Fughedaboudit*	-	-
$\frac{9}{8}$	6.09×10^{12}	2.8×10^{13}	1.86×10^{14}
$\frac{5}{4}$	574,634	895,952	1.88×10^{6}
$\frac{11}{8}$	5,027	6,002	8,632
$\frac{3}{2}$	567	613	737
$\frac{13}{8}$	165	171	186
$\frac{7}{4}$	75	77	79
$\frac{15}{8}$	44	44	44
2	30.	30	30

Figura 4.4: Cuantas observaciones son necesarias para alcanzar a uns distribución Gaussiana [47].

para las distribuciones con momentos finitos, aunque está última falla en aplicarse a algunas distribuciones y no sirve para comparaciones entre clases y parametrización, esto es, entre ley potencia y afuera de las Levy-estables, o entre las de ley potencia a distribuciones de otras clases. Para ver que tan pesada es una cola en distribuciones de ley potencia se puede observar el exponente de cola α. O bien se pueden usar valores extremos, tomando la probabilidad de exceder un valor extremo ajustado por la escala (como se realiza en la teoría de valores extremos).

¿Cómo comparar la suma de 100 t-student's con 3 grados de libertad a una sola t-student con 2 grados de libertad? (por ejemplo). Taleb se dio cuenta de este problema y propuso una solución:

> *Proponemos una métrica operativa y heurística que nos permite comparar variables independientes sumadas bajo todas las distribuciones con primer momento finito. El método se basa en la tasa de convergencia de la ley de los grandes números para sumas finitas, n-sumandos específicamente [47].*

Tanto la distribución student, la exponencial, gamma, pareto, normal y lognormal

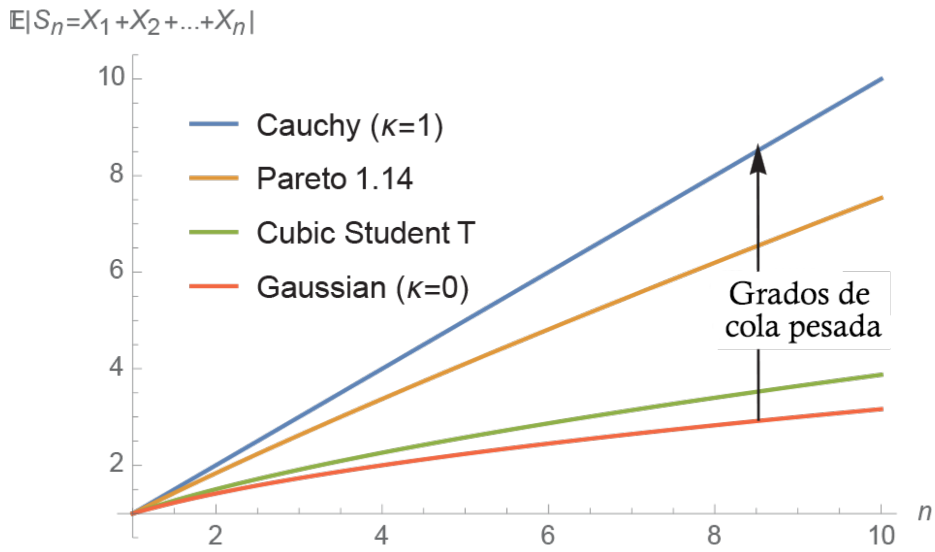


Figura 4.5: La metrica κ midiendo como la desviación media de la suma de copias identicas de una v.a. $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ crece a medida que la muestra incrementa, así se puden comparar distribuciones de distintas clases [47].

les fueron asigandas una κ específica para poder observar que tan pesadas son estas distribuciones entre sí. Para observar más de esto vease [47], aquí no se muestran pues esto solo se menciona con el proposito de mostrar un ejemplo en el cual se compara que tan pesada es una cola respecto a otra. Es interesante ver como Taleb propone una manera de cuantificar el peso de las distribuciones en este libro ya que brinda una forma para que profesionales de la estadística observen el peso de dicha distribución además de compararlo con otras y ver si verdaderamente conviene implementar o usar dicha distribución.

En resumen el problema con las estadísticas estandarizadas es el siguiente. La estimación estadística se basa en dos elementos importantes. El primero siendo el teorema del límite central (el cual se asume que funciona en grandes sumas, haciendo todo convenientemente normal) y en segundo la ley de los grandes números lo cual reduce la varianza de la estimación a medida que se incrementa el tamaño de la muestra. Sin embargo las cosas no funcionan del todo así. Volviendo a las diferencias construidas en 4.3, recapitulemos que las distribuciones de probabilidad se pueden encontrar en el rango de ser entre extremadamente delgadas (como una Bernoulli) o extremadamente de cola pesada. Entre las categorias de distribuciones que pueden ser distinguibles debido a las propiedades de convergencia en sus momentos son:

1. Tener soporte compacto (pero no degenerada).
2. Subgaussiana.
3. Subexponencial.
4. De ley potencia con exponente mayor a 2.
5. De ley potencia con exponente menor o igual a 2. En particular, las distribucio-

Clase	Descripcion
Extremadamente de Cola Ligera	Soporte compacto (Bernoulli o Binomial)
Cola Ligera	Gaussiana alcanzada orgánicamente a través de la suma de colas ligeras, por Límite Central; soporte compacto excepto en el límite $n \to \infty$
Colas Ligeras convencionales	Aproximación gaussiana de un fenómeno natural.
Inicio de las Colas Pesadas	Curtosis más alta que la gaussiana pero convergencia rápida a una gaussiana bajo sumas
Subexponenciales	Por ejemplo una distribución Lognormal
Supercúbica α	La condición de Cramer no sirve para $t > 3, \quad \int e^{-tx} dF(x) = +\infty$
Varianza Infinita	Levy estable $\alpha < 2, \quad \int e^{-tx} dF(x) = +\infty$
Primer momento indefinido	Peligro al usar esta distribución (Mejor olvidarlas)

Tabla 4.1: Ranking de distribuciones

nes de ley potencia tienen media finita solo si el exponente es más grande que 1, y tienen varianza finita solo si el exponente excede el 2.

6. De ley potencia con exponente menor a 1.

Es de interes entonces el poder distinguir entre los casos en donde las colas pesadas dominan los impactos, entre las categorias consideradas como Mediocristan y Extremistan. Basicamente una distribución subexponencial es lo que se considera como la frontera entre las distribuciones ligeras y pesadas.

La frontera natural entre Extremistán y Mediocristán ocurre en la clase subexponencial la cual tiene la propiedad 4.8 vista anteriormente que define a estas mismas. Definitivamente parece ser una eleción particular el que la distribución exponencial sea la frontera entre las colas ligeras y pesadas, sin embargo esto tiene un porque, primero vease el siguiente lemma.

Lema 1

Sea X una variable aleatoria. Las siguientes afirmaciones, son equivalentes.

(i) X es de cola pesada.

(ii) La función generadora de momentos $M(s) := \mathbb{E}[e^{sX}] = \infty$ para toda $s > 0$.

(iii) $\liminf_{x\to\infty} -\dfrac{\log \Pr(X > x)}{x} = 0$.

La demostración se encuentra en el Apéndice C. La definición en *(ii)* resalta que las distribuciones de cola pesada requieren de un acercamiento distinto que las de cola ligera. Para una distribución de cola ligera la función generadora de momentos provee de información relevante como el obtener los momentos o por otra parte puede ser invertida para caracterizar a la función en si. Además es importante para el análisis por su simplicidad al manejar convoluciones, sin embargo dichas técnicas no son aplicables para las distribuciones de cola pesada. La consequencia *(iii)* implica que el logaritmo de la cola de una distribución de cola pesada decae linealmente [30].

Catástrofes & Conspiraciones

Una catástrofe y una conspiración siguen la igualdad y la dualidad anteriormente vista cuando se definieron las regiones de Mediocristán y Extremistán, no obstante, las catástrofes y las conspiraciones si poseen una definición matemáticamente formal, no son metáforas o recursos usados para comunicar una idea. En este subcapítulo se verá como estas herramientas matemáticas sirven como un separador entre las distribuciones de cola ligera y las de cola pesada.

Supóngase que se está en una clase con cincuenta alumnos y el profesor hace un experimento. Registra la altura y el número de seguidores en Twitter de cada estudiante de la clase. Resulta que tanto la suma de las alturas como la suma de los números de seguidores son inesperadamente grandes. La suma de las alturas de los estudiantes llega a más de 310 pies, y la suma del número de seguidores en Twitter llega a poco más de medio millón. La altura promedio de un hombre en los EE. UU. es de 5 pies y 9 pulgadas, y el número promedio de seguidores en Twitter es de 700, por lo que estos dos totales son bastante sorprendentes. Dado que las sumas son significativamente mayores de lo que sugerirían los promedios, el profesor pregunta a la clase:

¿Qué creen que condujo a las sumas inesperadamente grandes?

Por supuesto, hay muchas explicaciones posibles, pero se dividen en dos categorías generales: o muchos estudiantes en la clase tienen valores ligeramente más altos que el promedio, o algunos estudiantes en la clase tienen valores extremadamente altos y todos los demás están casi en el promedio. Primero pensemos en las alturas. En este caso, la más intuitiva de estas explicaciones es claramente la primera: que la suma es grande porque muchos estudiantes son ligeramente más altos que el promedio. Por ejemplo, tal vez los equipos de baloncesto y voleibol estén tomando la clase. Ciertamente no es muy probable que la suma de las alturas sea grande porque algunos estudiantes son gigantes de 20 pies de altura.

Sin embargo, en el caso de los seguidores de Twitter, es al revés: la explicación más probable para la gran suma es que una persona de la clase sea una celebridad de Twitter, y esa persona por si sola tenga casi medio millón de seguidores.

La explicación más probable para una gran suma de alturas es una "conspiración" donde muchas personas son ligeramente más altas que el promedio y la combinación conduce a una gran suma, mientras que la explicación más probable para una gran suma de seguidores de Twitter es una "catástrofe" donde una persona tiene una cantidad extremadamente grande de seguidores. La diferencia entre estas explicaciones es bastante llamativa y, por supuesto, no se limita a la comparación de alturas y número de seguidores en Twitter. La razón fundamental de esta diferencia es que la distribución de alturas es de cola ligera y la distribución de seguidores de Twitter es de cola pesada. Las distribuciones de cola ligera tienden a seguir un "principio de conspiración", mientras que las distribuciones de cola pesada tienden a seguir un "principio de catástrofe".

Dicho de una manera más formal:

Definición: Principio de Catástrofe
Una distribución F en los reales no negativos se dice que satisface el principio de catástrofe si, para $n \geq 2$ variables aleatorias independientes $X_1, X_2, ..., X_n$ con distribución F,

$$\mathbb{P}\left(\text{máx}\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) > t\right) \sim \mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n > t\right) \quad \text{con} \quad t \to \infty. \tag{4.11}$$

El principio de catástrofe es una propiedad particularmente poderosa porque, a priori, hay muchas cosas que podrían haber llevado a que la suma fuera grande, pero el principio de catástrofe especifica con precisión cómo sucedió. Es decir, la suma podría haber sido grande porque cada muestra era un poco más grande que el promedio, pero el principio de catástrofe especifica que la suma es grande porque hay exactamente una muestra muy grande [30].

En contraste con el principio de catástrofe, el principio de conspiración se alinea con nuestra intuición acerca de cómo suceden eventos inesperadamente grandes, como la combinación de una gran cantidad de factores. Esto hace que el principio de conspiración sea más intuitivo que el principio de catástrofe para la mayoría de las personas. Sin embargo, también es menos poderoso en muchos casos porque no proporciona una explicación tan "simple" para el evento raro.

Como en el caso del principio de catástrofe, la forma más natural de formalizar la noción del principio de conspiración se hace en términos de la cola de sumas de variables aleatorias. En particular, el principio de conspiración implica que la cola de una suma de variables aleatorias domina la cola del elemento máximo en la suma [30].

Definición: Principio de Conspiración
Una distribución F en los reales no negativos se dice que satisface el principio de conspiración si, para $n \geq 2$ variables aleatorias independientes $X_1, X_2, ..., X_n$ con distribución F,

$$\mathbb{P}\left(\text{máx}\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) > t\right) = o\left(\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n > t\right)\right) \quad \text{con} \quad t \to \infty \tag{4.12}$$

Donde $f(t) = o(g(t))$ a medida que $t \to \infty$ Sí $\text{lím}_{t \to \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$

La definición anterior del principio de conspiración es lo suficientemente simple y amplia como para demostrar que se satisface con todas las distribuciones comunes de cola ligera.

Volviendo al principio de catástrofe su importancia (y utilidad) ha llevado a la definición de una subclase formal de distribuciones de colas pesadas denominadas “distribuciones subexponenciales”4.8 de las cuales ya se ha hablado pero es de aquí de donde surgen, estás corresponden a aquellas distribuciones para las que se cumple un principio de catástrofe, aunque la conexión entre la definición de distribuciones subexponenciales y el principio de catástrofe no es tan obvio inicialmente estos dos conceptos están ligados entre sí, además uno puede demostrar que las distribuciones subexpoenenciales son de cola pesada como la hace Wierman Adam en [30].

4.3. Consecuencias Estadísticas del uso de colas pesadas

No es que las distribuciones de colas pesadas sean la principal causa de un cisne negro, en realidad son un conjunto de circunstancias que están tanto relacionadas con las estadísticas empleadas tanto otras causas ajenas a la matemática como tal, como cuestiones epistemológicas y un sesgo cognitivo, sin embargo, no se puede pasar por alto el impacto que tiene el uso de distribuciones de colas pesadas en ámbitos y circunstancias erróneas, por lo que efectivamente el uso de este tipo de distribuciones es un factor determinante. Para ello se toman algunos ejemplos donde el uso de distribuciones de cola pesada resulto difícil de emplearse y cuando se llevó a cabo termino por generar errores [47].

Recordemos la parte amarrilla a la cual llamaremos zona de confort Fig: 4.3, existen consecuencias de moverse del límite amarillo de estas distribuciones al siguiente, dejando la zona de confort, algunas consecuencias estadísticas que se pueden encontrar son los siguientes problemas:

> Consecuencia 1:
> La ley de los grandes números, cuando funciona, funciona muy despacio en el mundo real.

Lo anterior significa la cancelación de estimadores estadísticos que hubiesen podido servir para analizar mejor las propiedades de la información, como ejemplo tómese el dado por Taleb en donde podemos ver una comparación entre una distribución Gaussiana con varianza alta en comparación con una distribución Pareto $80-20$.

En este ejemplo 4.6 vemos como la ley de los grandes números en teoría debería de estabilizar la media, en efecto lo hace. Sin embargo, en dominios como los de Extremistán esta herramienta tan útil trabaja más despacio, la distribución Pareto de la imagen 4.6 tiene exponente 1.13 lo que corresponde a una Pareto $80-20$, esto es porque cuando el exponente es $\alpha = 1.13$, aproximadamente el 80 % de la masa total de la distribución se encuentra en el 20 % superior de la distribución. Otra observación importante es que ambas distribuciones tienen la misma desviación absoluta media. Además, téngase en cuenta que lo mismo se aplica a otras formas de muestreo, como la teoría de portafolios. Lo que deja con la conclusión de que efectivamente bajo circunstancias en donde se manejan las colas pesadas es más díficil estabilizar usando la ley de los grandes números.

Uno puede replicar esta misma simulación o resultado, para ello usamos el lenguaje de programación R y obtenemos lo siguiente 4.7.

```r
# Se cargan las librerias requeridas
library(ggplot2)
library(actuar)

# Se asigna una semilla para replicar el mismo resultado
set.seed(123)

# Se asigna el tamaño de la muestra para la ley de los grandes
    números
sample_size <- 10000

# Se asignan los parametros para la distribución Gaussiana
gaussian_mean <- 0
gaussian_sd <- 1

# Se asignan los parametros para la distribución Pareto
pareto_shape <- 2
pareto_scale <- 1

# Se generan muestras aleatorias de la distribución Gaussiana
# Se la libreria actuar para usar variaciones aleatorias
gaussian_samples <- rnorm(sample_size, mean = gaussian_mean, sd =
    gaussian_sd)

# Se generan muestras aleatorias de la distribución Gaussiana
pareto_samples <- rpareto(sample_size, shape = pareto_shape, scale =
     pareto_scale)

# Se calculan las medias de densidad para cada distribución
gaussian_cumulative_means <- cumsum(gaussian_samples) / (1:sample_
    size)
pareto_cumulative_means <- cumsum(pareto_samples) / (1:sample_size)

# Se crea un data frame para graficar
data <- data.frame(
  Sample_Size = 1:sample_size,
  Gaussian_Mean = gaussian_cumulative_means,
  Pareto_Mean = pareto_cumulative_means
)

# Se grafican los resultados
ggplot(data, aes(x = Sample_Size)) +
```

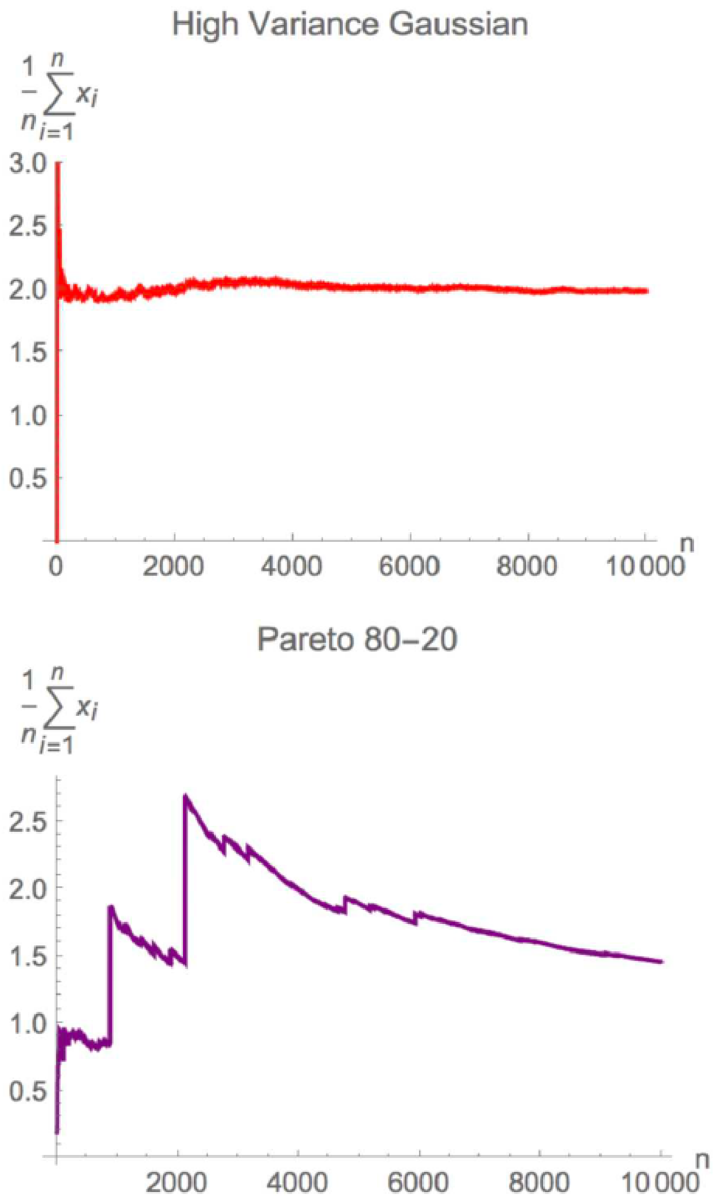


Figura 4.6: Comportamiento de la Ley de los Grandes Números en dos distribuciones diferentes, en la parte superior una distribución Gaussiana, en la parte inferior una distribución Pareto 80-20 [47].

```
geom_line(aes(y = Gaussian_Mean, color = "Gaussian"), linetype = "dashed") +
geom_line(aes(y = Pareto_Mean, color = "Pareto"), linetype = "solid") +
labs(x = "Sample Size", y = "Cumulative Mean", color = "Distribution") +
scale_color_manual(values = c("Gaussian" = "blue", "Pareto" = "red")) +
theme_minimal()
```

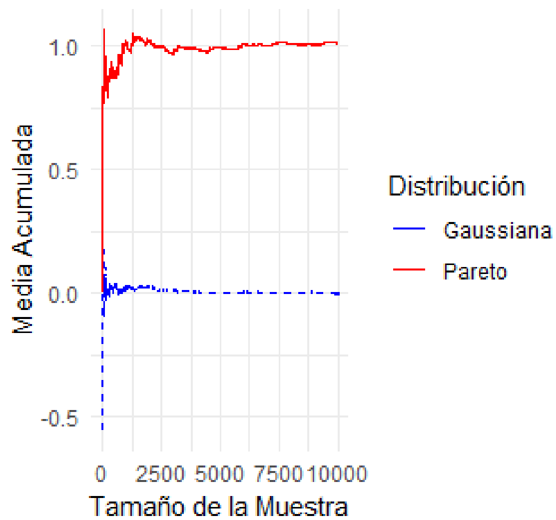


Figura 4.7: Programa realizado en R para replicar el resultado que tiene la LGN bajo dos tipos de distribuciones (ligeras/pesadas).

Lo que Taleb llama en su investigación preasintoticos es el comportamiento de una suma o sequencia cuando n es grande pero no infinita. De acuerdo al comportamiento que tenga la distribución baja la ley de lo grandes números es que se le da una clasificación.

Consecuencia 2:
La media de la distribución corresponderá muy raramente a la media muestral, tendrá un efecto persistente de muestra pequeña (hacia abajo o hacia arriba), particularmente cuando la distribución es sesgada (o unilateral).

Esto es otro problema relacionado con la insuficiencia de datos, es decir insuficiencia en la muestra. De hecho, no existe una distribución unilateral de cola pesada en donde la media poblacional pueda ser propiamente estimada directamente de la media muestral, a menos que se tenga bastante información. Los eventos raros o extremos requieren de una cantidad considerable de información para hacerse visibles, esto sumado con lo raros que son, toman mucha información para mostrarse.

Las distribuciones de Extremistán se comportan bajo leyes de potencia. Cuando normalmente aprendemos estadística, usamos la definición de la ley de los grandes números (LGN) como atajo. Esencialmente, la LGN dice que si una distribución tiene una media, se pueden muestrear muchos datos y eventualmente obtener la media de la población. Una premisa importante del libro de Taleb es que para las distribuciones de cola pesada (Extremistán), se necesitan demasiados datos para que la ley de los grandes números alcance la verdadera media de la población. Sin embargo, en el mundo real, es muy difícil obtener esta cantidad de datos.

Consecuencia 3:
Las métricas como la desviación estándar y la varianza no son implementarías.

Estas fallan afuera de la muestra, aun cuando existen o todos los momentos probabilísticos existen. Es un error científico que la noción de desviación estándar (a menudo confundida por sus usuarios con la desviación promedio) encontrara su camino como una medida de variación, ya que es muy precisa en lo que pretende hacer, en la mejor de las circunstancias.

