Brückenkurs WiSe 21/22

# Matrizen

Yassin Ouali

7.10.2021

**Zusammenfassung**

Einen wunderschönen guten Morgen. Bei diesem Vortrag wird es um eine Einführung zu linearen Abbildungen und Matrizen gehen. Angefangen wird mit einer Motivation zu linearen Abbildungen und grundlegenden Eigenschaften. Ist das geklärt schauen wir uns an, was eine Matrix überhaupt ist und leiten uns im Zusammenhang mit linearen Abbildungen einige Rechenregeln für Matrizen her. Zum Ende hin reden wir über lineare Gleichungssysteme und den Gauss-Algorithmus.

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen werden euch stets und ständig in der Physik begegnen.

- Eine Ableitung ist eine lineare Abbildung (Das ist bei weitem Grund genug, sich damit auseinanderzusetzen).
- Lineare Gleichungssysteme können mithilfe von Matrizen gelöst werden.
- In der Theoretischen Physik kommen Matrizen für Koordinatensystem Transformationen sehr häufig vor.

**Definition 1.1**

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der Reellen Zahlen und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. So heißt sie linear, falls für alle $x, y \in \mathbb{R} \wedge \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
2. $f(x + y) = f(x) + f(y)$

oder beides auf einmal:

3. $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

In Worte gefasst sagt diese Definition aus, dass es egal ist, ob ich zwei Elemente zuerst addiere und den Funktionswert bilde, oder andersherum (analog zum Skalar). Nun schauen wir uns einige Beispiele an:

**Beispiel 1.1**

Seien $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann ist:

1. $f(x) := ax + b; \quad f(x + y) = a(x + y) + b = ax + by + b = f(x) + f(y) - b$
   $f(\lambda x) = a\lambda x + b = \lambda f(x) + b - \lambda b$
   $\Rightarrow$ nicht linear falls $b \neq 0$ , aber falls $b = 0$ ,dann ist es linear
2. $f(x) := ax^2 + bx; \quad f(x+y) = a(x+y)^2 + b(x+y) = a(x^2+y^2+2xy)+b(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \Rightarrow$ nicht linear, da der Mischterm stört.

Überlegen wir uns nur noch kurz, wie es mit der Verkettung von linearen Abbildungen aussieht:

**Satz 1.1**

Sind f,g zwei Abbildungen mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear, so ist es auch die Verkettung $(f \circ g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**Beweis 1.2**

Für $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\lambda x + \mu y) &= f(g(\lambda x + \mu y)) = f(g(\lambda x) + g(\mu y)) \\ &= f(\lambda g(x)) + f(\mu g(y)) \\ &= \lambda f(g(x)) + \mu f(g(y)) \\ &= \lambda (f \circ g)(x) + \mu (f \circ g)(y)\end{aligned}$$

$\square$

# 2 Matrizen

**Definition**

Eine $m \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ ist eine Anordnung von $mn$ Elementen von $\mathbb{R}$ nach folgendem Schema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die $a_{ij} \in \mathbb{R}$ nennt man auch die Koeffizienten der Matrix. Die waagerecht geschriebenen n-Tupel

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

heißen die Zeilen und die senkrecht geschriebenen m-Tupel

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die Spalten der Matrix.

**Zusatz:** Diese große Kästchen Schreibweise ist sehr anstrengend zu schreiben, und bei längeren Überlegungen wird es auch sehr unübersichtlich. Deswegen schreibt man anstelle der ganzen Matrix auch einfach $(a_{ij}) = A$ oder $a_{ij} = ...$ ,und meint dabei, dass für jedes Element einer Matrix diese Gleichung gilt. Z. B. überlege man sich die Gestalt der $m \times n$-Matrix mit $a_{i,j} := i \cdot j$.

Ok, nun haben wir einen komischen Block aus Zahlen definiert. Aber wie genau hilft uns der in Bezug auf lineare Abbildungen? Die wirklich ausführliche Antwort wird es erst im Modul Lineare Algebra gegeben, aber schon jetzt können wir einige nützliche Zusammenhänge erkennen.

**Definition 2.2**

Gegeben sei eine $m \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ und ein Vektor im $\mathbb{R}^n$. So definieren wir das Produkt zwischen ihnen wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + ... + a_{1n} \cdot b_n \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 + ... + a_{2n} \cdot b_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot b_1 + a_{m2} \cdot b_2 + ... + a_{mn} \cdot b_n \end{pmatrix}$$

Alternativ schreibt man mit $A$ eine $m \times n$-Matrix und $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$:

$$A \cdot \vec{b} = \vec{c} \quad \text{,mit:} \quad c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_j$$

**Warnung:** Anders als bei der Multiplikation in $\mathbb{R}$, gilt bei der Matrixmultiplikation: $A \cdot \vec{b} \neq \vec{b} \cdot A$, denn letzeres ist nicht definiert. Auch muss der Vektor stets die gleiche Zeilenanzahl wie Spaltenanzahl der Matrix haben.