Dado que las métricas económicas no tienen la totalidad de los datos de población, se requiere de una cantidad excesiva de datos para encontrar suficientes de esos eventos raros que impulsarán la verdadera media de la población. Como tal, las métricas financieras que usan medias o desviaciones estándar (Sharpe Ratio y Beta) pueden ser engañosas ya que no tienen suficientes datos para tener en cuenta eventos raros, lo que conduce a la actual consecuencia.

Este punto también tiene que ver con las dos distinciones que Taleb hace en su investigación entre la desviación estandar y la desviación absoluta media (o promedio) MAD[3] por sus siglas en inglés, prefiriendo esta última sobre la desviación estandar.

Desviación Estandar (asumiendo media y mediana 0):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2} \tag{4.13}$$

Desviación Absoluta Media:

$$MAD = \frac{1}{n}\sum |x_i| \tag{4.14}$$

Por un lado la desviación absoluta media (MAD) pose mayor robustez frente a valores atípicos en comparación con la desviación estandar. La desviación estandar está influenciada por las diferencias al caudrado entre los puntos de datos y la media, lo que significa que los valores atípicos tienen un mayor impacto en su valor. La DAM considera las diferencias absolutas, por lo que es menos sensible a valores extremos.

La MAD da más peso a los valores extremos o colas de la distribución, lo cual es crucial para capturar el riesgo de cola. En los mercados financieros, por ejemplo, los eventos extremos o valores atípicos pueden tener un impacto significativo en el riesgo general. Al usar el MAD, Taleb tiene como objetivo explicar mejor estos eventos de cola y sus posibles consecuencias.

[3] Mean Absolute Deviation

Tomese una distribución extremadamente de cola pesada, con $n = 10^6$, las observaciones son todas -1 excepto por una sola 10^6,

$$X = \left\{-1, -1, ..., -1, 10^6\right\}$$

La desviación absoluta media, $'textMAD(X) = 2$. La desviación estandar $DStd(X) = 1000$ y la razon entre estas dos es de 500.

La MAD es aplicable a una gama más amplia de distribuciones, incluidas aquellas que no se distribuyen normalmente. En los mercados financieros y otros sistemas complejos, a menudo se observa que los rendimientos u otras variables no siguen una distribución gaussiana (normal) estricta. El MAD proporciona una medida de riesgo más flexible que se puede acomodar distribuciones no normales. Taleb personalmente prefiere esta medida cuando se está trabajando con distribuciones de colas pesadas.

Consecuencia 4:
Beta, Sharpe Ratio y otras métricas financieras comunes no son informativas.

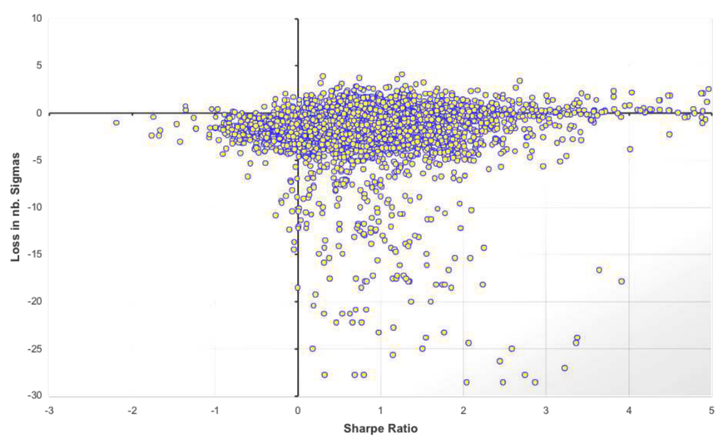


Figura 4.8: La siguiente gráfica nos muestra el sharpe ratio en el eje x y las pérdidas en la crisis del año 2008 en donde se ve un error de predicción

Esta consecuencia deriva del punto pasado, ya sea que estas métricas fallen porque requieren de muchísima más información o un modelo diferente que se tenga que utilizar del cual no se está consciente aún. Prácticamente cualquier variable económica y seguridad financiera es de cola pesada [47]. De las 40,000 seguridades observadas por Taleb y su equipo, ninguna pareció ser de cola ligera. Esto puede explicar grandes fallas en sistemas financieros y económicos.

En la figura 4.8 se puede ver como en el eje x se trazó el ratio de sharpe del índice de los fondos de cobertura[4] registrados hasta la crisis financiera del 2008 y sus pérdidas subsecuentes expresadas en desviación estándar durante la crisis.

[4]Un fondo de cobertura o hedge fund es una inversión privada que reúne dinero de varios inversores de alto valor neto y grandes empresas con el objetivo de maximizar los rendimientos y reducir el riesgo.

Una beta es una métrica que muestra cuánto se espera que se mueva un activo A en respuesta a un movimiento en el mercado general (o un punto de referencia o índice dado), expresado como la relación de la covarianza entre A y el mercado sobre la varianza del mercado. El ratio de Sharpe expresa la rentabilidad media (o exceso de rentabilidad) de un activo o una estrategia dividida por su desviación estándar. No solamente el ratio de sharpe falla completamente en la predicción del rendimiento fuera de la muestra, sino que, en todo caso, al ver cómo se comporta se puede ver a este como predictor débil y con fallas [47].

Consecuencia 5:
La regresión lineal de mínimos cuadrados no funciona (fallo del teorema de Gauss-Markov)

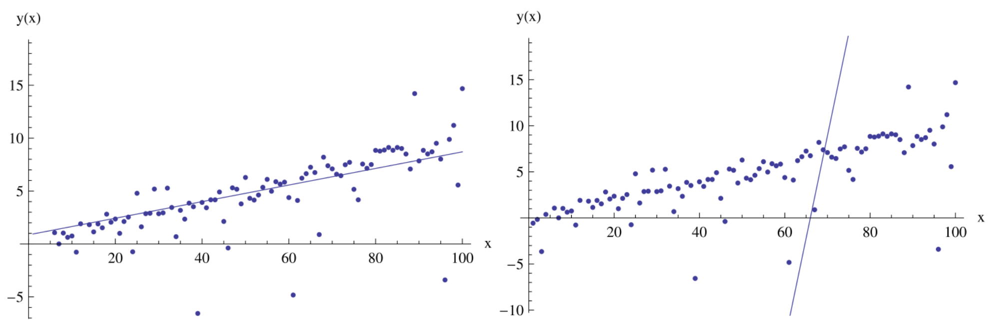


Figura 4.9: Dos tipos de regresiones, una realizada bajo estándares usuales y otra realizada bajo colas pesadas.

Bajo el comportamiento de colas pesadas se pueden ajustar líneas de regresión marcadamente diferentes a la misma información (el teorema de Gauss-Markov, necesario para permitir los métodos de regresión lineal, ya no se aplica).

En la imagen 4.9 podemos encontrar en la parte izquierda una regresión común y corriente. A la derecha una línea de regresión que se trata de acomodar la gran desviación. Omitir la desviación más grande puede ser fatal como en este caso. Téngase en cuenta que la muestra no incluye la observación crítica, pero se ha estimado usando métodos de "media sombra" o "shadow mean" [47].

La lógica detrás del método de minimización de mínimos cuadrados es el teorema de Gauss-Markov que requiere explícitamente de una distribución de cola ligera para permitir que la línea que pasa por los puntos de datos sea única. Así que en este caso se necesita de muchísima información para minimizar las desviaciones al cuadrado (en teoría el Teorema de Gauss-Markov funciona, pero no para situaciones preasintóticas ya que el mundo real tiene datos finitos, no infinitos), o por otro lado no se podría efectuar en el caso de que el segundo momento probabilístico no exista. En este último caso, si minimizamos las desviaciones absolutas medias (DAM), no solamente seguiremos enfretandonos a una insuficiencia de datos para una convergencia adecuada, sino que la pendiente de la desviación puede no ser única.

Así que una regresion lineal falla en informar cuando se encuentra en colas pesadas, sin embargo, es empleada en estos dominios. De hecho, variables como el ingreso monetario y la riqueza siguen una distribución de ley potencia. Test de inteligencia como los de IQ son Gaussianos (por diseño). Aun así, algunas personas no logran notar la diferencia entre estos dos tipos de mediciones, una para Extremistan y otra para Mediocristan.

Lo anterior se resume de la siguiente manera: Cuando se hace una regresión de una variable aleatoria de cola pesada contra una de cola ligera, el coeficiente de determinación R^2 tendrá un sesgo más alto y requerirá un tamaño de muestra mucho mayor para converger (si es que alguna vez lo hace). Esto se expande más en el Apendice Demostraciones y Ejemplos.

Taleb menciona que hay que tener en cuenta que algunas veces se trata de resolver este problema mediante alguna transforamación no lineal de una variable aleatoria (como la del logaritmo, por ejemplo) para tratar de establecer una relación lineal. El caso funciona unicamente cuando la transforamción requerida es exacta, por lo que hacer una correlación es muy delicado.

> Consecuencia 6:
> Los métodos de máxima verosimilitud funcionan bien para algunos parámetros de la distribución

Esta consecuencia no es tan negativa, tómese una distribución de ley potencia, se podría estimar un parámetro para su forma, el exponente de la cola y añadiendo otro parámetro como la escala nos conecta de vuelta a su media, esto es considerablemente mejor que encontrarla directamente muestreando la media.

Ejemplo: La media de una distribución simple Pareto con un valor mínimo L y exponente de cola α y función de distribución $\alpha L^{\alpha} x^{-\alpha-1}$ es $L\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$, una función de α. De manera que podemos obtenerla de estos dos parámetros, uno de los cuales ya sería conocido, lo que en veces es llamado estimador "plug-in". Se puede estimar α con un error bajo y con ayuda visual (o suando métodos de máxima verosimilitud con poca varianza), despues obtenemos la media.

En otras palabras, decimos que el exponente de la cola α captura, por extrapolación, la baja probabilidad de la desviación no visualizada en la información, pero juega un papel desproporcional en determinar la media.

Lo anterior se aplica a estimadores como el Gini u otros estimadores de desigualdad, de hecho, se puede ver como medidas de desigualdad como el coeficiente Gini requieren de métodos completamente diferentes de estimación bajo colas pesada.

¿Qué pasa cuando no se tiene un estimador confiable?, lo mejor segun Taleb es no hacer nada y no exponerse a los daños de la fragilidad, se pueden tomar desiciones riesgosas si se está acotado para pérdidas máximas.

Consecuencia 7:
El análisis de componentes principales (PCA por sus siglas en ingles) y el análisis de factores es probable que produzcan factores y resultados falsos.

El análisis de componentes principales es una técnica estadística avanzada que consiste en reducir la dimensionalidad de un conjunto de información (data) consistente de un gran número de variables interrelacionadas, mientras se trata de conservar el máximo de la variación presente en el conjunto de datos. Esto se logra transformando a un nuevo conjunto de variables, los componentes principales (PC), que no están correlacionados y que están ordenados de modo que los primeros retengan la mayor parte de la variación presente en todas las variables originales [21].

Nuevamente este es otro método estadístico que no se adapta bien bajo colas pesadas, el problema es muy similar al de la consecuencia 1 en donde se repite un mismo patrón, pero ahora en dimensiones mayores, la falla que se presenta en el modelo PCA es el efecto Weigner, debido a la insuficiencia de datos.

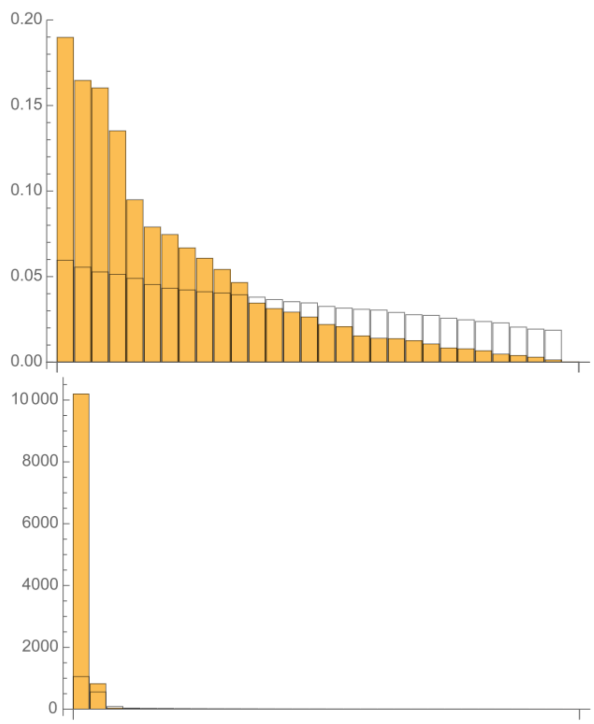


Figura 4.10: PCA falsos bajo colas pesadas

En la Figura 4.10 se observa un experimento Monte Carlo que muestra como las correlaciones y covarianzas falsas son más agudas bajo colas pesadas. En la imagen los componentes principales son clasificados por varianza para 30 variables gaussianas no correlacionadas (arriba), $n = 100$ sombreado y 1000 puntos de datos de manera transparente. Por otro lado en la parte de abajo se observan los componentes principales clasificados por varianza para 30 variables distribuidas (con cola $\alpha = \frac{3}{2}$, simetría $\beta = 1$, centralidad $\mu = 0$ y escala $\sigma = 1$), con la misma $n = 100$ (en color) y $n = 1000$ (transparente). Ambas son variables idénticamente distribuidas "no correlacionadas". Se puede ver la estructura del PCA "más plana" con la gaussiana a medida que n aumenta (la diferencia entre PCA se reduce). Tal aplanamiento no ocurre en un tiempo razonable bajo colas más gruesas [47].

No se abordara más técnicamente en que consiste este método pues es una técnica muy avanzada estadística, la intención de mostrarla es dejar ver en claro como las colas pesadas tienen repercusiones en modelos más avanzados y sobre todo en dimensiones más altas pues este sirve para varias variables.

Consecuencia 8:
El método de momentos (MoM por sus siglas en inglés) falla en hacer su trabajo.
Los momentos grandes no son informativos o no existen.

Esta consecuencia también aplica para el método generalizado de momentos (GMM por sus siglas en ingles), recuérdese que dicho modelo gano un premio nobel. La estimación de una distribución dada por momentos falla si lo momentos más altos no son finitos, así que cada muestra entrega un momento diferente. Tomese por ejemplo el cuarto momento del SP_{500}. Los momentos probabilisticos para las distribuciones de colas pesadas son explosivos. Particularmente en economía [47].

El ejemplo más notorio es por ejemplo usar una distribución Cauchy, está distribución simétrica en $(-\infty, \infty)$ con función de distribución de probabilidad:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

No pareciera ser distinta de una distribución Gaussiana, sin embargo su primer momento probabilistico, es decir su media, no existe. Debido a la falta de momentos finitos, el método de momentos no se puede utilizar para estimar los parámetros de la distribución de Cauchy de forma fiable. Situaciones similares pasan con la distribución de Fréchet (o Weibull inversa), esta distribución presenta fenómenos de valor extremo y tiene una cola pesada. A medida que la cola se vuelve más pesada, los momentos superiores (más allá del primer y segundo momento) pueden volverse menos informativos o proporcionar una visión limitada de la distribución subyacente.

El SP_{500}, también conocido como Standard & Poor's 500, es un índice bursátil que mide el desempeño de 500 grandes empresas que cotizan en bolsa en los Estados Unidos. Es ampliamente considerado como un índice de referencia para el rendimiento general del mercado de valores de EE. UU.

Taleb encontro un problema con la metrica del SP_{500} veamos a que se refiere Taleb con esto, anteriormente se vio como Taleb propone una solución para medir el nivel de colas pesadas entre distribuciones, está metrica κ es la que nos ayuda a pasar del problema de la información (es decir cuanta información se necesita para estabilizar una distribución de cola pesada en comparación con una de cola ligera), cuando tenemos un portafolio ese problema se traduce como ¿ Cuantas seguridades necesitamos?.

Anteriormente tambien se menciono que para que una Pareto 80/20 alcance a una distribución gaussiana se necesita cerca de 10^9 observaciones, considerese que el riesgo de una cartera bajo tal distribución sería subestimado por lo menos en 8 órdenes de magnitudes si se usa uno de los criterios de portafolio modernos (*modern portfolio theory*). Si a esto se le suma el hecho de que no hay seguridad financiera que no sea de cola pesada, por el simple criterio de la curtosis, entonces se compica usar estadísticas bajo estos dominios.

Cambiar de un dominio de colas ligeras a uno de colas pesadas no es sencillo. Dentro del cisne negro tambien encontramos criticas a esto, los financieros y economistas logran entender que estos portafolios siguen una distribución de colas pesadas pero no logran ver y entender las consecuencias de esto, como por ejemplo las antes mencionadas como la lentitud de la ley de los grandes números, la falla de las medias muestrales o como los momentos probababílisticos altos no son informativos. Todo esto en su conjunto lleva a un análisis poco informativo en la industria de las inversiones.

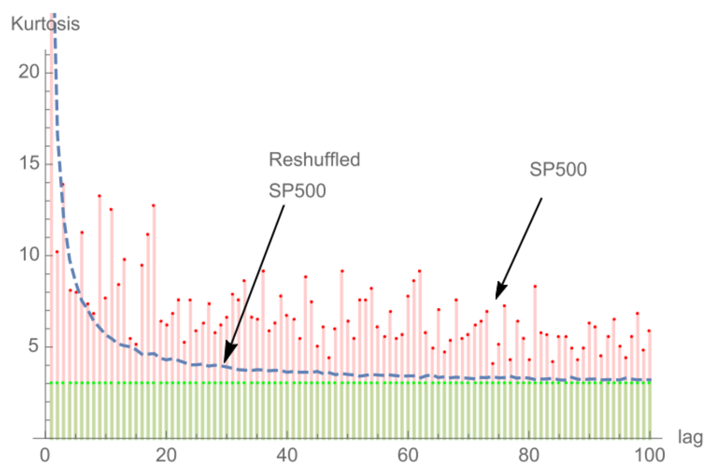


Figura 4.11: Diagnostico de convergencia visual para el SP_{500} para 17,000 observaciones [47].

En el supuesto que la curtosis existiera, terminaría por converger a una distribución gaussiana a medida que la ventana de tiempo se extendiese. Eso mismo planteo Taleb para analizar el SP_{500}, probando los cálculos de los rendimientos con retrasos en periodos de tiempo cada vez más largos y graficados en la figura 4.11. Si bien el cuarto momento no es convergente para los datos sin procesar, lo es para la serie reorganizada (*reshuffled*). Por lo tanto, podemos suponer que la "cola pesada" es atribuible a la estructura temporal de los datos, particularmente al agrupamiento de su volatilidad.

El resultado final es que en un mes la curtosis no es más baja que la curtosis diaria y a medida que se va agreagando más información no se observan bajas en la curtosis como se esperaría. Esto nos permite eliminar de forma segura numerosas clases o modelos, lo que incluye la volatilidad estocástica[5] en sus formulaciones simples, como la varianza gamma.

Taleb ya ha entrado en discusion con, Jack L. Trenor, uno de los fundadores de la teoría de portfolios y defensor de la misma pues el mismo argumento que la información a corto plazo si que puede ser de cola pesada pero a medida que se pasa a un largo plazo se convierte en gaussiana. Taleb contrargumento diciendo que no pues la razon de ello es que no se puede hablar de algo gaussiano si la curtosis es infinita, aun cuando los momentos probabilisticos bajos existan (el primero y el segundo). Para una $\alpha \sim 3$, el teorema del límite central opera muy despacio y requiere de una n del orden de 10^6 para convertirse en algo aceptable y esto claramente no es algo que se tenga en la historia de los mercados ejemplos de esto se pueden encontrar en [7], en donde se observa como la distribución de cambios de precios exhibe una cola de ley de potencia. La volatilidad de la mayoría de los activos muestra variaciones aleatorias en el tiempo, con una función de correlación que decae como una pequeña potencia del desfase temporal.

En resumen, un portafolio balanceado supera al SP_{500} en una amplia gama de métricas. Taleb tiene un capitulo entero analizando el SP_{500} En este capítulo se exploran los rendimientos del índice SP_{500} (que representa la mayor parte de la capitalización del mercado de valores de EE. UU.) y como están distribuidos segun la ley de potencias debido a esto mismo resulta en una falacia o en un error de razonamiento el tratar de modelarlos pues es irresponsable modelarlos si siguen dichas distribuciones.

> *Los métodos estándar como la Teoría Moderna del Portafolio o los verbalismos de "caída de la tasa base" (afirmaciones en la que las personas sobrestiman las probabilidades de eventos extremos) son totalmente falsas: estamos hablando de más de* 70, 000 *artículos y cohortes enteras de investigación, sin contar* 10^6 *artículos de economía en general con resultados en función de la "varianza" y la "correlación". Se debe vivir con el hecho de que estas métricas son falsas para cierto tipo de distribuciones [47].*

Consecuencia 9:
No existe tal cosa como una larga desviación típica

Condicionado a tener un movimiento "grande", la magnitud de dicho movimiento no es convergente, especialmente bajo las colas pesadas (específicamente la clase de colas de la Ley de potencia). Esto está asociado con el principio de catástrofe. En el mundo gaussiano, la expectativa de un movimiento, condicionado a que el movimiento supere las 4 desviaciones estándar, es de aproximadamente 4 desviaciones estándar. Para una

[5]Los modelos de volatilidad estocástica se utilizan para capturar la dinámica de la volatilidad en los mercados financieros, donde se supone que la volatilidad en sí misma es una variable aleatoria. La "varianza gamma" se menciona como una formulación simple de la volatilidad estocástica.

ley de potencia será un múltiplo de eso. Llamamos a esto la propiedad de Lindy.

Consecuencia 10:
El coeficiente de Gini deja de ser aditivo.

El coeficiente de Gini es una medida de desigualdad en una distribución. Es usado comunmente para cuantificar y comparar el alcance de la desigualdad de ingresos o riqueza en una población. Su rango se encuentra entre 0 y 1, en donde un 0 representa una equidad perfecta y 1 la máxima desigualdad. El coeficiente de Gini se usa ampliamente en las ciencias sociales, economía y otros campos para medir y analizar la distribución del ingreso, la desigualdad de la riqueza y diversas disparidades socioeconómicas. Proporciona una medida numérica concisa que permite realizar comparaciones entre diferentes países, regiones o períodos de tiempo para evaluar el nivel de desigualdad dentro de una población.

Los métodos de medición de datos muestrales para Gini son interpolativos, de hecho, tienen el mismo problema que se vio anteriormente con la media muestral que subestima o sobre estima la media real. Aquí surge una complejidad adicional debido a que el Gini se vuelve súper aditivo bajo colas pesadas. A medida que crece el espacio de muestreo, las medidas convencionales de Gini dan la ilusión de grandes concentraciones de riqueza. (En otras palabras, la desigualdad en un continente, digamos Europa, puede ser mayor que la desigualdad promedio ponderada de sus miembros). Lo mismo se aplica a otras medidas de concentración, como que el 1 % superior tiene el x por ciento de la riqueza total, etc.

La desigualdad en la riqueza representa un campo en la economía y la estadística que está expuesta a procesos de información de colas pesadas, a menudo con varianza infinita. La literatura alrededor de está metrica es muy extensa, sin embargo, no se ha puesto mucha atención a su comportamiento bajo colas pesadas. El método para obtener este estimador no es paramétrico, el índice se calcula a partir de la distribución empírica de los datos disponibles usando la ecuación 4.15.

Para una muestra $X_1, ..., X_n$ se define

$$G^{NP}(X_n) = \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} |X_i - X_j|}{(n-1) \sum_{i=1}^{n} X_i} \tag{4.15}$$

Este estimador sufre un sesgo a la baja cuando tratamos con observaciones de cola pesada. Afortunadamente Taleb propone una solución para esta problematica que aunque requiere de más procesamiento y es más lento soluciona de manera elocuente el problema usando métodos de maxima verosimilitud **??**.

Consecuencia 11:
La teoría de las grandes desviaciones deja de funcionar en colas pesadas.

La teoría de las grandes desviaciones se refiere al comportamiento asintótico de secuencias de distribuciones de probabilidad. La formalización comenzó con las matemáticas de seguros, es decir, la teoría de Cramér y Lundberg. Los métodos detrás del principio de desviaciones grandes son de gran ayuda para colas ligeras, y según Taleb, solamente ahí **??**.

La teoría de las grandes desviaciones se encarga de lidiar con las probabilidades de los eventos raros (o fluctuaciones) que son exponencialmente pequeños como función de algun parametro, como por ejemplo: el número de componentes aleatorios de un sistema, el tiempo durante el cual se observa un sistema estocástico, la amplitud del ruido que perturba un sistema dinámico o la temperatura de una reacción química.

En las distribuciones con colas pesada, como las distribuciones de ley de potencias o Pareto, los eventos extremos o los valores atípicos ocurren con más frecuencia de lo que se esperaría según la teoría tradicional de las grandes desviaciones. Estas distribuciones exhiben una tasa de disminución más lenta en las probabilidades de cola en comparación con la disminución exponencial, lo que las hace resistentes a las suposiciones y métodos de la teoría de las grandes desviaciónes.

Consecuencia 12:
Los riesgos de las opciones financieras nunca son mitigados por la cobertura dinámica.

Toda la base de la cobertura financiera detrás del modelo de Black-Scholes se basa en la posibilidad y necesidad de una cobertura dinámica. La disminución exponencial requerida de las desviaciones del centro requiere que la distribución de probabilidad esté fuera de la clase subexponencial. Nuevamente, estamos hablando de algo relacionado con la condición de Cramer: todo se reduce a ese momento exponencial.

Todos los profesionales del riesgo se han encontrado con el siguiente problema: ¿Cómo producir un parámetro de riesgo (una tasa de descuento de activos riesgosos), para que sea compatible con la teoría de portafolios?. El modelo de fijación de precios de activos de capital (*Capital Asset Pricing Model*) requiere que los valores tengan una tasa de rendimiento esperada en proporción a su riesgo. En el enfoque de Black-Scholes-Merton, el precio de una opción se deriva de la cobertura dinámica del tiempo continuo, y solo en las propiedades obtenidas de la cobertura dinámica de tiempo continuo. Gracias a este método, una opción colapsa en un pago determinista y proporciona rendimientos independientes del mercado; por lo tanto, no requiere ninguna prima de riesgo.

En resumen, Taleb está analizando el desafío de establecer un parámetro de riesgo o tasa de descuento en línea con la teoría de portafolios. El CAPM y el enfoque de Black-Scholes-Merton ofrecen diferentes perspectivas para abordar este desafío, y el último se basa en métodos de cobertura dinámicos para eliminar la necesidad de una prima de riesgo.

Consecuencia 13:
El pronóstico (*forecasting*) en el espacio de frecuencia difiere del pago esperado.

Otra consecuencia de no tener en cuenta las colas pesadas es en la que algunos pronosticadores (forecasters) se basarán en gran medida en datos empíricos. Los datos empíricos (datos conocidos y visibles) no logran predecir máximos futuros. Por ejemplo, es ingenuo construir un edificio utilizando el peor nivel de inundación del pasado como exposición máxima. *"Para las colas pesadas, la diferencia entre los máximos pasados y los máximos futuros esperados es mucho mayor que las colas ligeras"* [47].

Cuando Taleb menciona que pronosticar en el espacio de frecuencias difiere del pago esperado, se refiere a las limitaciones y discrepancias que surgen cuando se intenta predecir o pronosticar resultados basándose únicamente en consideraciones de frecuencia o probabilidad, sin considerar los pagos reales o las consecuencias asociadas con estos resultados.

En los modelos de pronóstico o predicción tradicionales, a menudo se enfoca en estimar la frecuencia o probabilidad de que ocurran eventos o resultados específicos. Este enfoque se basa en el análisis de datos históricos, patrones estadísticos y probabilidades para hacer predicciones sobre el futuro. Sin embargo, Taleb argumenta que tal pronóstico basado en la frecuencia puede ser inadecuado o engañoso cuando se trata de comprender el impacto total o las consecuencias de esos eventos.

Por lo tanto, Taleb sugiere que confiar únicamente en el pronóstico basado en la frecuencia sin considerar los beneficios esperados puede ser engañoso y puede no capturar los verdaderos riesgos e incertidumbres asociados con eventos raros e impactantes. Aboga por un enfoque más integral que integre tanto las consideraciones de probabilidad como los beneficios o consecuencias potenciales para obtener una comprensión más precisa del riesgo y la incertidumbre.

Consecuencia 14:
Los problemas de ruina son más agudos y se requiere ergodicidad bajo colas pesadas.

> *Suponga que 100 de nosotros, seleccionados al azar, vamos a un casino y jugamos. Si la persona número 28 se arruina, esto no tiene ningún impacto en el jugador número 29. Entonces, podemos calcular el rendimiento del casino utilizando la ley de los grandes números tomando los rendimientos de las 100 personas que apostaron. Si hacemos esto dos o tres veces, obtendremos una buena estimación de cuál es la "ventaja" del casino. El problema surge cuando la probabilidad de conjunto se nos aplica como individuos. No funciona porque si uno de nosotros va al casino y el día 28 se arruina, no hay día 29. Es por eso que Cramer demostró que el seguro no podría funcionar fuera de lo que llamó "la condición de Cramer", que excluye la posible ruina de choques individuales. Del mismo modo, ningún inversionista individual logrará el rendimiento alfa en el mercado porque ningún inversionista individual tiene bolsillos infinitos (o, como ha observado Ole Peters, está pasando su vida a través de universos paralelos ramificados). Solo podemos obtener el rendimiento en el*

mercado bajo condiciones estrictas [47].

La probabilidad del tiempo y la probabilidad de un conjunto no son lo mismo. En la probabilidad de un conjunto la ruina no afecta la ruina de otros, mientras que en la probabilidad del tiempo si.

Claro que pueden haber más consecuencias de las que encontramos en [47], pues es un hecho que no todas se han descubierto sin embargo estos son unos claros ejemplos del cuidado que se tiene que tener al manejar distribuciones de colas pesadas, tanto un sesgo cognitivo como una mala preparación o ignorancia en cuanto a la existencia de este tipo de distribuciones puede llegar a originar cisnes negros, se debe de tener cuidado en el modelo elegido y en donde se aplicará ya que, como se vio, las distribuciones de cola pesada aplicadas en lugares erroneos pueden ocasionar dificultades e inclusive errores catastróficos.

Ahora pasaremos a el análisis del libro “El Cisne Negro”, en donde no se aborda tanto la parte matemática, pero si otras cuestiones que son de importancia para entender mejor el trabajo de Taleb y sobre todo para la parte de la divulgación de la actuaría a partir de este tema. El análisis del libro en cuestión es uno en el cual se analizan las partes más importantes que contiene el libro y uno en donde se resaltan conceptos clave como el trabajo de Taleb, el origen del término cisne negro, las regiones de Mediocristán y Extremistán, los cisnes grises entre otras cuestiones de importancia que ayudarán facilitando la comprensión del mensaje que Taleb quiere comunicar al mundo, todo esto unido claro a la parte actuarial.

5 Análisis del libro "El Cisne Negro"

En este capítulo se tratará y se verá como aborda Taleb las distribuciones de cola pesada para que el público general las entienda y este al tanto de sus caracterizticas y fallas, se ven puntos inclusive filosóficos que no se trataran mucho aquí pero solo se mencionan para mostrar el proceso cognitivo que se llevo en la escritura de este libro. En el libro el cisne negro encontramos una narración elocuente a la vez que una simplificación de las matemáticas, pero es a propósito para que la mayoría de las personas entiendan en trasfondo y contexto de los cisnes negros. Las consecuencias estadísticas vistas anteriormente dejan ver claramente que la actuaría es un área que se encarga de la problemática de las colas pesadas, toda la matemática detrás de Technical Incerto [47] son areas de conocimiento de los actuarios y los responsables de ver que se efectuen correctamente son de la misma forma ellos. Por lo tanto es importante divulgar el peligro o las consecuencias que pueden surgir de emplear colas pesadas en conjunto con la problemática del cisne negro, la divulgación de la actuaría en unión con este problema es un buen inicio para informar acerca de esto.

5.1. El plumaje del ave

Se empezará por decir que "El Cisne Negro: El impacto de lo altamente improbable", escrito por Nassim Nicholas Taleb, es un libro de los cinco que tiene publicados de la serie INCERTO (*del latin incierto o incertidumbre*) donde se abordan cuestiones filosóficas, epistemológicas y matemáticas cuyos principales objetivos giran alrededor de la incertidumbre, lo aleatorio y lo altamente improbable.

No hay duda de que Taleb ha desarrollado una teoría sólida y bien consolidada que junto con sus colegas inclusive clasifica dentro de 4 ramas principales, siendo estas: las matemáticas (rama de principal interés para este trabajo), filosofía, ciencias sociales y teoría legal, con una rama extra que clasifican como la del mundo real.

Aparte de los 5 libros de la serie INCERTO existen otros 2 que necesitan clasificarse aparte, esto es porque Taleb los clasifica como técnicos en el sentido que desarrollan profundamente las bases matemáticas de su teoría, el primero de ellos siendo *"The Technical Incerto, Vol 1 The Statistical Consequences of Fat Tails"* del cual se expuso bastante en el capítulo anterior dejando ver las consecuencias de las colas pesadas y el segundo en proceso de realización *"The Technical Incerto, Vol 2 Convexity, Risk,* *and Fragility”*, esto no quiere decir que en los otros cinco no se hable de matemáticas, sin embargo el rigor matemático no se compara con estás dos entregas de Technical Incerto, en donde se hace uso de la teoría de la probabilidad, la estadística, teoría del riesgo y demás herramientas matemáticas complejas para un lector sin preparación matemática.

Por último, pero no menos importante Taleb cuenta a la fecha con 9 *papers* publicados con distintos temas desde finanzas, teoría del riesgo, finanzas cuantitativas, colas pesadas entre otros temas.

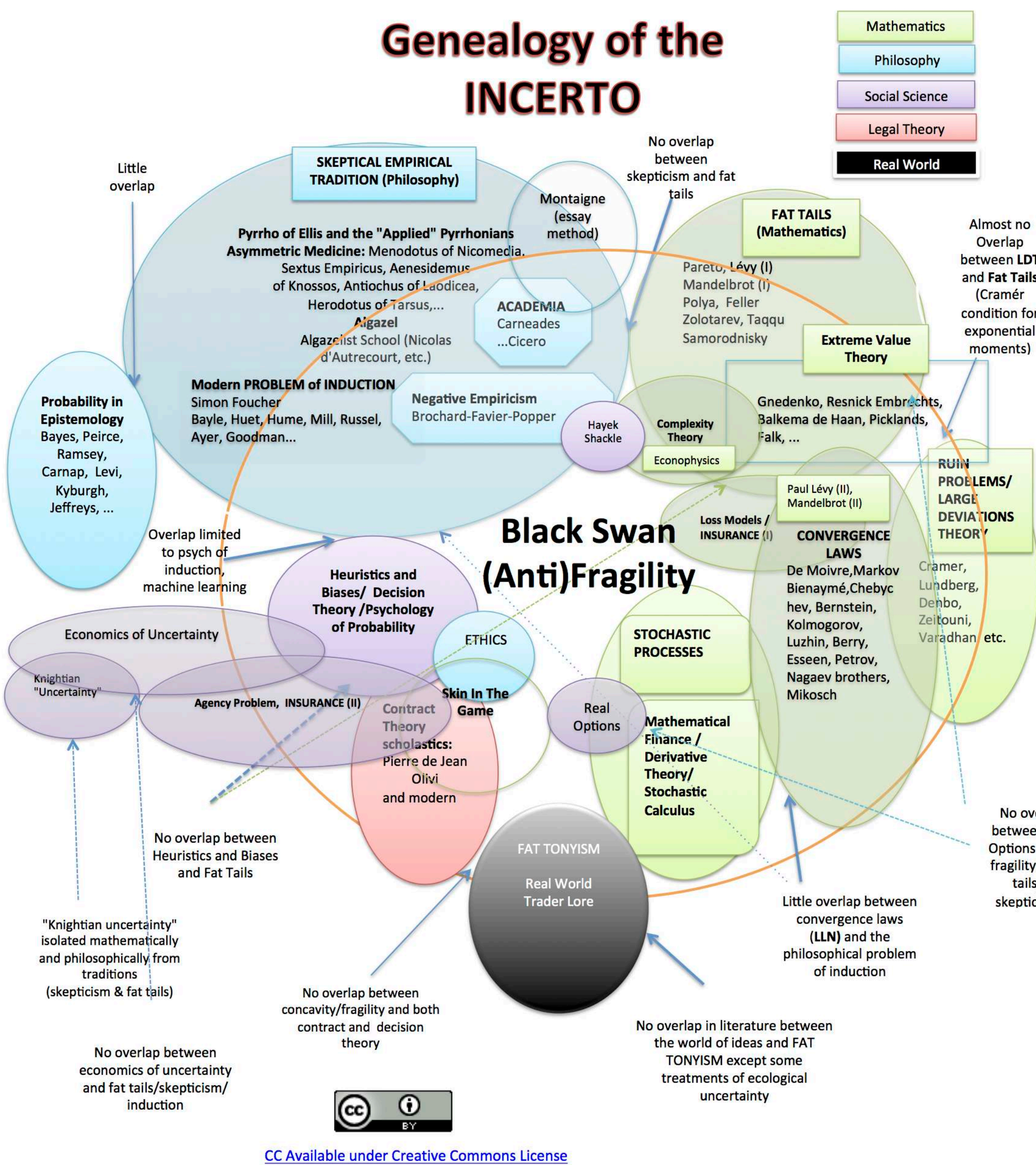


Figura 5.1: Recopilación visual de las ideas principales de toda la investigación hecha por Taleb y sus colaboradores [32].

La imagen 5.1 resume muy bien el trabajo hecho por Taleb y del cual podemos rescatar puntos importantes para los actuarios, sobre todo en la parte matemática donde podemos apreciar a las colas pesadas, la teoría de valores extremos, teoría de la complejidad, modelos de perdida (refiriéndose a los seguros), teoría de la complejidad, procesos estocásticos, matemáticas financieras, calculo estocástico, derivados, problemas de ruina, teoría de las grandes desviaciones y leyes de convergencia. Estos temas son mencionados en los libros de *"INCERTO"*, cada libro entonces tiene su particularidad y propósito donde el autor explica una problemática o varias y las desarrolla para explicar posibles soluciones.

La razón por la cual se eligió El Cisne Negro de entre los cinco libros publicados por Taleb es porque se considera que es el que más aplicaciones tiene dentro de la matemática y el que guarda mayores conexiones entre artículos y teoría matemática, a la misma vez, es un texto completo sobre el cual se rescatan grandes enseñanzas y sobre todo el valor que se tiene al percatarse de los errores para después corregirlos y andarse con cuidado en dominios sobre los cuales es peligroso usar ciertos modelos matemáticos, esto lo hace un libro sobre el cual se puede exponer y divulgar. También no se deja de lado que es uno de los libros que expone una problemática interesante acerca de las decisiones que toman los profesionistas que miden el riesgo llámense actuarios. Todos estos problemas ya fueron mencionados en el capítulo anterior y son las consecuencias de usar modelos cuyas propiedades se han pasado por alto o no se han descubierto, hablando de las colas pesadas.

El Cisne Negro más allá de ser un libro formal, el propio autor lo describe como un diario en donde plasma una de sus ideas más importantes, la teoría del cisne negro, a través de vivencias, anécdotas y la explicación de cómo funcionan los cisnes negros, Taleb conduce al lector y expone problemáticas tanto matemáticas como filosóficas y epistemológicas, el mismo explica en su libro que se considera como una persona escepticista. El Cisne Negro junto con (Anti)Fragility pueden ser consideradas las dos obras más importantes de Taleb, esto lo podemos comprobar al ver la imagen superior y ver como estas obras abarcan casi en su completitud el mapa 5.1, en dónde se puede puede ver como estás dos obras tienen una carga matemática significativa además de hablar de temas folosóficos como le gusta al autor.

5.2. El Cisne Negro

¿Qué es un cisne negro?, esta respuesta es contestada desde los primeros párrafos del libro en donde el autor nos dice lo siguiente:

> *Antes del descubrimiento de Australia, las personas en el viejo mundo estaban convencidas de que todos los cisnes eran blancos, una creencia incuestionable, ya que parecía completamente confirmada por la evidencia empírica. El avistamiento del primer cisne negro podría haber sido una sorpresa interesante para algunos ornitólogos (y otros extremadamen-*

> *te preocupados por el colorido de las aves), pero no es ahí donde radica la importancia de la historia. Esto ilustra una grave limitación a nuestro aprendizaje a partir de las observaciones o la experiencia y la fragilidad de nuestro conocimiento. Una sola observación puede invalidar una declaración general derivada de milenios de avistamientos confirmatorios de millones de cisnes blancos. Todo lo que necesitas es un solo pájaro negro (y, según me han dicho, bastante feo)* [46].

Así es como empieza la historia del cisne negro, una historia en la cual es importante hacer mención de lo delicado que es nuestro conocimiento. Para un matemático el conocer desde los primeros instantes de su preparación las demostraciones matemáticas fundamentadas en la lógica es importante, es por esto que debe de sonar familiar el percatarse que al decir que *todos los cisnes son blancos*, estamos demostrando por contraejemplo que al haber tan solo un cisne negro entonces no todos los cisnes son blancos. Una pequeña curiosidad que se deja desenmascarar para los lectores matemáticos, ya que en las demostraciones por contraejemplo tan solo se necesita dejar ver que no se cumple para un caso, en este caso al haber tan solo un cisne negro se puede decir que no todos los cisnes son blancos.

En cuanto a la estructura del libro, en el capítulo anterior se vio la carga matemática que hay detrás de este, por su parte, en este capítulo se están viendo las ideas principales, pero también resultará interesante ver cómo estás dos ideas se relacionan en ejemplos aplicados, es decir, como se aplica la teoría del cisne negro al mundo real, esto se verá en el próximo capítulo ya que se volverán a tratar con cuestiones matemáticas y se relacionarán ambas (la teoría y la práctica). Se empieza viendo una de las primeras ideas del libro, como un suceso altamente improbable al que llamamos un cisne negro depende del espectador, para ello vease el siguiente ejemplo.

Imaginemos la existencia de un pollo o un pavo y que estadísticamente éste cuenta los días, algunos de sus amigos son enviados a un lugar del que nunca vuelven (el matadero). Sin embargo, este animal sigue estando vivo al pasar del tiempo y con buena comida. 1000 días de evidencia estadística después, el pavo pensó que quizá el granjero lo quería más que a los demás. Hasta que el día de acción de gracias llega y en el día 1001 acaba la vida del pavo. Si se cuantifica la confianza del pavo mediante una gráfica veremos como cada día de los mil días esta confianza iba creciendo, hasta que en el mil undécimo día se vería una caída abrupta. El pavo nunca creyó acabar así, desde su punto de vista y sin conocer más allá de lo que un pavo pueda conocer este suceso para él fue un cisne negro.

Este problema también es conocido como el problema de la inducción o el problema de Hume en honor al filósofo que lo postuló y es precisamente un problema que expone las dificultades de los razonamientos inductivos de los cuales no se puede estar cien por ciento seguro que un suceso del pasado determinará lo que pase a futuro. Así mismo este problema es adoptado por Taleb, donde le brinda este enfoque dejando el ejemplo del pavo. El cisne negro por su parte no es un problema creado por Taleb pero si uno que este adoptó y moldeo a su idea, la personalidad de Taleb se plasma en la idea y el animal que el escogió, un cisne negro, además de adecuarse perfectamente

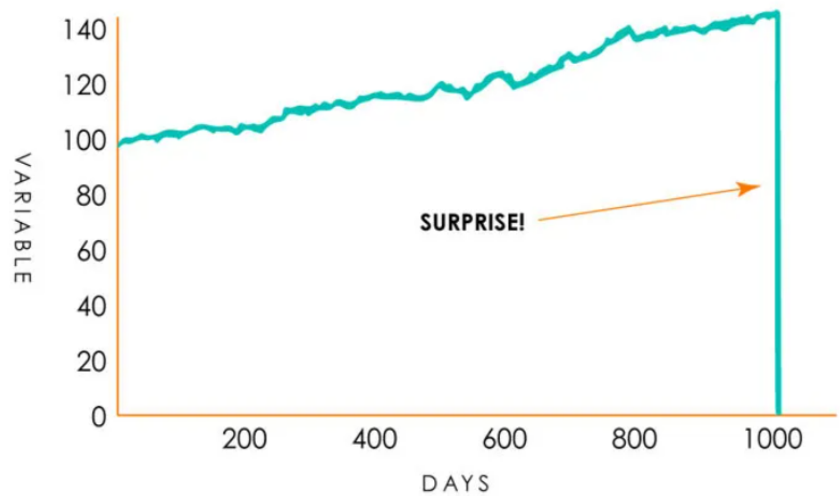


Figura 5.2: Un pavo antes y después del día de Acción de Gracias. La historia de un proceso a lo largo de mil días no dice nada sobre lo que va a ocurrir a futuro. Esta proyección del futuro a partir del pasado puede aplicarse a cualquier cosa [46].

a su teoría, la que el nombraría como la teoría del cisne negro la cual dice que *dada una generalización o presunción sobre cualesquiera eventos futuros, ¿Cómo podemos saber que no se encontrarán cisnes negros, es decir, sucesos aparentemente imposibles o improbables que demuestran erróneas nuestras proposiciones o hipótesis?*. Un cisne negro entonces nos permite estudiar lo altamente improbable, quizá esto se le atribuya a sucesos negativos, no obstante, un cisne negro también puede ser un suceso positivo.

Para Nassim Taleb el mundo es uno gobernado por los cisnes negros ejemplos como el ataque terrorista del 11 de septiembre de 2001, las dos guerras mundiales, la caída del muro de Berlín, la creación del internet, la caída de la bolsa de valores de 1987, el éxito de Google o la crisis financiera del 2008 son algunos de ellos. La teoría del cisne negro creada por Taleb brinda un panorama para examinar estos sucesos poco predecibles identificándolos en 3 puntos importantes [46].