Das sieht jetzt auf den ersten Blick nach einer etwas nervigen Definition aus. Ich merke mir die immer, in dem ich mir vorstelle, dass die Matrix eine Badewanne ist, und der Vektor darin einen Bauchklatscher macht. Hierzu ein Beispiel:

**Beispiel 2.1**

Multiplizieren wir nun eine $3 \times 3$-Matrix mit einen Vektor im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 0 \\ 8 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \\ 2 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 110 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Nun müsst ihr mir ein bisschen glauben, und wir gehen kurz weiter. Wir wollen jetzt nämlich auch die Skalare Multiplikation wie folgt definieren:

**Definition 2.3**

Sei A eine $m \times n$-Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$ so gilt:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Beispiel 2.2**

Multiplikation einer $2 \times 4$-Matrix mit der Zahl 2:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 31 & 0 & 17 \\ 18 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 62 & 0 & 34 \\ 36 & 6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

**Definition 2.4**

Seien zwei $m \times n$-Matrizen A,B gegeben, so addiert man sie wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

**Zusatz:** Dabei gilt:

$$A + B = B + A \quad \text{und} \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$
$$A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} \quad \text{(Distributivität)}$$

Beispiel 2.3

Hier die Addition zweier $3 \times 3$-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 9 & 11 & 16 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 11 & 14 & 21 \\ 10 & 13 & 25 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Definition haben wir Folgendes geschafft:
Sei $f$ eine lineare Abbildung mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und F die zugehörige Matrix, so gilt:

$$\begin{aligned} & f(x+y) = F \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = F \cdot \vec{x} + F \cdot \vec{y} \quad \text{,für alle } x, y \in \mathbb{R}^n \\ \wedge \quad & f(\lambda \cdot \vec{x}) = F \cdot (\lambda \vec{x}) = \lambda \cdot (F \cdot \vec{x}) \quad \text{,für alle } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Ok doki, die harte Arbeit ist getan: Die Definitionen zu verdauen. Jetzt kommen die Lorbeeren. Die Definitionen, die wir gerade aufgeschrieben haben, führen dazu, dass die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix tatsächlich eine Lineare Abbildung ist.

Satz

Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{b} &\longmapsto A \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

linear. Ist umgekehrt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, dann gibt es genau eine $m \times n$-Matrix A mit $f(\vec{b}) = A \cdot \vec{b}$ für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Den ersten Teil des Satzes werden wir in der Übung beweisen und den letzteren in dem Modul Lineare Algebra. Mit dieser Überlegung unterscheiden wir jetzt nicht mehr zwischen einer Matrix oder einer Linearen Abbildung. Deswegen kann man sich beim Gedanken einer linearen Abbildungen noch folgende Frage stellen: Wie verkettet man zwei Matrizen, Stichwort Matrixmultiplikation.

## 2.1 Matrixmultiplikation

Jetzt geht es zum Kopfzerbrechen. Wir überlegen uns einmal, wie man zwei Matrizen miteinander verkettet. Oben haben wir gezeigt, dass die Verkettung zweier linearer Abbildungen wieder linear ist, also muss es auch dafür eine Matrix geben, die aus den Matrizen der einzelnen Funktionen hervorgeht. Also seien f, g zwei lineare Abbildung, wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Gesucht ist nun die zugehörige Matrix zu $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^n & \xmapsto{F} & \mathbb{R}^m & \xmapsto{G} & \mathbb{R}^k
\end{array}
$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \longmapsto z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix}$$

Nun wollen wir uns erinnern:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \cdot x_j \quad \wedge \quad z_j = \sum_{p=1}^{m} g_{jp} \cdot y_p \tag{1}$$

Das ist alles was wir brauchen, um nun zur Matrix die zu $g \circ f$ gehörige zu finden:

$$
\begin{aligned}
z_i &= \sum_{p=1}^{m} g_{ip} \cdot y_p = \sum_{p=1}^{m} g_{ip} \cdot \left( \sum_{j=1}^{n} f_{pj} \cdot x_j \right) = \sum_{p=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} g_{ip} \cdot f_{pj} \cdot x_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{p=1}^{m} g_{ip} \cdot f_{pj} \right) \cdot x_j = \sum_{j=1}^{n} (f \cdot g)_{ij} \cdot x_j
\end{aligned}
$$

Aha! Wir haben unsere Matrix gefunden!