- Rareza: Los cisnes negros son valores atípicos (outliers) afuera de los valores más extremos de predicción, además de ser eventos no razonables de suceder con evidencia de eventos pasados.
- Impacto Extremo: Tienen un gran impacto en la sociedad y el mundo.
- Retrospectiva: A pesar de ser impredecibles nosotros como humanos siempre tratamos de explicarlos como si fueran perfectamente entendidos, como sucedieron y por qué sucedieron, así como las circunstancias que los originaron, pero todo esto es un error.

Es por esto por lo que para Nassim Taleb los cisnes negros abarcan casi todo lo que pasa en nuestro mundo partiendo desde la creación de una religión hasta los eventos personales que llegasen a ocurrir en la vida personal de cada individuo. De los anteriores tres puntos el tercero es uno de los que nos llama la atención puesto que a estos sucesos siempre se les intenta de dar una explicación. ¿Porqué no se tiene conciencia del fenómeno que son los cisnes negros?, es decir, no se sabe de ellos hasta que ocurren. Una respuesta dada por Taleb es que nos enfocamos mucho aprendiendo especialidades o cosas en específico en lugar de voltear a ver las generalidades. Lo sabido y aprendido es explotado, pero como sociedad fallamos en ver lo que aún no hemos aprendido, por ejemplo se sabe que las crisis financieras tarde o temprano ocurrirán en algún momento y no es hasta que suceden que se les da una explicación, no se intenta ver desde antes posibles causas y no se comienza a cuestionar si el sistema económico favorece la aparición de estas crisis, es algo mucho más complejo, tanto que nuevamente *fallamos en ver que aún no se ha aprendido*.

Claro que es más fácil el decir que hacer por lo que esto es una problemática tan grande y tan arraigada en la sociedad que el propio problema se lleva a terrenos matemáticos y filosóficos. Taleb ha tratado de buscar estas respuestas estudiando cómo las personas se engañan a sí mismas diciendo que saben más de lo que en realidad saben. Restringimos nuestro pensamiento en cosas irrelevantes e inconsecuentes, mientras que sucesos de gran impacto nos siguen sobre pasando y moldeando nuestro mundo. Es así como Taleb explica todo lo que sabemos acerca de lo que no sabemos, cómo se verá a continuación.

5.2.1. Expertos en trajes vacios

La habilidad de no poder predecir valores atípicos o outliers implica la incapacidad de predecir el curso de la historia.

Como se dijo anteriormente, como seres racionales para Taleb seguimos actuando como si pudiéramos predecir sucesos históricos importantes y peor aún como si pudiéramos cambiar el curso de la historia. Tómese como ejemplo las proyecciones de seguridad social a 30 años, a pesar de que estas son realizadas a tales periodos de tiempo no se tiene como tal el comportamiento de estas al próximo verano. Taleb dice que la magnitud en los errores de predicción no es lo que preocupa sino la ausencia de conciencia sobre lo delicados que son ciertos modelos y sus errores [46].

Esto lleva a otra gran problemática, la falta de habilidad de predecir cisnes negros en sus propios dominios junto con una falta de conciencia general lleva a ciertos profesionales a creerse expertos en ciertos temas de esta índole (matemática) cuando en realidad no lo son, es más, estos profesionales basándose en su experiencia empírica, no saben más de su campo de conocimiento que la población en general, pero son mejores narradores o peor aún mejores mareando con complicados modelos matemáticos. Estos personajes también es muy probable que usen corbata [46], es decir, puede que se encuentren en puestos laborales importantes o que ejecuten acciones de alta fragilidad en tareas delicadas donde un falló pueda ser devastador y por ende se necesite un conocimiento amplio del tema.

El anterior párrafo debe dejar al lector boquiabierto pues no es para menos, es una revelación y realidad encontrarse con faltas a la moral y malas decisiones dentro de las empresas, la falta de ética no es algo nuevo en el mundo profesional y cualquier país puede tener dificultades con esto. Taleb nos habla de estos personajes desde su experiencia e investigación y teniendo en cuenta que en la actualidad tiene una nacionalidad estadounidense, esto significa que esta problemática deja expuesta inclusive a la primer potencia mundial a día de hoy, más adelante se verán ejemplos de esto pero por ahora podemos recalcar el de la crisis financiera del 2008 que precisamente fue un cisne negro visto por muy pocos y donde estos profesionales de las finanzas y la economía tuvieron mucho que ver.

¿Es que acaso que todas las medidas que conocemos no son bastantes para combatir a los cisnes negros?. Debido a la naturaleza impredecible de los cisnes negros, hay que ajustarse a su existencia en vez de tratar de predecirlos pobremente. Es muy difícil pero gratificante el enfocar los estudios en el conocimiento que no se tiene, en lo que se desconoce. Y se pueden sacar mayores descubrimientos y provecho de enfocarse en lo no conocido, por lo mismo es más difícil claramente.

Dejando un poco de lado la falta de profesionalidad, recuérdese que no todos los cisnes negros son negativos, existen cisnes negros positivos, tómese el hecho de que en algunos dominios como el descubrimiento científico y las inversiones de capital de riesgo podemos encontrar a estos cisnes. El explorar lo desconocido se vuelve a decir nuevamente es difícil, pero puede traer recompensas y un beneficio desproporcionado, esto porque usualmente se tiene muy poco que perder y mucho que ganar con un evento raro. Contrariamente a la sabiduría que tienen las ciencias sociales, casi ningún descubrimiento o tecnología vino del diseño y planeación, simplemente fueron cisnes negros, como ejemplo práctico véase el descubrimiento de los rayos-x, descubiertos por Wilhelm Röntgen en 1895 totalmente por casualidad y apodados rayos-x porque no se sabía que eran, solo que eran generados por rayos catódicos al chocar con ciertos materiales.

Figura 5.3: Ilustración de Wilhelm Röntgen descubriendo los rayos-x.

5.2.2. Aprendiendo a aprender

Una limitante humana proviene del enfoque excesivo hacia lo que ya sabemos, se quiere aprender lo preciso y no lo general. Cuando sucedió el ataque terrorista catalogado como 9/11, se aprendieron muchísimas cosas, pero no se aprendió que algunos sucesos se encuentran afuera de cualquier campo de predicción. No se puede espontáneamente aprender que no se aprende lo que no se aprende. Para Taleb la mente está limitada, no se aprenden reglas, se aprenden hechos y enfocándose en el campo de las matemáticas lo abstracto a la mayoría le genera desprecio por la complejidad que posee. En la búsqueda de estas preguntas tan complicadas surgen otras mucho más complicadas como la que se plantea Taleb. Si no se aprende que no sabemos muchas cosas y que lo abstracto es muy difícil entonces ¿Para que están hechas nuestras mentes?. Por la manera en la que se comporta la sociedad y como aprende de los errores del pasado, pareciera no haber mejoras a partir de las vivencias anteriores, pareciera que no se piensa y que no se lleva a cabo una introspección.

5.2.3. Mediocristan & Extremistan

En el capítulo 4, donde se habló de las consecuencias estadísticas de las colas pesadas, se vio como Mediocristán representa matemáticamente a las colas ligeras, aquellas cuyas propiedades son entendibles y se adaptan muy bien a un buen manejo. En Extremistán se vio como las distribuciones de colas pesadas poseen particularidades matemáticas y estadísticas significativas que moldean de una forma compleja el uso de estas herramientas y que si no se tiene cuidado al emplear estas de una forma correcta entonces se puede caer en errores importantes y específicos. Ahora se verá como trata Taleb estas distribuciones para que un público general pueda entenderlo.

Mediocristán y Extremistán son dos conceptos altamente manejados en todo el libro. La distinción entre lo escalable y lo no escalable permite hacer clara una diferenciación entre dos variedades de incertidumbre o bien, dos tipos de aleatoriedad, esto para un matemático puede resultar obvio, no obstante, el cisne negro es un libro también enfocado en el público en general, es por ello que Taleb brinda metáforas o ejemplos para entender estos conceptos.

El primer ejemplo y experimento es asumir estar alrededor de mil personas diferentes aleatoriamente seleccionadas de la población en general y tenerlas una a lado de otra en un estadio. Ahora imagínense a la persona más pesada que se pueda pensar y proceda a añadirla a esta muestra. Asumiendo que pese hasta tres veces más que el promedio, entre 180 y 227 kilos, raramente esta persona representará más que una fracción muy pequeña del peso de la población total (en este caso, alrededor de la mitad de un por ciento). Inclusive se pueden tomar hipótesis más extremas como por ejemplo imaginar al organismo humano biológicamente posible y más pesado en el mundo, aun este no representará dígase por ejemplo más del 0.6 por ciento del total, comparado al ejemplo anterior un incremento poco significativo.

Nassim Taleb define este dominio como Mediocristán, uno donde los eventos particulares y poco comunes no contribuyen mucho individualmente, únicamente grupal o colectivamente. Taleb define esto como *cuando la muestra es muy grande, ninguna instancia individual cambiará significativamente el agregado del total* [46]. Es por esto por lo que la observación más grande permanece impresionante, pero eventualmente insignificante a la suma. Otro ejemplo es la ingesta de calorías en un año, el total de calorías en un año no se comparará con el total de calorías en una cena de navidad.

En extremistán las cosas son diferentes y más caóticas. Considérese por comparación las ganancias o el valor neto de las mil personas que formamos en el estadio y procédase a añadirles a la persona más rica del mundo dígase Elon Musk o Bill Gates, quizá la riqueza de estos ronde los 128 billones mientras que el capital total de los otros mil juntos cerca del millón. La persona rica que se elija representará el 99.99 % del capital total y los demás no representarían más que un error de redondeo de su patrimonio neto o la variación de su cartera personal en el último segundo [46].

Este fenómeno se puede ver reflejado en otras instancias como, por ejemplo, las ventas de libros que llegan a ser un éxito, si se toman a mil escritores cuyos trabajos ya han sido publicados y vemos las ventas totales de sus libros, se encontrará que no son competencia para el autor más famoso tómese por ejemplo a J.K. Rowling la autora de Harry Potter con millones de copias vendidas en comparación con los otros autores que llegarán a juntar máximo cien mil copias entre los mil. Taleb nos dice que *en extremistán, las desigualdades son tales que una simple observación puede impactar desproporcionadamente al agregado o el total* [46].

Mientras que se tienen asuntos como el peso, la estatura o el consumo de calorías provenientes de mediocristán, la riqueza es de extremistán así como casi todas las problemáticas sociales. Mientras la globalización fue llegando y nuevas tecnologías fueron inventadas, el mundo paso de vivir de mediocristán a extremistán y ser más complejo, añádase a esto la problemática del cisne negro, extremistán puede producir cisnes negros y así lo hace, ya que unos pocos sucesos han tenido enormes influencias en la historia. Esta es la idea principal del cisne negro.

5.3. La actuaría & el cisne negro

Se ha llegado a un punto de análisis en donde se cuenta con varios elementos, por un lado se tienen todas las matemáticas vistas en el capítulo anterior y por otro se tiene el análisis del cisne negro en este. Con todas estas herramientas es hora de demostrar la simbiosis entre el cisne negro y la actuaría. El cisne negro por una parte criticando el uso de estadísticas, específicamente las distribuciones de colas pesadas, además de dar ejemplos de las consecuencias de usar estas sin una previa investigación o entendimiento de sus propiedades y por otro lado, los actuarios cuyo mundo gira entorno a la matemática y muy en particular en la estadística, claro que se ha visto que la actuaría engloba una riqueza de instrumentos tanto matemáticos como de progrmación o administración. El punto es que un cisne negro tiene todo que ver con la actuaría, por ejemplo, en el ambito de los seguros se debe de tener en cuenta el principio de catástrofe y el principio de conspiración, si un actuario no establece límites de cobertura en el contrato donde pueda llegar a ocurrir un riesgo de catástrofe entonces se tiene un riesgo mayor de perdidas, al establecer estos límites se esta cuidando a la compañia. O por dar otro ejemplo, un actuario debe de estar conciente que al realizar una regresion lineal bajo variables aleatorias que son de colas pesadas puede existir un riesgo de que el modelo se equivoque, no porque este mal, sino que se vio que bajo colas pesadas se necesita más información para que funcione.

En el ambito de las finanzas y la economía en la cual también los actuarios poseen participaciones sumamente importantes, se vio como cerca de 40,000 seguridades son de cola pesada, a partir de esto Taleb menciona que esta es una de las razones principales de los fallos en economía y finanzas. ¿Acaso todos aquellos economistas, financieros y actuarios tienen en cuenta esta última consideración?. Claro esta que cambiar completamente el sistema financiero es un sueño y muchísimo menos el sistema económico. Taleb sabe de esto y es por lo que informa acerca del uso de estas herramientas y las consecuencias que hay a lado de ellas.

También tómese la consecuencia estadística en la cual algunos momentos probabilísticos fallan, es decir por ejemplo la media y la desviación estandar. A parte de esto inclusive hay evidencia de profesionales equivocándose y no sabiendo la diferencia entre desviación estandar y desviación absoluta media.

La diferencia entre la desviación estandar (asumiendo una media y mediana de 0 para simplificar) $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2}$ y desviación absoluta media $MAD = \frac{1}{n}\sum |x_i|$ incrementa bajo colas pesadas.

Todas estas consideraciones y consecuencias son planteadas como dualidades, extremistán y mediocristán, colas pesadas y colas ligeras, el principio de catástrofe y el de conspiración.

Veamos lo que Taleb describe como Platonicidad, para esto resulta conveniente mirar lo que dice Gale Rusell en su resumen [15], donde concatena muy bien las ideas principales pasando de Mediocristán y Extremistán hasta la curva Gaussiana, Taleb dice lo siguiente:

> *Lo que llamo platonicidad, siguiendo las ideas (y la personalidad) de Platón, es nuestra tendencia a confundir el mapa con el territorio, a centrarnos en “formas” puras y bien definidas, sean objetos, como los triángulos, o ideas sociales, como las utopías (sociedades construidas conforme a algún proyecto de lo que tiene sentido), y hasta nacionalidades. Cuando estas ideas y nítidos constructos habitan en nuestra mente, les damos prioridad sobre otros objetos menos elegantes, aquellos que tienen estructuras más confusas y menos tratables (una idea que iré desarrollando a lo largo de este libro)* [46].

Lo que el autor quiere decir con el párrafo anterior es que se tiene una limitante a la existencia en Extremistán, posteriormente Taleb define:

> *La platonicidad es lo que nos hace pensar que entendemos más de lo que en realidad entendemos* [46].

Y posteriormente Taleb une este concepto con Mediocristán y Extremistán diciendo que este velo Platónico es como una puerta entre estos dos, en donde los modelos estadísticos que se adecuan a los comportamientos de Mediocristán no deben reposicionarse o recolocarse en Extremistán. Como ejemplo Taleb brinda el de la curva Gaussiana (también conocida como campana de Gauss o distribución normal), el autor le atribuye este objeto a Mediocristán y dice que está al pasar por la puerta hacia Extremistan no solo es poco eficiente si no también altamente susceptible a un gran riesgo [15].

Para dar evidencia y razonamiento de esto en contra de la aplicación de la curva de gauss a eventos en Extremistán, Taleb empieza un viaje con el lector a través de muchas falacias lógicas como el error de confirmación, "la tendencia a mirar a que confirma nuestra conocimiento, no nuestra ignorancia", la falacia narrativa, "cómo nos engañamos a nosotros mismos con historias y anécdotas", el problema de la evidencia silenciosa, "los trucos que usa la historia para esconder a los cisnes negros de nosotros", la falacia del viaje de ida y vuelta, "la confusión de la ausencia de evidencia ... por evidencia de ausencia", y por último la falacia lúdica o incertidumbre del nerd[1], la manifestación de la falacia Platónica en el estudio de la incertidumbre. Como se puede ver El Cisne Negro es un viaje lógico y matemático de la supuesta incertidumbre razonable a la incertidumbre volátil y destructiva, en la que la filosofía tiene bastante espacio en el libro para explicar los sesgos cognitivos mediante estas falacias o ejemplos.

El Cisne Negro a diferencia de los artículos publicados por el autor y la investigación de este mismo, no muestra bastante carga matemática, no obstante, se puede sacar el mayor provecho de los conceptos clave que se mencionan, esto mismo lo realiza Alan Mills en su artículo traducido al español: ¿Deberían los actuarios conseguir otro trabajo? [27], en donde pasa a analizar cuestiones importantes de la teoría de Taleb y de su libro. Para empezar, se tiene que decir que Taleb deja su postura muy marcada hacía los *forecasters*[2] desde los primeros capítulos de su libro, viéndolos como algo negativo, mentirosos y poco inteligentes son otras palabras con las que los describe. Antes de continuar, es importante señalar que una parte del trabajo de un actuario involucra el forecasting [27], Taleb enfoca sus esfuerzos en el sector financiero y no precisamente en el sector asegurador o de pensiones, pese a esto Taleb si menciona a los actuarios en su libro titulado Fooled By Randomness donde se cita:

> *los fondos de pensión y las compañías de seguros en los Estados Unidos y en Europa de alguna manera compraron el argumento de que a largo plazo las acciones siempre rinden un 9 % y lo respaldan con estadísticas.* [44].

[1]Nerd: Una persona que es extremadamente entusiasta y conocedora de un tema en particular.
[2]Persona que predice o estima un evento futuro o tendencia.

Claramente los actuarios no son las personas favoritas de Taleb. Las ideas de Taleb son complejas y con muchas capas, aunque su forma de escribir es entretenida también hay que recalcar que Taleb es un investigador, un profesor analista de riesgos (Risk Analysis) y un retirado trader[3] especializado en derivados, por lo que, mencionado lo anterior, si tiene una idea en lo que al riesgo de tomar inversiones se refiere y claro, conocimiento matemático para juzgar y analizar la profesión actuarial.

Taleb dice específicamente que los pronósticos son delicados o defectuosos cuando se llevan a cabo en el cuarto cuadrante, se refiere con esto a su división de decisiones de acuerdo con cuatro cuadrantes:

	I Pagos Simples	II Pagos Complejos
A Mediocristán	Primer Cuadrante Extremadamente Seguro	Segundo Cuadrante (Algo) Seguro
B Extremistán	Tercer Cuadrante Seguro	Cuarto Cuadrante Dominio de Cisnes Negros

Tabla 5.1: Los cuatro cuadrantes [46].

Siendo el primer cuadrante el más seguro de todos y donde habitan los pagos de opción binaria y donde el forecasting es seguro, los modelos se adecuan a la perfección, no obstante, estos sucesos son más comunes en laboratorios y juegos que en la vida real. Raramente observamos estos resultados en desiciones económicas. Ejemplos de este cuadrante son las desiciones medicas, apuestas en casinos y prediciones de mercado (en el sentido que debe de subir o bajar).

El Segundo cuadrante es donde los pagos complejos habitan, los métodos estadísticos pueden funcionar adecuadamente y hay presencia de riesgo. Las colas ligeras viven aquí. Aunque el uso de modelos es difícil se pueden abordar y buscar soluciones.

En el tercer cuadrante se ven las desiciones simples pertenecientes a Extremistan, existe un pequeño peligro en equivocarse, pero la posibilidad de eventos extremos no impactaría con los pagos o repercusiones.

Por último, el cuarto cuadrante, los pagos complejos en extemistan, aquí es donde los problemas residen y las oportunidades están presentes. Taleb sugiere evadir las predicciones a pagos futuros, aunque no necesariamente los ordinarios. Los pagos de las partes remotas de la distribución[4] son más difíciles de predecir que las de las partes más cercanas.

En los primeros tres cuadrantes uno puede usar el mejor modelo que se pueda encontra. Sin embargo, esto es peligroso en el cuarto cuadrante, ninguno modelo parece ser mejor que cualquier modelo.

[3]Una persona que compra y vende bienes, divisas o acciones.

[4]Refiriéndose a las distribuciones de probabilidad asociadas a lo que se trate de estimar, pagos, inversiones, pronósticos.

Lo que Taleb recomienda es tratar de moverse del cuarto cuadrante al tercero, no es posible cambiar la distribución, pero es posible cambiar la exposición al riesgo. Esto se ve reflejado analizando los pagos, los pagos simples son de naturaleza binaria, verdadero o falso, por ejemplo, en el censo de una población sólo importa el estado de una persona, viva o muerta. Los pagos o retribuciones simples solo dependen del momento cero, el evento de probabilidad. Para los pagos o retribuciones complejas la frecuencia y la magnitud importan. El trabajo de un actuario usualmente soporta decisiones con pagos complejos, tales decisiones son por ejemplo las que conllevan gastos médicos, seguros de vida, reclamos de propiedad y accidentes, y pagos de pensiones [27] [46].

Todo lo que se ha realizado en el cisne negro es actuaría, tanto los modelos que se han visto o usado son herramientas que usan los actuarios ya sea como investigación o para realizar su trabajo, la interdisciplina de los actuarios tambien se encuentra en el campo de las colas pesadas.

Esto ya parece extrapolarse a lo que matemáticamente incumbe a los actuarios y matemáticos y es correcto, para saber de dónde surge la idea de clasificar la toma de decisiones de acuerdo con cuatro cuadrantes tenemos que voltear a ver la inspiración de Nassim Taleb, en este capítulo en párrafos anteriores se mencionó a David Freedman, pero también tenemos al que probablemente sea la mayor inspiración del autor, Benoit Mandelbrot.

5.3.1. La inspiración de Taleb

Benoit Mandelbrot (20 de noviembre 1924 - 14 de octubre 2010) matemático polaco nacionalizado francés y estadounidense conocido universalmente como el padre de los fractales. Los fractales han sido empleados en describir comportamientos diversos en economía, finanzas, la bolsa de valores, astronomía y ciencia computacional. En su libro más exitoso *The Fractal Geometry of Nature* y en diversos artículos, el trabajo de Mandelbrot convive con un mezcla de conjeturas y observaciones, ambas en un proceso matemático y su ocurrencia en la naturaleza y economía [14].

La inspiración de Benoit Mandelbrot a lo largo de todo el libro de El Cisne Negro es muy presente y esto se puede apreciar desde los inicios del libro dónde Taleb mismo le dedica este libro a su persona. Es del trabajo de Mandelbrot de donde surgen los cuatro cuadrantes que pasarían a ser adoptados por Taleb. Mandelbrot en su investigación dividía a las distribuciones de probabilidad en dos tipos, Tipo I y Tipo II (llamadas por Mandelbrot azar leve y azar salvaje), particularmente esta clasificación surgió en su libro titulado *The (mis)behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward* [26] [27]. Las distribuciones de Tipo I son distribuciones de colas ligeras comunes de la familia Gaussiana de distribuciones de probabilidad (Normal, Poisson, etc.). Las distribuciones de Tipo II son distribuciones de colas pesadas (como la Potencia, Pareto, o distribuciones de Lévy). Las distribuciones de Tipo II son distribuciones comúnmente encontradas en sistemas adaptativos complejos tales como economías sociales, sistemas de salud, y en desastres de propiedad (terremotos, huracanes, etc.) [27].

El párrafo anterior resulta sumamente importante pues es aquí donde se unen algunas de las ideas de Nassim Taleb y Benoit Mandelbrot. Taleb menciona que para las distribuciones de colas pesadas los momentos mayores se vuelven inestables con el tiempo o están indefinidos, estos son sumamente diferentes de los momentos de las colas ligeras. Para las distribuciones de Tipo II, el teorema del límite central falla [45], las anteriores afirmaciones ya se vieron en un capítulo 3 matemáticamente.

Por lo que la problemática del cuarto cuadrante se refiere a las tomas de decisión en donde las remuneraciones o pagos son complejos y las distribuciones de probabilidad subyacentes son de colas pesadas. De acuerdo con Taleb en este cuadrante las predicciones fallan, es aquí donde no se pueden predecir eventos que tienen un impacto masivamente adverso (o positivo), o sea mejor dicho los cisnes negros [27]. Ya se ha visto que Taleb proporciona argumentos para justificar lo anterior, como la incapacidad de hacer estimaciones en el cuarto cuadrante, para esto se dan ejemplos como el colapso de la unión soviética, los colapsos de la bolsa de valores en E.U y diferentes crisis financieras vividas.

Existen dos puntos de vista que rodean al cisne negro, los que adoptan la teoría con interés y analizándola o los que critican fuertemente el estilo de escribir del autor, llegando a comentar que suena un tanto egocéntrico y sábelo todo, independientemente de las posturas que se tomen, el cisne negro no deja de aportar un visión interesante acerca de los errores que se cometen y trae a la mesa el tema de conversación acerca de la imposibilidad de estimar sucesos de gran impacto o errores abismales que se dejan ver hasta mucho tiempo después. Continuamente no se debe olvidar que el autor mismo nos dice que su libro está escrito con la intención de ser una especie de diario en vez de una tesis muy detallada, que lo haya querido escribir así no es de incumbencia para lo que se interesa analizar.

No es de extrañarse que Taleb haya captado inspiración de Mandelbrot pues el anterior también guarda una crítica hacia los sistemas financieros muy fuerte, en el libro antes mencionado *The(mis)behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*, habla acerca de las diez herejías de las finanzas, estas no son más que consideraciones importantes que se tienen que tener en cuenta cuando se está en el área financiera, ejemplos de estas consideraciones son: la turbulencia de los mercados (hablando de las subidas y bajadas repentinas o días en los que casi no cambian), teorías matemáticas que no se adecuan al margen completo del riesgo, la discontinuidad en la que los precios se mueven con grandes saltos y la certeza de la existencia burbujas financieras y de cómo estás no se pueden evitar, son algunas de las herejías que Mandelbrot cubre en su libro.

Es por estos ejemplos que estos dos autores llegan a tener algo en común y eso es la crítica que guardan estos dos hacia las decisiones financieras o el comportamiento de los mercados, entre demás criticas estadísticas y matemáticas, mientras que Taleb nos dice que es difícil predecir, Mandelbrot nos habla del cuidado que se debe de tener cuando se adentra en el área financiera. Mandelbrot menciona en su libro lo siguiente:

> *Si vas a usar la probabilidad para modelar un mercado financiero, entonces es mejor que uses el tipo correcto de probabilidad [26].*

Tanto Taleb como Mandelbrot proponen ideas similares y un punto de vista que puede resultar cuando menos interesante, esto es el uso de fractales en las finanzas. Los fractales es la palabra la cual Mandelbrot empleo para describir la geometría de lo roto o complicado, del latín *fractus*, un fractal es la repetición de patrones geométricos en diferentes escalas, revelando versiones más y más pequeñas de estos mismos [46]. Curiosamente Mandelbrot empezó su carrera estudiando la aleatoriedad, la probabilidad.

En el libro El Cisne Negro, Taleb menciona lo siguiente con respecto a los fractales:

> *Los fractales deberían ser el estándar, la aproximación, la estructura. No resuelven el problema del cisne negro y tampoco convierten a los cisnes negros en eventos predecibles, pero mitigan significativamente el problema del cisne negro haciendo que eventos tan grandes sean concebibles (Los hacen grises)... [46]*

Taleb describe en su libro como los modelos fractales pueden ser alternativas matemáticas para lidiar con la incertidumbre de los cisnes negros. Esto no deja de ser una propuesta más que una solución, el saber los parámetros de cualquier modelo con el que se supone se podrá controlar al mundo sigue siendo un problema. Si un mecanismo es fractal puede devolver grandes valores y con ello se vuelve posible la incidencia de grandes desviaciones.

Es Importante mencionar que no se está hablando de aplicar un fractal directamente a un modelo matemático sino lo que estos representan. En primer lugar un fractal representa complejidad y no linealidad, en segundo lugar representan a las colas pesadas en el sentido que describen la probabilidad de eventos extremos, un fractal representa la naturaleza de lo irregular e impredecible. En tercero se tiene la robustez y antifragilidad que implican resiliencia y la capacidad de beneficiarse de la volatilidad y la incertidumbre. Los fractales sirven como metáfora de la resiliencia y adaptabilidad inherentes que se encuentran en los sistemas naturales. Al comprender las propiedades de los fractales y su relación con los sistemas complejos, Taleb sugiere que se pueden diseñar estrategias y sistemas más sólidos que puedan prosperar en entornos inciertos.

Y por último se tienen los límites epistemológicos hablando del conocimiento y desafíos de hacer predicciones en entornos complejos. Los fractales, con sus estructuras autosimilares e infinitamente detalladas, simbolizan las limitaciones de nuestra capacidad para comprender y predecir completamente el comportamiento de tales sistemas. Taleb argumenta que confiar únicamente en modelos matemáticos y datos históricos puede conducir a una subestimación del riesgo y la vulnerabilidad a eventos raros de alto impacto.

Además de esto, Taleb resulta no ser el único que con creces ha criticado a la distri-

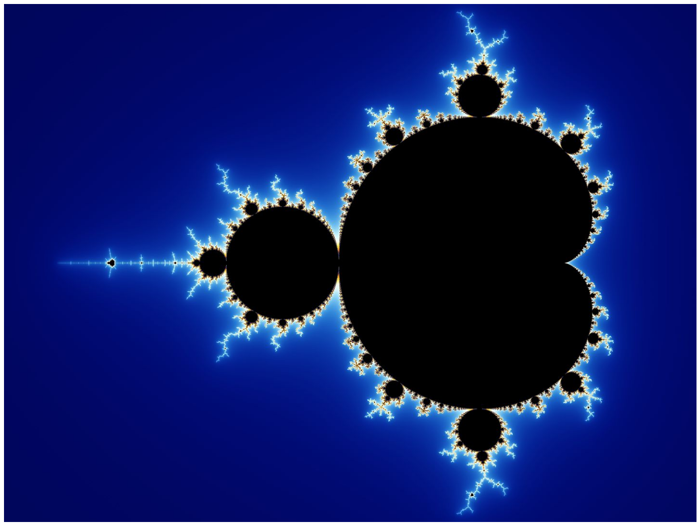


Figura 5.4: El conjunto de Mandelbrot: su límite es una curva fractal con dimensión de Hausdorff 2

bución Gaussiana aplicada a la predicción de eventos más complicados y complejos, Manldelbrot también menciona que la distribución normal no captura propiamente lo empírico y el mundo real.

5.4. Un último análisis

Como propósito de ir hacia un mejor futuro tanto actuarialmente como financiera y estadísticamente, los esfuerzos por buscar mejores modelos deben de continuar, deben de crearse nuevos descubrimientos y teorías que nos permitan acercarnos cada vez más tal vez no a lo perfecto, pero a la reducción de daños que un cisne negro conlleve, o más globalmente reducir los errores que se tienen siendo profesional de la estadística y las matemáticas. El tratar de resolver el daño y las injusticias que los cisnes negros ocasionan es un buen camino para la mejora. Es por ello por lo que este trabajo junto con la divulgación de la problemática del cisne negro a la que se enfrentan actuarios y estadísticos busca llevar y divulgar una conversación en la que puedan surgir algunos interesados de explorar estos problemas y hasta encontrar soluciones, después de todo, la matemática se construye entre descubrimientos tanto individuales como grupales para después pasar a ser compartida con los demás y crear teorías de lo más bellamente hermosas.

De ello también trata el cisne negro de una crítica a la estadística, los estadísticos y los usuarios de la estadística en una serie de circunstancias específicas. El cisne negro si recalca el uso explícito de la estadística como una herramienta científica para el conocimiento. En el capítulo anterior se vieron las consecuencias que puede tener el usar modelos en lugares donde no son tan efectivos, las consecuencias estadísticas de las colas pesadas que se mostraron exponen como una mala elección matemática puede ocasionar diversas consecuencias, entre ellas errores de cálculo y malas estimaciones. El cisne negro nos permite entender un poco del porque esto sucede, el mundo es más complejo de lo que realmente se cree y los sesgos cognitivos de los que Taleb nos habla verdaderamente existen, de no ser así, ninguna variable aleatoria de cola pesada sorprendería, sin embargo, su uso sigue mostrando sorpresas para los estadísticos que no están conscientes acerca de sus propiedades tan particulares, las colas ligeras y las colas pesadas viven en mundos distintos, con propiedades distintas, aun así se usan para el mismo fin, el hecho de que más de $40,000$ variables económicas y seguridades financieras sean de cola pesada deja ver en claro la complejidad de la economía en la que se encuentra el mundo.

¿Porqué no se habla más a fondo de las colas pesadas?. Una respuesta para esto se da en el mismo libro del cisne negro y no tanto en [47], la respuesta gira en torno a cuestiones epistemológicas y filosóficas, pero de las cuales podemos rescatar lo más substancial lo cual es que a pesar de sus riesgos inherentes, las distribuciones de cola pesada a menudo se descuidan o subestiman en los modelos estadísticos y de gestión de riesgos tradicionales. Esto se atribuye a varios factores, incluido un enfoque en distribuciones normales o en forma de campana (que asumen que los eventos extremos son raros e insignificantes), una dependencia de datos históricos que pueden no capturar eventos raros y una tendencia humana general a pasar por alto la posibilidad de eventos catastróficos.

Adicionalmente, Taleb argumenta que existe una demanda de simplicidad y previsibilidad en muchas áreas de la vida, lo que lleva a las personas a pasar por alto o minimizar los riesgos asociados con los eventos de cola pesada. Esto es evidente en los mercados financieros, donde los inversores a menudo confían en modelos que asumen distribuciones normales e ignoran el potencial de grandes pérdidas inesperadas.

Taleb aboga por un enfoque más sólido para la gestión de riesgos que reconozca la presencia de eventos de cola pesada. Él enfatiza la importancia de construir sistemas, organizaciones y carteras que sean “anti frágiles” y puedan beneficiarse de la volatilidad y la incertidumbre. Esto implica incorporar medidas para soportar y capitalizar eventos extremos en lugar de depender únicamente de modelos probabilísticos que asumen la ausencia de colas pesadas.

La estadística es un medio muy eficiente de investigación y una herramienta matemática excepcional, sobre todo cuando se usa para momentos bajos (del primero al cuarto refiriéndose a la media, varianza, asimetría y curtosis) como pruebas de confianza para problemas basados en la probabilidad, no en la expectativa o momentos superiores. En experimentos psicológicos, por ejemplo, el valor atípico cuenta como una sola observación, y no causa un alto impacto más allá de su frecuencia.

Por lo que, en palabras de Taleb, en el cisne negro se están criticando tres usos de la estadística:

1. El uso poco riguroso de la estadística y la confianza en la probabilidad en dominios donde los métodos actuales pueden llevar a cometer errores con consecuencias (el “alto impacto”) donde, por motivos lógicos, se tiene que forzar a

desconfiar de la inferencia sobre probabilidades bajas.

2. Los efectos psicológicos de los números estadísticos en la disminución de la conciencia de riesgo y la suspensión del escepticismo saludable, a pesar de la falta de fiabilidad de los números producidos sobre eventos de baja probabilidad.
3. Finalmente, el cisne negro critica el uso de métricas que se han hecho muy cómodas como la “desviación estándar”, el “ratio de Sharpe”, la “varianza absoluta media”, etc., en ámbitos con colas gruesas en los que estos términos tienen poco significado práctico y en los que la confianza de las personas inexpertas ha sido significativa, incontrolada y, por desgracia, con consecuencias.

El argumento principal de Taleb es que, a pesar de los peligros asociados con las distribuciones de cola pesada, estas prevalecen en la vida diaria porque capturan la realidad de eventos raros e impactantes. Sin embargo, sus riesgos a menudo se pasan por alto o se subestiman debido a diversos sesgos cognitivos y al deseo de simplicidad y previsibilidad.

5.5. Los Cisnes Grises

El problema no es la conciencia de que las distribuciones de colas pesadas existen si no la falta de entendimiento de sus consecuencias. Decir que una distribución es de colas pesadas implica muchísimo más que cambiar el nombre de la distribución, pero una revisión general de las herramientas estadísticas y tipos de decisiones tomadas. Las estadísticas más estándares vienen de teoremas diseñados para colas ligeras. Un cisne negro puede llegar a ser un cisne gris por así decirlo, reduciendo su efecto de sorpresa. Una persona consciente de la posibilidad de un evento extremo y que toma acción de ello puede convertir un cine negro en uno gris.

No se habla mucho de un cisne gris como tal, pues es muy difícil de conseguir y mucho más de lograr, al leer el cisne negro uno se da cuenta que es más fácil decir que hacer, tal es el caso de implementar un cisne gris en el sistema económico, por ejemplo, en la bolsa de valores, uno simplemente no puede cambiar los modelos y matemáticas que sostienen este sistema de la noche a la mañana. Taleb dice que se la ha pasado el libro entero hablando de cisnes negros y que como humanista que es, no es que le gusten, de hecho, los detesta junto con el daño que traen consigo a la sociedad. Por lo que su propósito siempre ha sido el de mitigar la mayoría de ellos.

En la terminología de Taleb, un “cisne gris” se refiere a un evento potencialmente significativo y predecible que está fuera del ámbito de las expectativas normales pero que no es completamente impredecible o aleatorio como un evento de “cisne negro”. Mientras que los eventos del cisne negro se caracterizan por su extrema rareza y alto impacto, los eventos del cisne gris son más predecibles, pero a menudo se ignoran o se minimizan debido a su improbabilidad percibida o falta de atención.

A lo largo del cisne negro Taleb se fascina con la idea de la aleatoriedad fractal, la aleatoriedad fractal no tiene una definición matemática específica, el término "aleatoriedad fractal" es más una idea conceptual que combina elementos de geometría fractal y aleatoriedad. Es por ello mismo que la aleatoriedad fractal no da soluciones precisas como tal. Más bien la idea de esto está en que si uno puede saber que la bolsa de valores puede caer como en 1987, entonces el saberlo indicaría que no sería un cisne negro, esto se sabría porque los fractales tienen una escala de semejanza, dependen de un alcance largo, tienen una escala invariable y tienen fluctuaciones irregulares. Un cisne gris se preocupa por eventos extremos que son modelables, un cisne negro se trata de sucesos desconocidos que son desconocidos.

Taleb usa el término "cisne gris" para resaltar las limitaciones de depender únicamente de los enfoques tradicionales de gestión de riesgos que se centran en eventos normales y esperados. Él argumenta que, si bien los eventos de cisnes grises pueden no ser tan raros o improbables como los cisnes negros, su impacto aún puede ser significativo y puede tener graves consecuencias si no se considera o se prepara adecuadamente.

Al introducir el concepto de cisnes grises, Taleb enfatiza la necesidad de solidez, resiliencia y la capacidad de adaptarse a posibles sorpresas o eventos imprevistos que pueden quedar fuera del ámbito de las expectativas normales pero que no son del todo impredecibles. Una consideración muy importante para tener en cuenta sobre todo cuando se habla de una gestión del riesgo, en donde no se deben subestimar o pasar por alto estas cuestiones.

En el próximo capítulo se hablará de las aplicaciones de la teoría del cisne negro, pues resulta mejor el entendimiento de este concepto si se tienen ejemplos aplicados, estos van desde sucesos importantes que han marcado por completo la historia hasta otros que se han pasado por alto, pero que su existencia resulta sumamente interesante y claro que con repercusiones importantes.

6 Aplicaciones de la teoría del cisne negro

Una vez visto el análisis del libro “El Cisne Negro” y analizado a fondo la matemática detras de este, el enfoque de este capítulo tiene como objetivo mostrar ejemplos de cisnes negros, aquellos cisnes que han sucedido a lo largo de la historia, con el fin de mostrar la importancia de este trabajo, no se pueden pasar por alto las cosas veridicas que han sucedido y seguiran sucediendo si como menciona Taleb, no hacemos sistemas *antifragiles*.

6.1. Los Cisnes Negros en economía

En su artículo titulado *“Errors, robustness, and the fourth quadrant”*, por su tradución al español: Errores, robustez y el cuarto cuadrante, la crítica hacia los sistemas que rigen las observaciones y el comportamiento de los mercados se hace muy notoria, pues Taleb en este artículo menciona la preocupante falta de intuicion y seriedad que instituciones como el World Bank, el fondo monetario internacional, diferentes agencias gubernamentales, bancos centrales, instituciones privadas tales como bancos, compañias de seguros, grandes corporaciones, y finalmente departamentos académicos, no hayan considerado la posibilidad del colapso total del sistema bancario que se origino en el 2007 [45]. Ninguna estimación o predicion oficial se acerco a la gravedad del resultado obtenido.

Este ejemplo, aunque se basa en datos económicos, se generaliza a toda toma de decisiones en condiciones de incertidumbre en las que existe un error de cálculo potencial del riesgo de un evento poco frecuente con consecuencias abismales. El problema o la preocupación es el evento raro, y la exposición a él, del tipo que puede engañar a un tomador de decisiones para que opte por un determinado curso de acción basado en un malentendido de los riesgos involucrados.

En la figura 6.1 podemos ver el daño proveniente de construir la administración del riesgo sobre la base de métodos econométricos extrapolativos (normalmente muy técnicos). Taleb dice que dichos métodos proveen a los tomadores de desiciones con una confianza falsa acerca del riesgo, dejando a la sociedad expuesta a perdidas trillonarias que dejan al capitalismo al borde del colapso [45], nuevamente vemos como estos profesionales fueros sesgados por el conocimiento y por métricas tal vez poco entendidas para ellos o en un caso peor ningun entendimiento de los modelos o herramientas

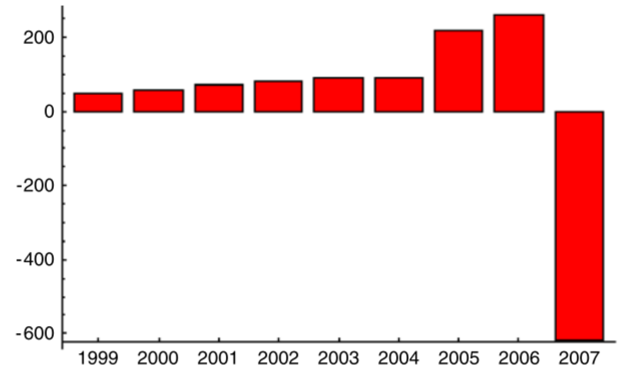


Figura 6.1: Indy Mac ganancia anual (en millones) entre 1998 y 2007. Se pueden ver las colas pesadas. Un error trágico que vino de subestimar las perdidas potenciales, los casos más comunes fueron FNMA, Freddie Mac, Bear Stearns, Northern Rock y Lehman Brothers, en conjunto con númerosos fondos de cobertura. [45].

usadas, nuevamente se menciona que ninguna agencia de prestigio o por lo menos presente en el area económica, financiera o de seguros vio venir la crisis financiera.

Otro ejemplo viene en la tesis realizada por Miguel Angel Vitiello Mouret [28], en donde encuentra una clara aplicación de la teoría del cisne negro en la modelización con saltos, dandose cuenta de la problematica de la volatilidad y las limitaciones de la distribución normal para la modelización financiera, junto con otras lìmitaciones como las del movimiento Browniano geométrico. Vitiello da tres ejemplos de cisnes negros que encontro en el ambito bancario, el primero y más notorio fue en el 2008 en donde se puede ver la crisis financiera del 2007-2008. En conjunto con este, los otros dos cisnes mencionados por el fueron cuando el banco chino tuvo el llamado lunes negro chino en el 2016, año en el que también sucedería el tercer cisne negro cuando los bancos europeos experimentaron una gran volatilidad e incertidumbre financiera debido al denominado brexit. Un Cisne Negro totalmente autentico debido a su poca probabilidad de ocurrencia que al final acabo ocurriendo.

6.1.1. Crisis Financiera del 2007-2008

Como se menciono anteriormente ninguna organización cuyos giros estaban principalmente enfocados en las finanzas y en lo económico logro ver a la crisis del año 2007 acercarse, esta crisis mundial que se origino en los años 2007-2008 fue provocada por el colapso del mercado de hipotecas de alto riesgo en los Estados Unidos, tambien denominadas *subprime* [1]. Modelos matemáticos sofisticados como los modelos de valoración de valores respaldados por hipotecas (Mortgage-backed securities por sus siglas en ingles), se utilizaron para evaluar el riesgo y predecir las probabilidades de incumplimiento.

Sin embargo, estos modelos no lograron capturar los riesgos sistémicos y las interdependencias en el sistema financiero, lo que provocó graves pérdidas y un colapso financiero generalizado. Parte del colapso vino de la seguridad que tenian las empresas de que cualquier persona siempre pagaría su hipoteca, resulto estaban equivocados [1].

Nuevamente como menciona Taleb, no entendemos como sociedad lo realmente complicado que es el mundo o en este caso, el sistema financiero, por este lado por ejemplo el sistema financiero hipotecario. Y de entenderlo queremos una sobre simplificación de los hechos, no se explicó masivamente porque los modelos matemáticos manejados por estos bancos fallaron, sólo que fue culpa de las hipotecas subprime, porque lo abstracto y complejo de la matemática aterra a un público en general.

¿Y por qué falló?,

- Modelos de cópula gaussiana: Estos modelos fueron usados ampliamente para evaluar y administrar el riesgo asociado con las obligaciones de deuda garantizada (CDO) y los valores respaldados por hipotecas (MBS). Sin embargo, no se tuvo en cuenta la correlación y los riesgos de cola en el mercado de hipotecas de alto riesgo, lo que llevó a una subestimación significativa de las probabilidades de incumplimiento y los riesgos sistémicos [54]. Y visto todo lo anterior, parece curioso que se empleara un modelo Gaussiano cuando ya se vio que bajo estos dominios las colas pesadas estan presentes, esto es lo que critica Taleb, el uso de la distribución Gaussiana en dominios de cola pesada, no es de extrañarse el resultado obtenido.

- Modelos de valor en riesgo (VaR o Value al Risk por sus siglas en ingles): las instituciones financieras suelen emplear los modelos VaR para estimar la pérdida potencial máxima dentro de un nivel de confianza específico. Estos modelos a menudo se basaban en datos históricos y suponían que los rendimientos de los activos seguían una distribución normal [8]. Sin embargo, durante la crisis financiera ocurrieron eventos extremos que excedieron las estimaciones del VaR previsto, lo que indica las limitaciones de los modelos para capturar los riesgos de cola y las dependencias sistémicas, nuevamente se ve como se emplean modelos de distribución gaussiana en un cuadrante donde no deberían de estar.

- Modelos de agencias calificadoras: las agencias calificadoras de crédito utilizaron modelos matemáticos para asignar calificaciones a varios instrumentos financieros, incluidos los valores respaldados por hipotecas. Estos modelos incorporaron supuestos sobre probabilidades de incumplimiento y correlaciones [29]. Sin embargo, no tuvieron en cuenta la interconexión de los mercados financieros y los riesgos asociados con los productos estructurados complejos, lo que resultó en calificaciones inexactas que no reflejaban los riesgos subyacentes.

Estos modelos, entre otros, fueron criticados por sus suposiciones, la dependencia de datos históricos y la incapacidad de capturar las complejidades e interdependencias del sistema financiero. La crisis financiera reveló las limitaciones de confiar únicamente en modelos cuantitativos y la importancia de incorporar una comprensión más integral de los riesgos, incluidos los riesgos de cola y la dinámica sistémica. De todos los cisnes negros este es uno del que se investigo más a fondo, las personas siguen descubriendo y exponiendo el porque sucedió a pesar de que nadie lo vio venir (o de ser así, no se pudo prevenir)[1], un autentico cisne negro.

6.1.2. Long-Term Capital Management

La crisis de gestión de capital a largo plazo (LTCM / Long-Term Capital Management) fue una crisis en la que, a fines de la década de 1990, un fondo de cobertura dirigido por premios Nobel y matemáticos de renombre, colapsó debido a una serie de eventos inesperados. LTCM era el nombre de este fondo de cobertura que utilizó modelos matemáticos complejos para administrar el riesgo, pero sus modelos no tuvieron en cuenta la volatilidad y las correlaciones extremas del mercado. El evento destacó las limitaciones de confiar únicamente en modelos matemáticos en sistemas financieros complejos.

LCTM subestimo el riesgo debido a su confianza en el corto plazo y la concentración del riesgo. Usando la misma matriz de covarianzas para medir el riesgo y optimizar las posiciones inevitablemente pasará a causar sesgos en las medidas del riesgo [22].

Entre las razones por las cuales LCTM entro en crisis están los supuestos de normalidad ya que los modelos de LTCM asumieron que los rendimientos del mercado seguían una distribución normal, lo que significa que esperaban que ocurrieran eventos extremos con una probabilidad muy baja. Sin embargo, las condiciones reales del mercado durante la crisis se desviaron significativamente de la normalidad, lo que resultó en pérdidas sustanciales que no fueron anticipadas por los modelos [22]. Incluso antes de la teoría del cisne negro y la exposición del uso de colas pesadas P. Jorian [22] escribe en su artículo lo siguiente:

> *Incluso si las distribuciones fueran simétricas, es poco probable que sus colas puedan estar bien descritas por una distribución normal. Los modelos de series de tiempo recientes indican que la mayoría de las series financieras tienen colas más anchas que la distribución normal, incluso cuando se tiene en cuenta la variación temporal del riesgo.*[2]

Es impresionante como sin conocer a Taleb este autor ya tenía en cuenta que usar una distribución normal en el ámbito financiero en el que se encontraba LTCM era una mala idea, pues no representaba bien la verdadera distribución la cual seguramente era una de cola pesada (como se vio en capítulos anteriores prácticamente cualquier seguridad financiera es de cola pesada). Definitivamente este pudo ser uno de los muchos errores que cometieron LTCM y es interesante recalcarlo puesto que es uno del cual se ha hablado en este trabajo, nuevamente resulta impresionante que profesionales del riesgo hayan pasado esto por alto sobre todo teniendo a un premio nobel dentro de LTCM. Independientemente de esto, este ejemplo resalta lo olvidadas

[1] Algunas personas se dieron cuenta de que este suceso iba a ocurrir, un cisne gris para ellos, pero una sola persona o un puño de ellas no puede prevenir una catastrofe tan grande

[2] Refiriéndose a las distribuciones usadas por LTCM en sus modelos de riesgo.

que están las distribuciones de cola pesada y sus propiedades, las empresas o agencias prefieren lo normal (hablando de la distribución normal - gaussiana) sin embargo lo normal no captura lo caótico que es el mundo en este caso las finanzas.

Entre otros fallos cometidos por LTCM están la subestimación de las correlaciones ya que los modelos usados por LTCM no capturaron adecuadamente las correlaciones y dependencias entre diferentes clases de activos y mercados. Cuando ocurrieron eventos inesperados, como el incumplimiento de la deuda rusa y la consiguiente turbulencia del mercado, la interconexión de los mercados financieros mundiales provocó graves pérdidas que los modelos no tuvieron en cuenta.

Y por último el riesgo de falta de liquidez pues los modelos empleados por LTCM no tuvieron suficientemente en cuenta el riesgo de liquidez, que se refiere a la dificultad de negociar activos rápidamente sin causar impactos significativos en los precios. Cuando las condiciones del mercado se deterioraron, LTCM enfrentó desafíos para deshacer sus posiciones y obtener liquidez, lo que exacerbó sus pérdidas.

Otro ejemplo de un cisne negro en su forma más pura y caótica, pues adentro de LTCM no hubo ningún profesional que se diera cuenta de todas estas fallas, no pudo haber sido un cisne gris.

6.1.3. Flash Crash

En mayo de 2010, el mercado de valores de EE. UU. experimentó un rápido y grave colapso, comúnmente conocido como "Flash Crash". Fue desencadenado por programas comerciales algorítmicos que usaban modelos matemáticos para ejecutar operaciones de alta frecuencia. El evento demostró el potencial de interacciones y vulnerabilidades imprevistas en sistemas comerciales complejos controlados por computadora [23].

Este es otro ejemplo de un cisne negro y uno interesante en el que ninguna distribución de probabilidad está involucrada como en los anteriores dos ejemplos (no se necesita una distribución de probabilidad para tener un cisne negro, pero ejemplos de cisnes en donde estas están presentes son de interés sobre todo en el ámbito actuarial).

Las razones para que ocurra un flash crash son muchas pero lo que importa rescatar es que estos sucesos siguen sucediendo en el ámbito financiero sin previo aviso, sin tener herramientas para minimizar su daño y sin una anticipación de estos de las partes responsables. Otro ejemplo en el que la economía y las finanzas se quedan atrás para prevenir estos sucesos.

6.2. Cisnes ignorados y sus consecuencias

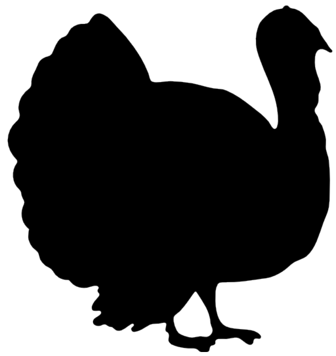
Mucho se ha hablado de los cisnes negros, el sesgo cognitivo que habita en la sociedad, los velos platónicos y la falacia narrativa, sin embargo, existen sucesos altamente improbables o por el contrario considerablemente probables que se pasan por alto. A lo que se refiere con esto es el hecho de estar expuesto a un gran riesgo sabiendo las consecuencias y no hacer nada.

Durante 1859 tuvo suceso una de las más grandes eyecciones de masa coronal, estas son erupciones de ondas de plasma y radiación que despiden estrellas como nuestro sol. Pueden contener una masa tan grande como 10^{13}kg y gran parte de ellas adquiere una velocidad de miles de kilómetros por segundo. Una eyección de masa coronal común tiene una masa entre $10^{11} - 10^{12}$kg con una velocidad entre 400 y $1,000$km/s [19]. Normalmente son expulsadas en periodos de máxima actividad solar. La eyección de masa solar ocurrida en 1859 tuvo como nombre el efecto Carrington y ha sido la tormenta geomagnética más intensa en la historia de la humanidad, en esa época los efectos fueron notorios para los operadores de telégrafos cuyos equipos fueron quemados. Pese a esto, el mundo siguió como si nada hubiera pasado.

Por otra parte, si un evento Carrington llegará a ocurrir hoy en día junto con la tecnología presente como las redes eléctricas, los carros eléctricos entre demás equipos electrónicos como el internet, los daños rondarían los trillones de dólares y las reparaciones podrían tomar décadas. Cada día que pasa nos estamos volviendo más y más vulnerables a que suceda este evento. El problema principal radica en que esto ni siquiera es un cisne negro puesto que no cumple con los tres puntos vistos anteriormente que un suceso necesita tener para ser considerado un cisne negro. Si no se hace algo como sociedad acerca de un suceso que se conoce y se espera que ocurra ahora imagínese lo poco preparados que se está para un cisne negro.

No se necesita ir a problemas que se encuentran afuera del planeta tierra ya que en este mismo se tienen ejemplos claros. El calentamiento global es un problema pronosticado y de una magnitud colosal, por consiguiente, cada día que pasa y que la humanidad no hace nada al respecto las consecuencias de dejar a este problema avanzar incrementan su daño, algunas consecuencias que se tienen y que a día de hoy causan estragos son el enfrentarse con enfermedades, incrementos en el nivel del mar, incendios forestales, cambios de comportamiento en animales, extinción de animales, falta en el abastecimiento de agua, entre muchísimas más consecuencias y daños, hoy por hoy, las repercusiones son notorias y más que evidentes. Esto nuevamente no es un cisne negro, pero si el sesgo de la humanidad nubla su vista, sus conocimientos anteriormente aprendidos y más aún no hace nada al respecto, entonces cisnes negros más poderosos y catastróficos asociados con el calentamiento global empezarán a emerger si no es que ya han empezado. Nuevamente, aunque el descubrimiento del calentamiento global fue un cisne negro, este cisne negro fue olvidado y sus consecuencias se siguen fortaleciendo y anidando a un cisne negro más poderoso, algo que le seguirá al calentamiento global y solo se puede especular pero con un daño abismal. Lo ideal sería no conocerlo, atacando directamente lo que ya se sabe, buscar soluciones al calentamiento global.

Volvamos al ejemplo del pavo visto anteriormente en el capítulo 4, de librar su muerte este nunca volvería a creer en un humano, mientras por otra parte, para el granjero la muerte de los pavos no es más que su rutina diaria y por lo tanto no es un cisne negro la muerte de ningún pavo, entonces la idea de un cisne negro es relativa al conocimiento que alguien posea por lo que el objetivo que se tiene como estadísticos, actuarios y demás profesionistas además de cualquier persona, es estar en la posición del granjero y no en la del pavo.



6.3. La Pandemia COVID-19

Cuando se habla de años recientes 2020-2023, la pandemia por SARS-CoV-2 mejor conocida por COVID-19 ha sido el último suceso internacional que ha tenido un impacto masivo en la raza humana.

Desde el año 2010 cuando la segunda impresión de "El Cisne Negro" sería publicada, Taleb añadiría unos cuantos capítulos, uno de ellos se titularía: *''Aprender de la Madre Naturaleza, La más antigua y la más sabia"*, en este capítulo surge un verso cuanto menos interesante para la problemática que se enfrentó sobre la pandemia por COVID-19 antes de que esta sucediera en 2020.

> *"A medida que viajemos más por este planeta, las epidemias serán más agudas: tendremos una población de gérmenes dominada por unos pocos, y el asesino exitoso se propagará con mayor eficacia...*
>
> *...Veo el riesgo de que un virus agudo muy extraño se extienda por el planeta."* [46]

Nuevamente se recalca que este verso fue escrito antes del año 2010 cuando Nassim Taleb publicaría la segunda impresión de "El Cisne Negro", no es que Taleb haya predicho la llegada de una pandemia, sino que volteo a ver la historia de la humanidad y como estas enfermedades han acompañado a los seres humanos a lo largo de esta. Anteriormente se dijo que cada vez la sociedad se está alejando de Mediocristán y pasando hacia Extremistán, las pandemias anteriormente tardaban mucho más tiempo en expandirse, en la actualidad y con lo interconectado que se encuentra el mundo estas pandemias con los distintos medios de transporte tardan años o meses en expandirse a una escala mundial (dependiendo claro de la enfermedad).

Cuando los medios de comunicación catalogaron a la epidemia COVID-19 como un cisne negro y preguntaron la opinión de Taleb, este les dijo que no usaran ese término para justificar la poca preparación que tuvieron los gobiernos internacionales a la pandemia. Efectivamente las pandemias siempre han existido, aunque nunca en una escala como se vio actualmente, también claro que la pandemia fue un suceso improbable, pero si algo ha enseñado la historia es que siempre han estado ahí, como el ejemplo anteriormente presentado de las llamaradas solares, estos eventos existen, se saben sus daños, pero no se hace nada, nuevamente no se comprende lo realmente complicado que es el mundo.

Se tiene que decir que aunque el propio Taleb clasifique la pandemia por COVID-19 como un cisne blanco, no olvidemos una propiedad muy importante del cisne negro, la de ser observador - dependiente, es decir, que para algunos países sin experiencia previa en pandemias o enfermedades a tal escala este fenómeno si pudo ser un cisne negro, tal vez una economía tan grande como la estadounidense debió estar preparada pero el mundo en el que vivimos es más grande, existen países en vías de desarrollo, países con economías débiles o que al momento estuvieron enfrentando otras dificultades, por lo que efectivamente y desde una opinión personal el COVID-19 fue un cisne negro.

Claro que sí, la pandemia por COVID-19 fue un cisne negro y es interesante ya que aparte de cumplir con los 3 puntos que caracterizan a un cisne negro: rareza, impacto extremo y retrospectiva, cumple inclusive con la parte matemática, con esto se quiere decir que y citando el artículo de Taleb junto con Pasquale Cirillo *“Tail Risk and contagious diseases”* [48].

> *El uso de modelos matemáticos y computacionales cada vez más sofisticados para la propagación y las implicaciones de las epidemias deberían, en principio, proporcionar a los responsables políticos y de la toma de decisiones un mayor conocimiento de la situación en relación con su riesgo potencial.*
>
> *Sin embargo, la mayoría de estos modelos ignoran el riesgo de cola de las enfermedades contagiosas, utilizan predicciones puntuales y la fiabilidad de sus parámetros es raramente cuestionada e incorporada a las proyecciones.*

En este artículo se investigaron 2500 años en los cuales han sucedido diversas pandemias y se encontró que la distribución relacionada a las muertes por pandemia es fuertemente de cola pesada, lo que sugiere un riesgo de cola que lamentablemente se ignora en gran medida en los modelos epidemiológicos comunes [48]. Nuevamente las distribuciones de cola pesada hacen su aparición y no es para menos ya que una pandemia habita en Extremistán.

Taleb junto con Cirillo argumentan que un marco natural y empíricamente correcto para evaluar (y gestionar) el riesgo real de pandemias lo proporciona la teoría del valor extremo (EVT, Extreme Value Theory por sus siglas en ingles), un enfoque que históricamente se ha desarrollado para tratar fenómenos en los que los extremos

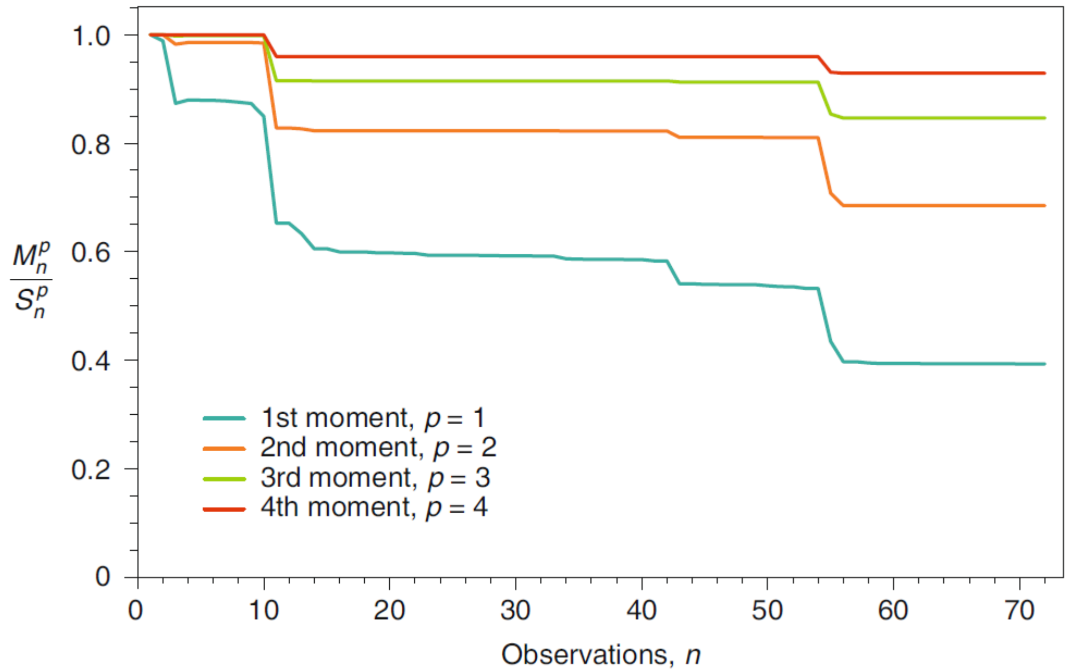


Figura 6.2: Gráfico del promedio de muertes en pandemia a lo largo de la historia. La gráfica sugiere que todos los momentos, incluida la media, pueden ser infinitos [48].

(máximos o mínimos) y no las medias juegan el papel de protagonistas, siendo la fuente fundamental de riesgo.

Este artículo es cuanto menos interesante, ya que demuestra las fallas estadísticas y los modelos que se usaron en un principio para intentar cuantificar el riesgo en las pandemias, Taleb descarta completamente usar modelos tradicionales cuando se trata de medir un riesgo asociado a las pandemias por las mismas razones que además se ha visto anteriormente, en primera instancia al realizar un gráfico de máximo a suma (maximun to sum plot) del promedio de muertes en pandemias a lo largo de la historia, se encontró que la gráfica sugiere que todos los momentos probabilísticos incluyendo a la media pueden ser infinitos.

La gráfica 6.2 se apoya de una consecuencia de la ley de los grandes números: para una secuencia $X_1, X_2, ..., X_n$ de variables aleatorias no negativas independientes e idénticamente distribuidas, si $\mathbb{E}[X^p] < \infty$ para $p = 1, 2, 3, ...$, entonces $R_p = M_n^p / S_n^p \to 0$ casi seguramente para $n \to \infty$ donde $S_n^p = \sum_{i=1}^{n} X_i^p$ es la suma parcial de orden p, y $M_n^p = \text{máx}\,(X_1^p, ..., X_n^p)$ el máximo parcial correspondiente. La figura 6.2 muestra que ningún momento finito pudiese existir para el número de muertos por pandemia, ya que la razón R_n^p no converge a 0 para $p = 1, 2, 3, 4$, sin importar cuantas información sea usada.

Se tienen alternativas para seguir midiendo el riesgo por pandemias, Taleb y Cirillo proponen una solución a esto usando la teoría de valores extremos demostrando que se pueden dar otros enfoques al riesgo. Este ejemplo es interesante pues deja ver una clara aplicación de lo que se vio en el capítulo 4 en donde se vieron las consecuencias estadísticas de las colas pesadas. A continuación, se verá cómo se trajeron estas ideas complejas a un medio en el cual todos pueden entender lo complicado que es un cisne negro.

6.4. De las alas del cisne a ojos humanos

El enfoque principal de Nassim Taleb nunca ha sido el de predecir eventos impredecibles, va en contra de la lógica, pero si el de construir robustez en contra de eventos catastróficos y negativos al mismo tiempo que sacar el mayor provecho de los eventos positivos.

Una manera de hacer esto es informar a los demás acerca del trabajo de Taleb y también de la existencia de los cisnes negros. La divulgación científica es una de las maneras más ingeniosas y llamativas de llevar a cabo este propósito. Pues mediante la lectura y recursos audiovisuales se puede llegar a una mayor audiencia. Por lo que, la actuaría y la divulgación de un tema que está contenido en ella, puede ser muy llamativo para los lectores y curiosos que buscan nuevos temas que aprender. En el próximo capítulo se verá como esta herramienta ayuda a crear una conexión entre lo complejo y la divertido que es descubrir y adquirir nuevos conocimientos. Con el propósito principal de llevar a cabo dos cosas, en primero que las personas conozcan la teoría del cisne negro, sus consecuencias, las fallas en los sistemas y ocasionar intriga para buscar soluciones y en segundo que las personas conozcan el mundo de la actuaría y como se une a la teoría del cisne negro, se deben de pasar por alto muchas cuestiones técnicas (tal como lo hizo Taleb en su propio libro) para hacerlo amigable con la mayoría de las personas pero el mensaje sigue siendo el mismo. Después de todo Taleb en su libro, El Cisne Negro, tiene una carga matemática muy sencilla y comprensible que poco tiene que ver con lo complicado que en realidad es su investigación como se vio en anteriores capítulos.

Dicho esto, la divulgación científica es una herramienta muy importante para que todos puedan ver las alas de un cisne negro, tal vez no entender las complicadas matemáticas que hay detrás de este, pero si comprender sus riesgos, los peligros y lo vulnerables que se vuelven cada día que la tecnología sobrepasa a la sociedad, la tecnología es algo bueno sin duda alguna pero el sobrepasar lleva un riesgo, ¿Realmente se entienden todos los avances?, cuando la rapidez con la que las personas hacían trading aumento no se vio llegar el flash crash del 2010. Este entre muchos sucesos en los que la tecnología sobrepasa a la humanidad y la va acercando más a Extremistan son problemáticas que se deben de comunicar a todas las personas, para que realmente se entiendan todas las acciones que realizan ellos u otros medios. Solo por dar un ejemplo, cerca de la llegada de la inteligencia artificial quizá se encuentren cisnes negros, pero al informar a las personas de lo que pasa a su alrededor estos se pueden hacer cisnes grises.

Cuando en el 2007 Nassim Nicholas Taleb escribía su libro "El Cisne Negro, El Impacto de lo Altamente Improbable" pasaría a vender cerca de 3 millones de copias, pero más que eso, pasaría a decirles a las personas lo delicado que es el mundo en el que se vive y más importante aún, que hay cisnes viviendo entre ellos, sucesos altamente improbables que pueden ser buenos o malos, pero sobre todo improbables. También pasaría a exponer las fallas en los sistemas económicos. Este trabajo pretende que personas del habla hispana conozcan su teoría y de ser más su curiosidad se adentren en ella pues encontrarán sorpresas matemáticas si se tienen los conocimientos. Pero sobre todo que este trabajo llegue a la mayoría de gente posible.

7 El Proceso de divulgación

La divulgación de la actuaría en México es algo en desarrollo y se podría decir que es hasta un nuevo horizonte por explorar, en el pasado se ha hablado de la divulgación en temas matemáticos y estadísticos, físicos o de biología, sin embargo, la actuaría a pesar de estar muy relacionada con la estadística (pues no existiría sin ella), no tiene los medios o quiza la forma para expresar que hacen los actuarios a las demás personas. Tal vez lo anterior sea porque la actuaría es algo más complejo que las matemáticas vistas hasta secundaria. No obstante, una persona de nivel bachillerato podría comprender que realiza un actuario mediante una buena manera de expresar la matemática que rodea a estos. No es una tarea sencilla ya que se tienen que simplificar varios conceptos pero no es imposible.

La divulgación actuarial en México puede ampliarse más ya sea explicando los conceptos fundamentales de esta ciencia o añadiendo temas más específicos como lo es el caso de este proyecto. Más aun, cuando se recalcan las partes en donde las matemáticas y la actuaría se intersectan. Todo teniendo en cuenta que no se tienen que dejar de tocar las ideas principales y simplificar para llegar a un publico más extenso. No se descarta por supuesto que la divulgación de la actuaría este contenida adentro de la propia divulgación matemática, a pesar de ello, la divulgación de la actuaría se puede llevar más adelante y más específicamente, pues es un tema extenso, desde tablas de mortalidad, notación actuarial, las matemáticas que hay detras de los seguros o las pensiones, hasta las que hay en las finanzas manejadas por actuarios, pasando por temas populares ultimamente con la llegada del *data science* de la cual varios actuarios ya son participes pues esta muy unificada a su profesion, los temas que se pueden abordar son muchos.

7.1. Un panorama general de la divulgación actuarial

Dentro de la actuaría si se tienen ejemplos de la divulgación actuarial y de como está se ve en ámbitos y culturas distintas, algunos de los más famosos son:

- **Actuarial Journey:** es un podcast que se enfoca en proveer orientación profesional, ideas y perspectivas a aspirantes a actuarios. El nombre del host es

Nemo Ashong y en este hay diversas entrevistas con actuarios que comparten sus experiencias, puntos de vista y consejos en distintos temas relacionados a la actuaría, desde preparación para exámenes, búsqueda de trabajo y desarrollo profesional, el podcast puede encontrarse en spotify o apple podcast.

- **Actuarial Review:** es una revista que abarca una gran variedad de temas relacionados a la actuaría incluidos risk management, seguros, finanzas y análisis de datos. Su página web y revistas muestran artículos realizados por actuarios, académicos y otros expertos además de mostrar temas técnicos y no técnicos de la ciencia actuarial [2].
- **The Actuary Magazine:** Es una revista emitida por la SOA (Society of Actuaries) que abarca temas relacionados a la ciencia actuarial , nuevamente vemos temas como risk management, seguros y finanzas. Se pueden encontrar ejemplares impresos o en su versión online y presenta artículos escritos por actuarios, académicos y otros expertos en el campo [41].
- Dentro de la plataforma de videos más grande, YouTube, se tienen personas interesadas en la divulgación de la actuaría como por ejemplo Etched Actuarial, Actuary elle y Live Actuary cuyos canales muestran y explican varios temas relacionados con la ciencia actuarial como preparación para exámenes, consejos para la carrera y conceptos técnicos.

El lector podrá notar que los puntos anteriores tratan de buenos ejemplos de divulgación actuarial. La actuaría es indispensable cuando se habla de seguros y la industria aseguradora, así como de finanzas y manejo de riesgos. Por lo que esta disciplina se ve rodeada de habilidades técnicas y complejas, así como de conocimientos avanzados para un público en general, haciendo la labor de divulgación difícil de entender para aquellos afuera de la profesión. Los anteriores ejemplos son una buena muestra de cómo el esfuerzo de divulgar esta profesion se ha visto incrementado mediante el uso de blogs, podcast o videos y mediante estos tratar de mostrar a un público general la importancia del trabajo de los actuarios. *The Actuary Magazine* y *Actuarial Review* son ejemplos de cómo se provee análisis y puntos de vista a la industria. Adicionalmente a esto los canales de Youtube o podcast están dirigidos a una audiencia mayor.

A pesar de los esfuerzos antes mencionados todavía se tiene un largo camino en cuanto a la divulgación actuarial, sobre todo en México, pues la mayoría del material antes mencionado se encuentra en inglés, por lo que la labor de crear conciencia y comprensión de la profesión actuarial entre el público en general sigue siendo un reto, aun queda transmitir más material para el público de habla hispana. Si se tiene material de divulgación en México aunque muy poco a la fecha de realizado este trabajo y resulta complicado en ocasiones encontrar artículos, materiales o videos que expliquen que es la actuaría. El campo de la actuaría puede ser uno sumamente especializado y difícil de comprender para aquellos que se encuentran afuera de él. Además, hay necesidad de crear recursos más accesibles y atractivos para cerrar más esta brecha y promover una mayor comprensión del campo.

A pesar de que este trabajo no cuenta con las estadísticas de todos los canales existentes que se dedican a la divulgación actuarial, se puede encontrar navegando por internet una escases de material en cuanto a la divulgación actuarial se refiere y mucho menos material si se trata de uno dedicado a un público de habla hispana. Hablando generalmente del estado actual de la divulgación actuarial, está se caracteriza por un reconocimiento creciente de la importancia de la profesión y un esfuerzo correspondiente para hacer que el conocimiento actuarial esté más disponible para todos. Si bien hay desafíos que superar, hay motivos para ser optimistas sobre el futuro de la ciencia actuarial y su potencial para contribuir a la estabilidad financiera y la gestión de riesgos, es por ello por lo que se realizó este trabajo, para aportar un paso más a la divulgación actuarial en español e informar a un público más general la importancia de esta profesión y darles a conocer un tema en específico e interesante que se encuentra dentro de esta, los cisnes negros.

Este trabajo aporta a la divulgación actuarial 3 trabajos importantes, el primero siendo un artículo para un blog, el segundo un video para un canal de YouTube y el tercero un artículo para una revista científica. Las especificaciones de cada uno de estos trabajos se verán a continuación.

7.2. Artículo para página web

El artículo para la página web/blog: *"Ouroboros Ars et Scientia: Ciencia, Arte y Algo más"* se llevó a cabo con la Maestra Malinalli Wong Rueda profesora de la Universidad Nacional Autónoma de México, la cual fue muy amable en brindar este espacio, ya que es ella la que encabeza este proyecto de divulgación y esta página web en donde las ciencias matemática, física y ahora actuarial encuentran un espacio en donde ser divulgadas y dadas a conocer a un público general. Dentro de esta página se pueden encontrar artículos relacionados con la matemática y el arte, mujeres en distintas áreas científicas (matemática, física y ciencia computacional), polinomiografía, fotografía científica, fractales, rayos-x, temas de programación y ciencias computacionales y distintos temas de índole científica, historias científicas y artísticas se intersectan aquí para aportar a la divulgación científica, es un gran lugar también para ver la intersección entre temas científicos y artísticos, aunque temas puramente matemáticos encuentra su lugar aquí como es este caso, además de contar con redes sociales donde también se distribuye este material, YouTube, Instagram, Facebook y Spotify.

El artículo titulado *"De la actuaría hasta las alas del cisne negro"* explica que es la actuaría de manera sencilla para el público general al que van dirigidos estos recursos y da una introducción a que es lo que los actuarios hacen día con día, así como las distintas ramas en las que estos operan. Después se pasa a plantear la problemática de usar modelos de colas pesadas de una forma simplificada y aprovechando las metáforas que ya hacen en el libro "El Cisne Negro" para comunicar y convertir algo complejo en algo sencillo que todos puedan entender y analizar. Se explican los elementos que constituyen a un cisne negro, así como ejemplos de estos, los cuales son muy fáciles de encontrar a lo largo de la historia, del mismo modo el lector propio con

Figura 7.1: Página web Ouroboros Ars et Scientia

las definiciones que se le brindaron puede inferir por sí mismo que sucesos históricos pueden considerarse cisnes negros. Encaminando al lector al mundo de la actuaría y dándole a conocer una problemática que existe dentro de este actualmente, diciendole al lector que los profesionales tambien se equivocan y que juntos como sociedad debemos de darnos cuenta de estos errores para buscar una solución en conjunto.

7.3. Video para canal de YouTube

Pasando al video que se encuentra en la plataforma de videos YouTube, este toma las consideraciones antes hechas en el artículo y las simplifica todavía más, en este video de casi 13 minutos se explica de manera sencilla lo que también se hace en el artículo, explicar que es la actuaría y que es lo que hace un actuario. Pasando por definiciones de riesgo a manera de acercar al espectador hasta pasar a cuestionar la exactitud de un modelo matemático, este video acompaña a la audiencia brindandoles la introducción a diversos conceptos de la actuaría así como nuevamente presentarles la problemática del cisne negro, las dificultades enfrentadas por los actuarios y el cuidado que se debe de tener al manejar estadísticas. Sobre todo recalcar los errores que resalta Taleb en su libro, el sesgo cognitivo, el sobresimplificar las cosas y las limitaciones que poseemos cuando se trata de calcular como funciona el mundo, no se puede medir todo lo que pasa al mismo tiempo.

El video antes mencionado se titula *"De la actuaría hasta las alas del cisne negro"* y como se mencionó se encuentra en YouTube 7.3.

Para seguir esta parte de la divulgación científica se tomo en cuenta la combinación

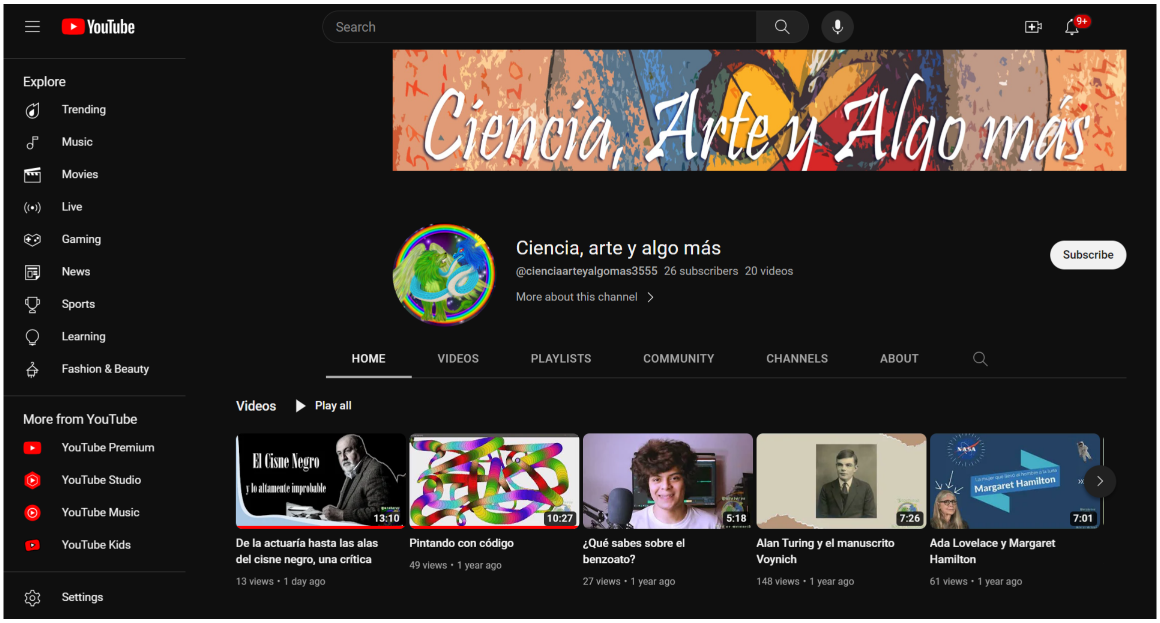


Figura 7.2: Página de Youtube de Ouroboros Ars et Scientia

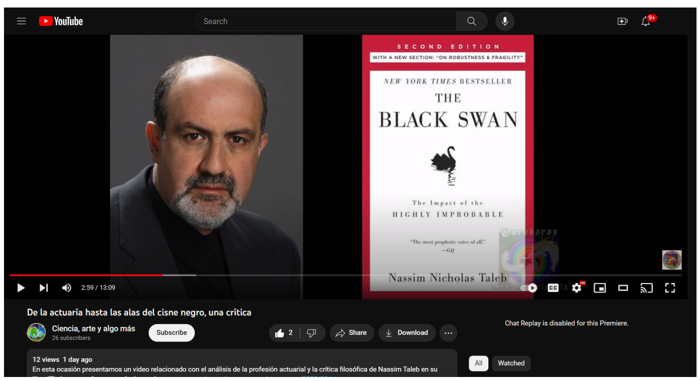


Figura 7.3: Captura de pantalla del video realizado para la página de divulgación Ouroboros Ars et Scientia: Ciencia, arte y algo más, en la plataforma YouTube

entre lo que es el rigor científico y lo que representa un comunicador, entre científico y narrador. La ciencia por su parte se centra en el descubrimiento de ideas y conocimiento mientras que el comunicar mediante un video por ejemplo, se trata de compartir, debatir y probar ideas, por lo que esta combinación se tuvo en consideración para la creación de este video.

El transmitir nuevo conocimiento o tener presente que nuevo conocimiento existe es importante puesto que da a conocer al espectador nuevo conocimiento y le dice que la actuaría junto con la matemática siguen evolucionando y se siguen descubriendo nuevas cosaas y encontrando nuevas problemáticas. Este mismo pensamiento es el que expone Tjempaka Hartomo en su libro [49] y del cual se tomo como base para brindar una mejor divulgación científica pues en este libro el autor conduce al lector para tener unas buenas prácticas de divulgación científica.

Ahora se verá como estas ideas se rescatan y adecuan para moldear un artículo para una revista científica y llegar a más audiencia sin pasar el propósito principal de abarcar y dar esta informacipon a la mayor cantidad de personas posibles.

7.4. Artículo para revista científica

Dentro de este proyecto tambien se contemplo la creación de un artículo científico más especializado y que se entrego a una revista aprovada por la CONACYT, más específicamente la revista ¿cómovez?.

La revista ¿cómovez? es una revista mensual de la dirección general de divulgación de la ciencia de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) que se publica ininterrumpidamente desde diciembre de 1998. Es la única revista de divulgación científica en el país dirigida específicamente a lectores jóvenes (de bachillerato y primeros años de licenciatura). Sus lectores son mujeres y hombres de 14 a 39 años de edad, con ingresos medios de acuerdo al sitio web de esta misma revista [53] sobre todo estudiantes, profesores y trabajadores de empresas en el sector privado.

El propósito de escribir un artículo para esta resvista es para ampliar el rango de lectores e informar a más personas acerca de la profesion actuarial, la carrera de actuaría y claro nuevamente mostrar un problema que ya hace adentro de esta, la cual son los cisnes negros. Mediante este artículo se pretende aparte de los objetivos anteriormente mencionados llegar a más personas, pues esta revista cuenta con buen prestigio además de tiempo en emisión, cosas de las cuales escritores y cientificos pueden aprovechar para divulgar sus respectivas areas de conocimiento.

Al momento de realizado este trabajo el artículo ya ha sido entregado a la revista y ha pasado a revisión, no obstante, la publicación de dicho material es un proceso que conlleva tiempo y revisiones, por lo cual el artículo no ha sido publicado aún. Es por ello que para adjuntar evidencias se han subido algunos materiales a la página de investigación de Research Gate, con el propósito de dejar una constancia y prueba del trabajo realizado.

7.5. Análisis de las herramientas de divulgación

Para terminar la parte de la divulgación se expone en un análisis pequeño las repercusiones que esta tiene en nuestra sociedad y porque es importante divulgar dicho conocimiento.

La divulgación científica es muy importante para una sociedad, la ciencia permite tomar decisiones y es la mejor fuente de información y evidencia para contestar preguntas. Las preguntas que se contestan en este trabajo son muchas pero parten desde, ¿Qué es la actuaría?, ¿Qué es un cisne negro?, ¿Qué modelos estadísticos fallan y por

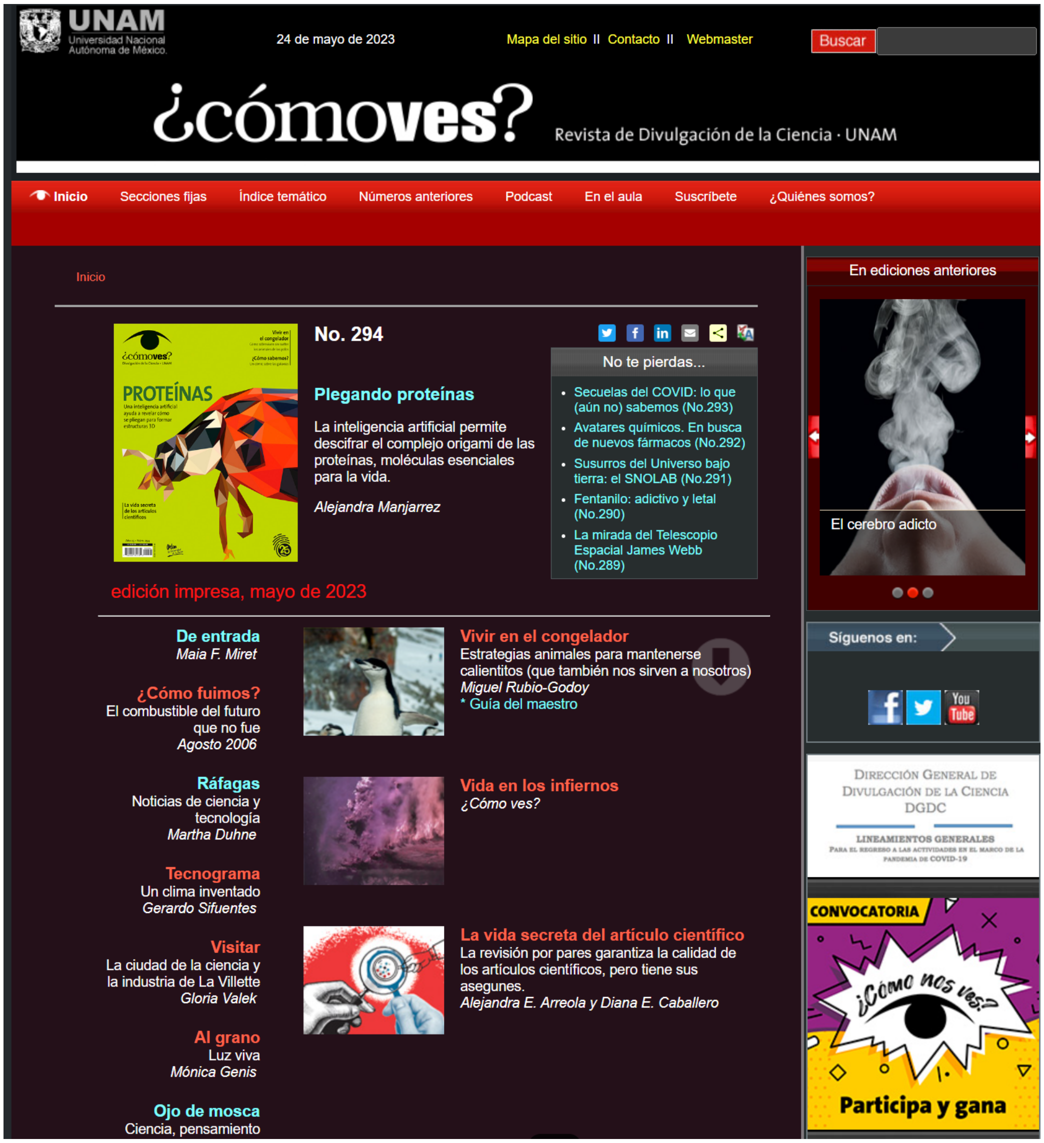


Figura 7.4: Página Web de la revista ¿cómovez?

qué fallan?, entre muchas otras. Las revistas, las páginas web y sobre todo los videos, son herramientas que llegan cada vez a más personas, ya sea por curiosidad, porque se comparten información entre sí o porque es un tema que estén investigando.

Estos tres elementos de divulgación (1 video y 2 artículos) del tema el cisne negro pasaran a informar acerca de los actuarios y las estadísticas que estos usan, así como algunas otras cuestiones que plantea Taleb como el sesgo cognitivo y la sobre simplificación por ejemplo, además a fecha de realizado este trabajo, el cisne negro a pesar de ser un tema conocido para los hablantes anglosajones se tiene muy poca información y mucho menos divulgación para los hispano hablantes por lo que esto convierte a este trabajo en algo innovador, además de divulgar la licenciatura en actuaría y temas estadísticos.

Es importante también recalcar que mediante el descubrimiento de fallas y errores se pueden mejorar y corregir modelos o proponer otros. El crear conciencia acerca de estos errores e informar a las personas que inclusive los profesionales pueden fallar y fallan es muy importante, el recordar estas fallas y tener presente el hecho de que pueden volver a suceder conduce hacia una sociedad no tan frágil a los eventos impredecibles, a una sociedad preparada o anti frágil como menciona Taleb.

Se tiene la certeza de que la audiencia que vea este material podrá encontrar la respuesta o una de las razones (la cual son los cisnes negros) a porque suceden las crisis financieras, porque la bolsa de valores cae o también más específicas como por qué algunas estadísticas no pueden estimar esos eventos impredecibles.

Para finalizar se pretende mostrar a la audiencia la importancia que tienen y han tenido los cisnes negros en la historia de la humanidad y como son algo que nunca dejará de existir pues lo altamente improbable siempre seguirá existiendo. Crear una conciencia sobre estos fenómenos informando al público de estar preparados para estos sucesos poco predecibles hace que los cisnes negros puedan ser cisnes grises.

8 Conclusiones

Se ha analizado todo lo que rodea al cisne negro y se han visto también sus consecuencias. Las alas del cisne negro son unas alas grandes que se encuentran en Extremistán, una tierra que se encarga de explicar la magnitud colosal de las cosas, una tierra en donde las distribuciones de cola pesada reinan, pero es una tierra a pesar de todo común en el mundo en el que se vive, ya que muchas cosas son explicadas por lo grandes que son como la riqueza, el internet, la economía y el mundo en general.

Ahora se sabe que se tiene que ir con cuidado en este mundo, pues la grandeza de las cosas y lo grandes que se vuelven van conduciendo cada vez más a extremistán, alejándonos de mediocristán, por lo que se deben de tomar con cuidado los avances tecnológicos y aprender lo que no se ha aprendido.

Este trabajo muestra que los sucesos impredecibles están alrededor de todos nosotros y nos han acompañado a lo largo de la historia. Además, es de importancia comunicar a los demás acerca de estos sucesos, tal vez no se puedan predecir ni evitar por su propia naturaleza, pero si se puede minimizar el daño que ocasionen volviéndonos anti frágiles como Taleb indica.

El propósito de este trabajo fue también el que más personas se informen de estos sucesos mediante la divulgación científica, de esta forma se puede cambiar la perspectiva y pasar de ser un pavo al granjero, después de todo un cisne negro es relativo al conocimiento que un individuo posea.

Analizando los objetivos planteados al inicio de este trabajo se puede decir que efectivamente se cumplieron ya que en primera instancia se informo acerca de un problema matemático controversial, el uso de distribuciones de cola pesada en ámbitos específicos los cuales se vieron junto con sus repercusiones. En segundo lugar se tomaron estas ideas matemáticas y se incorporaron junto con el libro *"El Cisne Negro"* haciendo un análisis de estos. Finalmente, una vez realizado este proceso cognitivo se simplificaron las ideas más importantes con el fin de pasar a la divulgación científica en donde la comunicación de conceptos matemáticos y su explicación debe ser lo más descriptiva y amigable para las personas a las que van dirigidas estas ideas. A todo lo anterior se incorporó el deber y las responsabilidades de un actuario, así como su papel adentro de estas mismas problemáticas ya que el actuario siempre fue un protagonista a lo largo de este trabajo, desde la parte de divulgación en donde se explicó que es lo que estos hacen en el ámbito laboral hasta la parte más matemática viendo su relación con todos los modelos matemáticos anteriormente vistos.

Con el anterior párrafo se puede decir que una vez realizado este proceso se cumplieron los objetivos los cuales eran el divulgar acerca de la profesión actuarial, mostrar que es la actuaría y que es lo que hacen los actuarios. Además de mostrar y dar a conocer una problemática a la que se enfrentan actuarios y matemáticos hoy en día, la idea de los cisnes negros y como estos escapan a los límites de los modelos matemáticos. También podemos remitirnos a la motivación de este trabajo, en donde se dijo que una vez analizado *"El Cisne Negro"* veríamos a los riesgos de una forma distinta, efectivamente no todos los riesgos pueden ser estimados y cubiertos y es aquí en donde entró la idea del autor de construir un sistema que no sea tan frágil hacia estos sucesos impredecibles ya que como se sabe un riesgo los describe perfectamente.

Por último no se debe de olvidar que la idea de un cisne negro también incorpora las cosas buenas, como los sucesos altamente improbables positivos, uno de estos sucesos es la vida misma, pues la probabilidad de vivir es 1 en 400 trillones y dicho evento no puede ser predicho, por todo lo que sabemos y no sabemos, nuestro nacimiento ya sea individual o como raza humana es un evento que nunca hubiésemos predicho, así que al final somos todos esos cisnes negros los cuales hemos tratado de evitar, esto es especialmente irónico, pero es la naturaleza de la vida misma el tener eventos altamente improbables.

A Glosario

Colas Pesadas: Una distribución de cola pesada es una distribución de probabilidad que exhibe una curtosis y asimetría gandes relativa a una distribución normal o exponencial. La clase de distribuciones de colas pesadas incluyen aquellas cuyas colas decaen como las de la ley de potencia.

Distribución de Probabilidad: Una distribución de probabilidad puede ser descrita en varias formas, ya sea una función de probabilidad o una función de densidad.

Familia Gaussiana:

Fractales: Dicho de manera estrictamente matemática un fractal es por definición un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica. Por otra parte dicho de manera sobre simplificada un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas.

Función de Probabilidad: Sea X una variable aleatoria discreta con valores $x_0, x_1, ...$ La función de probabilidad de X, denotada por $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se define como sigue

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{si} \quad x_0, x_1, ... \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función de Densidad: Sea X una variable aleatoria continua. Decimos que la función integrable y no negativa $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función de densidad de X si para cualquier intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x)dx$$

Función de Distribución: Sea X una variable aleatoria cualquiera. La función de distribución de X, denotada por $F(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define como la probabilidad

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Interés Compuesto: A una tasa anual de interés i por periodo, el factor de acumulación del tiempo 0 al tiempo t es

$$a(t) = (1 + i)^t$$

Interés Simple: El interés simple es el que sigue una función de acumulación lineal. La función de acumulación del tiempo 0 al tiempo t a una tasa simple de interés i, donde i es medido en años es

$$a(t) = 1 + it$$

Momentos / Momento: Los momentos de una variable aleatoria X o de su distribución son la colacción de números:

$$E(X), E(X^2), E(X^3), ...$$

correspondientes al primer momento, segunto momento, etc., cuanto tales cantidades existen. Los cuatro momentos más usados en estadística son la media, la varianza, asimetría y curtosis.

Prima: En cuanto al ambito asegurador se refiere una prima es el monto monetario que el asegurado tiene que pagar a la compañia aseguradora para la transferencia de riesgo durante un periodo determinado de tiempo. El pago de está puede ser anual, semestral, trimestral, bimestral o mensual. Las primas se clasifican en distintos tipos cada uno con un propósito específico algunos ejemplos son: prima pura de riesgo, prima fija, prima total o de tarifa, etc.

Teorema del Límite Central: Sean $X_1, X_2, ...$ una sucesión infinita de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media μ y varianza finita σ^2. Entonces la función de distribución de la variable aleatoria

$$Z_n = \frac{(X_1 + ... + X_n) - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

tiende a la función de distribución normal estándar cuando n tiende a infinito.

Variable Aleatoria: Una variable aleatoria es una transformación X del espacio de resultados Ω al conjunto de los números reales, esto es,

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

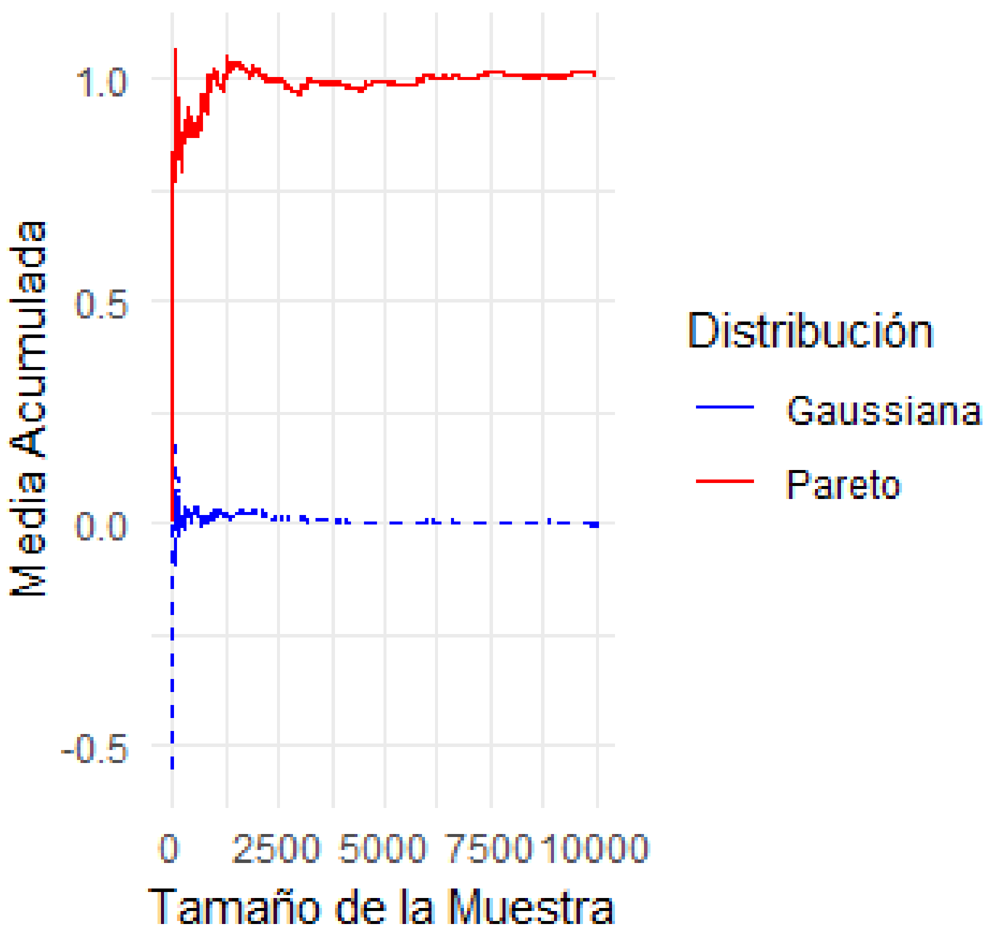
tal que para cualquier número real x,

$$\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} \in \mathbb{F}$$

*Considerando que tenemos un experimento aleatorio cualquiera, junto con un espacio de probabilidad asociado $(\Omega, \mathbb{F}, P)$.

B Imagenes

La siguiente imagen es la compilación del programa realizado en R para replicar el resultado de Taleb, en donde se hace una comparación en dos distribuciones, por un lado la diestribución Gaussiana representando a las colas ligeras (en color azul) y por otro una Pareto con parametros de escala = 1 y forma = 2 siendo esta de colas pesada. Efectivamente se necestita de un mayor tamaño en la muestra e información para llegar a la verdadera media, en el caso de que se tenga poca información se puede ver como se presentan saltos grandes, lo cual es un punto negativo y lo que se quiere demostrar si se emplean colas pesadas. Recordemos que tener una muestra de gran tamaño es más costoso igualmente, un tema verdaderamente interesante y con obstaculos aún más retadores.


Media Acumulada
1.0
0.5
0.0
-0.5
0
2500
5000
7500
10000
Tamaño de la Muestra
Distribución
Gaussiana
Pareto

C Demostraciones y Ejemplos

Lema 1

Sea X una variable aleatoria. Las siguientes afirmaciones, son equivalentes.

(i) X es de cola pesada.

(ii) La función generadora de momentos $M(s) := \mathbb{E}[e^{sX}] = \infty$ para toda $s > 0$.

(iii) $\liminf_{x\to\infty} -\dfrac{\log \Pr(X > x)}{x} = 0$.

Demostración:

$(i) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que X es de cola pesada, con distribución F. Por definición, esto implica que para cualquier $s > 0$, existe una secuencia estrictamente creciente $(x_k)_{k\geq 1}$ satisfaciendo $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} e^{sx_k}\bar{F}(x_k) = \infty \tag{C.1}$$

Ahora se puede acotar $\mathbb{E}[e^{sX}]$ como sigue

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{sX}] &= \int_0^\infty e^{sx} dF(x) \\
&\geq \int_{x_k}^\infty e^{sx} dF(x) \\
&\geq e^{sx_k}\bar{F}(x_k)
\end{aligned}$$

Ya que la desigualdad se mantiene para toda k, se sigue de C.1 que $\mathbb{E}[e^{sX}] = \infty$. Por lo tanto la condición (i) implica la condición (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Supongase que X satisface la condición (ii). Con el propósito de obtener una contradición, asumimos que la condición (iii) no se cumple. Ya que $-\dfrac{\log \Pr(X > x)}{x} \geq 0$ esto significa que

$$\liminf_{x\to\infty} -\frac{\log \Pr(X > x)}{x} > 0.$$

La afirmación anterior implica que existe $\mu > 0$ y $x_0 > 0$ tal que

$$-\frac{\log \Pr(X > x)}{x} \geq \mu \Leftrightarrow \Pr(X > x) \leq e^{-\mu x} \forall x \geq x_0. \tag{C.2}$$

Ahora escogemos s tal que $0 < s < \mu$. Ahora se puede acotar la función generadora de momentos de X como sigue:

$$\begin{aligned} M(s) = \mathbb{E}[e^{sX}] &= \int_0^\infty \Pr\left(e^{sX} > x\right) dx \\ &= \int_0^{e^{sx_0}} \Pr\left(e^{sX} > x\right) dx + \int_{e^{sx_0}}^\infty \Pr\left(X > \frac{\log(x)}{s}\right) dx \end{aligned}$$

Lo que tenemos aquí es la representación de la esperanza de una variable aleatoria no negativa $Y : \mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty \Pr(Y > y) dy$. Mientras que el primer termino en la parte de arriba puede esr acotado por arriba por e^{sx_0}, podemos acotar el segundo usando C.2, desde que $x \geq e^{sx_0}$ es equivalente a $\log(x)/s \geq x_0$.

$$\begin{aligned} M(s) &\leq e^{sx_0} + \int_{e^{sx_0}}^\infty e^{-\mu \frac{\log(x)}{s}} dx \\ &= e^{sx_0} + \int_{e^{sx_0}}^\infty x^{\frac{-\mu}{s}} dx \end{aligned}$$

Ya que $\mu/s > 1$, tenemos que $\int_1^\infty x^{-\mu/s} dx < \infty$, lo que implica que $M(s) < \infty$, dando una contradicción. Por lo tanto, la condición *(ii)* implica la condición *(iii)*.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que la variable aleatoria X, teniendo una distribución F, satisface la condición (iii). Por lo tanto, existe una sequencia estrictamente creciente $(x_k)_{k \geq 1}$ que satisface que $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} -\frac{\log \bar{F}(x_k)}{x_k} = 0.$$

Dada $\mu > 0$, esto en turno implica que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} &-\frac{\log \bar{F}(x_k)}{x_k} < e^{-\frac{\mu}{2}} && \forall k > k_0 \\ &\Longleftrightarrow \bar{F}(x_k) > e^{-\frac{\mu x_k}{2}} && \forall k > k_0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{\bar{F}(x_k)}{e^{-\mu x_k}} > e^{\frac{\mu x_k}{2}} && \forall k > k_0 \end{aligned}$$

La última afirmación implica que el $\lim_{k\to\infty} \frac{\bar{F}(x_k)}{e^{-\mu x_k}} = \infty$, lo que implica que $\limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x_k)}{e^{-\mu x}} = \infty$. Ya que esto es verdadero para cualquier $\mu > 0$, concluimos que la condición (iii) implica la condición (i). $\square$

Colas pesadas en regresiones lineales

Cuando una variable aleatoria de cola pesada es usada en una regresion en contra de una de cola ligera, el coeficiente de determinación R^2 producira un sesgo más alto y requerira de un tamaño de muestra mucho mayor para converger.

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

La regresión lineal asume que las variables aleatorias involucradas siguen una distribución normal y tienen momentos finitos, lo que significa que sus propiedades estadísticas pueden describirse adecuadamente mediante la media y la varianza. Sin embargo, cuando se hace una regresión de una variable aleatoria de cola gruesa (como una con distribución de ley de potencia o de cola pesada) contra una variable aleatoria de cola delgada (como una con distribución normal), la regresión lineal puede ser problemática.

Bibliografía

[1] Acharya, V., Philippon, T., Richardson, M., and Roubini, N. The financial crisis of 2007-2009: Causes and remedies. *Restoring financial stability: how to repair a failed system* (2009), 1–56.

[2] Actuarial Review CAS. Actuarial review, 2023. https://ar.casact.org/, Recuperado el día 2023-04-05.

[3] Aven, T. On the meaning of a black swan in a risk context. *Safety Science 57* (2013), 44–51. doi: https://doi.org/10.1016/j.ssci.2013.01.016, Recuperado el día 2023-02-26.

[4] Baxter, M., Rennie, A., BAXTER, M., Rennie, A., Press, C. U., and of Cambridge, U. *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge University Press, 1996.

[5] Beard, R. *Risk Theory: The Stochastic Basis of Insurance*. Monographs on Statistics and Applied Probability. Springer Netherlands, 2013.

[6] Blyth, M. Coping with the black swan: The unsettling world of nassim taleb. *Critical Review 21*, 4 (2009), 447–465.

[7] Bouchaud, J.-P., Mézard, M., and Potters, M. Statistical properties of stock order books: empirical results and models. *Quantitative Finance 2*, 4 (aug 2002), 251–256. doi: 10.1088/1469-7688/2/4/301, Recuperado el día 2023-06-07.

[8] Campbell, A. The risk of value-at-risk. *Risk 22*, 4 (2009), 42.

[9] Castillo, I. El trabajo del actuario en méxico., 2022. http://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/244392_d29094703d7a4d49a08a10a2a8ddd2ec.html, Recuperado el día 2022-11-29.

[10] Chan, W., and Tse, Y. *Financial Mathematics For Actuaries (Third Edition)*. World Scientific Publishing Company, 2021.

[11] Consorti, A. M. *Crónica de dos siglos del seguro en México*. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, 2005. https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/74253/Cronica_de_dos_siglos_del_seguro_en_Mexico.pdf, Recuperado el día 2022-11-18.

[12] Daykin, C., Pentikainen, T., and Pesonen, M. *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Taylor & Francis, 1993.

[13] Dickson, D., Hardy, M., and Waters, H. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press, 2019.

[14] Encyclopedia Britannica. Actuaría, oferta académica - polish-born french american mathematician, 2023. https://www.britannica.com/biography/Benoit-Mandelbrot, Recuperado el día 2023-01-26.

[15] Gale, R. Mathematics education (and other) perspectives a review of nassim talebs the black swan: The impact of the highly improbable. *The Mathematics Enthusiast 20*, 1 (2023), 85–94. doi: https://doi.org/10.54870/1551-3440.1593, Recuperado el día 2023-01-20.

[16] Goldie, C. M., and Klüppelberg, C. Subexponential distributions.

[17] Gunz, S., McCutcheon, J., and Reynolds, F. Independence, conflict of interest and the actuarial profession. *Journal of Business Ethics 89*, 1 (2009), 77–89. doi: https://doi.org/10.1007/s10551-008-9985-8, Recuperado el día 2022-12-01.

[18] Hickman, J. *History of Actuarial Profession*. John Wiley Sons, Ltd, 2006. doi: https://doi.org/10.1002/9780470012505.tah012.

[19] Howard, T. *Coronal Mass Ejections: An Introduction*. Astrophysics and Space Science Library. Springer New York, 2011.

[20] Jaime Vázquez Alamilla. Proyecto papime pe103215 "la actuaría: Una introducción a los fundamentos y aplicaciones de la carrera"., 2022. http://actuarialscience.com.mx/actuaria-2/areas-de-aplicacion/, Recuperado el día 2022-11-23.

[21] Jolliffe, I. T. *Principal Component Analysis*. Springer New York, NY, 2002. doi: https://doi.org/10.1007/b98835, Recuperado el día 2023-04-20.

[22] Jorion, P. Risk management lessons from long-term capital management. *European financial management 6*, 3 (2000), 277–300. doi: https://doi.org/10.1111/1468-036X.00125, Recuperado el día 2023-07-10.

[23] Kirilenko, A., Kyle, A. S., Samadi, M., and Tuzun, T. The flash crash: High-frequency trading in an electronic market. *The Journal of Finance 72*, 3 (2017), 967–998. doi: https://doi.org/10.1111/jofi.12498, Recuperado el día 2023-07-11.

[24] L., D. D. *Historia de la actuaría en México, de sus orígenes hasta el 2021*. Colegio Nacional de Actuarios, 2021.

[25] Mandelbrot, B., and Hudson, R. *The Misbehavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence.* Basic Books, 2006.

[26] Mandelbrot, B., and Hudson, R. *The (mis)behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward.* Profile, 2008.

[27] Mills, A. Should actuaries get another job? nassim talebs work and its significance for actuaries. *Risk management* (2010), 11. URL: https://www.soa.org/493555/globalassets/assets/library/newsletters/risk-management-newsletter/2010/march/jrm-2010-iss18-mills.pdf, Recuperado el día 2023-01-21.

[28] Mouret., M. A. V. *El ala del cisne negro y la modelización con saltos.* Comillas, Universidad Pontifica, Madrid., 2016. url: https://repositorio.comillas.edu/xmlui/handle/11531/15394, Recuperado el día 2023-06-25.

[29] Mullard, M. The credit rating agencies and their contribution to the financial crisis. *The Political Quarterly 83*, 1 (2012), 77–95. doi: https://doi.org/10.1111/j.1467-923X.2012.02268.x, Recuperado el día 2023-07-09.

[30] Nair, J., Wierman, A., and Zwart, B. *The Fundamentals of Heavy Tails: Properties, Emergence, and Estimation.* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2022. url: https://books.google.com.mx/books?id=aEBxEAAAQBAJ, Recuperado el día 2023-06-12.

[31] Nassim Nicholas Taleb. Doing statistics under fat tails, 2015. https://www.fooledbyrandomness.com/FatTails.html, Recuperado el día 2022-11-14.

[32] Nassim Nicholas Taleb. Fooled by randomness - nassim nicholas taleb's home page, 2023. https://www.fooledbyrandomness.com/index.html, Recuperado el día 2023-01-03.

[33] Newman, M. Power laws, pareto distributions and zipf's law. *Contemporary Physics 46*, 5 (sep 2005), 323–351. doi: 10.1080/00107510500052444, Recuperado el día 2023-06-03.

[34] Partridge, E. *Origins: A short etymological dictionary of modern English.* Routledge, 2006.

[35] Rincón, S. L. *Introducción a la teoría del riesgo.* Universidad Nacional Autónoma de México., 2012.

[36] Ross, S. *A First Course in Probability.* Pearson Prentice Hall, 2010.

[37] Royal Statistical Society. John graunt at 400: Fighting disease with numbers, 2023. https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/1740-9713.01421, Recuperado el día 2023-08-20.

[38] S., H. Landmarks in the history of actuarial science (up to 1919), department of actuarial science and statistics, city university, london, city university, actuarial

research paper no. 84, 1996. *Insurance: Mathematics and Economics 18*, 2 (1996), 153–154. doi: https://doi.org/10.1016/0167-6687(96)81453-3.

[39] Society of Actuaries. What is an actuary?, 2022. https://www.soa.org/future-actuaries/what-is-an-actuary/, Recuperado el día 2022-12-01.

[40] Society of Actuaries. Actuarial glossary, 2023. https://www.soa.org/4a537f/globalassets/assets/files/edu/actuarial-glossary.pdf, Recuperado el día 2023-08-06.

[41] Society of Actuaries. The actuary, 2023. https://www.theactuarymagazine.org/, Recuperado el día 2023-04-05.

[42] Society of Actuaries, Judy Feldman Anderson. Education and examination committee of the society of actuaries. commutation functions, 2023. https://www.soa.org/globalassets/assets/files/edu/edu-2009-fall-ea-sn-com.pdf, Recuperado el día 2023-08-06.

[43] Taleb, N. N. Black swans and the domains of statistics. *The American Statistician 61*, 3 (2007), 198–200. doi: 10.1198/000313007X219996.

[44] Taleb, N. N. *Fooled by Randomness: The Hidden Role of Chance in Life and in the Markets*. Incerto Series. Random House, 2008.

[45] Taleb, N. N. Errors, robustness, and the fourth quadrant. *International Journal of Forecasting 25*, 4 (2009), 744–759. doi: https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2009.05.027, Recuperado el día 2023-01-26.

[46] Taleb, N. N. *The Black Swan: Second Edition: The Impact of the Highly Improbable Fragility*. Incerto. Random House Publishing Group, 2010.

[47] Taleb, N. N. Statistical consequences of fat tails: Real world preasymptotics, epistemology, and applications, 2020. doi: 10.48550/ARXIV.2001.10488, Recuperado el día 2023-02-20.

[48] Taleb, P. C. . N. N. Tail risk of contagious diseases. *Nat. Phys. 16* (2020), 606613. doi: https://doi.org/10.1038/s41567-020-0921-x, Recuperado el día 2023-08-10.

[49] Tjempaka Sari Hartomo, J. C. *Sharing Knowledge*. CSIRO Publishing, 2002. doi: 10.1071/9780643069954, Recuperado el día 2023-07-02.

[50] Torres, G. A. A., Arbeláez, L. C. F., and Ceballos, L. E. F. *Cálculo actuarial: Introducción a la actuaría de vida*. Instituto Tecnológico Metropolitano, ITM, 2019.

[51] Universidad Nacional Autónoma de México. Actuaría, oferta académica, 2022. http://oferta.unam.mx/actuaria.html, Recuperado el día 2022-12-02.

[52] Universidad Nacional Autónoma de México. Portal de estadística universitaria, 2022. https://www.estadistica.unam.mx/series_inst/index.php, Recuperado el día 2022-11-12.

[53] UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO. Revista ¿cómoves?, 2023. https://www.comoves.unam.mx/, Recuperado el día 2023-05-24.

[54] WATTS, S. The gaussian copula and the financial crisis: A recipe for disaster or cooking the books? *University of Oxford 8* (2016).