**Definition 2.5**

Das Produkt $G \cdot F$ zweier Matrizen $G = (g_{ip})$ eine $k \times m$-Matrix und $F = (g_{pj})$ eine $m \times n$-Matrix wird durch

$$(F \cdot G)_{ij} = \sum_{j=1}^{m} g_{ip} \cdot f_{pj}$$

definiert.

**Warnung:** Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ: $(AB)C = A(BC)$ und bezüglich der Addition distributiv: $A(B + C) = AB + AC$ und $(A + B)C = AC + BC$, aber (!) sie ist nicht kommutativ, also gibt es A,B mit $AB \neq BA$.

Da das sehr schwer zu verdauen ist hier noch einmal mit ganz anderen Worten:

Das Multiplikation zweier Matrizen folgt dem Prinzip „Zeilen zuerst, Spalten später“. Damit zwei Matrizen multipliziert werden können, muss die Spaltenanzahl der ersten mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmen. Die resultierende Matrix besitzt nun die Zeilenanzahl der ersten und Spaltenanzahl der zweiten Matrix.

Nun multipliziert man jedes Element der $m$-ten Zeile der ersten Matrix mit dem jeweils passenden Element der $n$-ten Spalte der zweiten Matrix. Die Summe dieser Ergebnisse wird in die $m$-te Zeile und $n$-te Spalte der resultierenden Matrix eingetragen. Klarer wird dieses Prinzip im Folgenden:

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}} = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} & a_{11}\cdot b_{13}+a_{12}\cdot b_{23} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} & a_{21}\cdot b_{13}+a_{22}\cdot b_{23} \\ a_{31}\cdot b_{11}+a_{32}\cdot b_{21} & a_{31}\cdot b_{12}+a_{32}\cdot b_{22} & a_{31}\cdot b_{13}+a_{32}\cdot b_{23} \end{pmatrix}}$$

(Labels above: $3\times 2$ und $2\times 3$ = $3\times 3$)

Es wird die zweite Zeile, erste Spalte der neuen Matrix ausgerechnet. Dafür betrachtet man die zweite Zeile der ersten Matrix und die erste Spalte der zweiten Matrix. Das *erste* Element der zweiten Zeile der Matrix A wird dann mit dem *ersten* Element der ersten Spalte von Matrix B multipliziert. Dazu wird das Produkt des *zweiten* Elements der zweiten Zeile der Matrix A mit dem *zweiten* Element der ersten Spalte von Matrix B addiert.

**Beispiel 2.4**

Hier die Multiplikation einer $2\times 4$-Matrix mit einer $4\times 2$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 10+2\cdot 5+0\cdot 0+1\cdot 7 & 6\cdot 2+2\cdot 5+0\cdot 1+1\cdot 2 \\ 8\cdot 10+6\cdot 5+4\cdot 0+2\cdot 7 & 8\cdot 2+6\cdot 5+5\cdot 1+2\cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 77 & 24 \\ 124 & 54 \end{pmatrix}$$

Hier die Multiplikation einer $2\times 1$-Matrix mit einer $1\times 2$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 10 & 6\cdot 2 \\ 8\cdot 10 & 8\cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 60 & 12 \\ 80 & 16 \end{pmatrix}$$

# 3 Lineare Gleichungssysteme

Nun kommen wir zu einer weiteren nützlichen Interpretation einer Matrix:

**Definition 3.1**

Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix und $\vec{b} = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$, so heißt

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ein lineares Gleichungssystem für $(x_1, ..., x_n)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Die $x_1, ..., x_n$ sind die unbekannten des Systems.

Wie schon bisher, fassen wir auch hier die Matrix A als eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ auf. Das Gleichungssystem heißt dann $A\vec{x} = \vec{b}$.

**Definition 3.2**

Unter der Lösungsmenge des zu $(A, b)$ gehörigen Gleichungssystems verstehen wir

$$\text{Lös}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$$

Man kann statt Lös$(A, \vec{b})$ auch $A^{-1}(\{\vec{b}\})$ schreiben. Solch ein Gleichungssystem nennt man lösbar, wenn die Lösungsmenge nicht leer ist.

# 4 Der Gauss-Algorithmus

Jetzt schauen wir uns DAS Verfahren zur praktischen Lösung von Gleichungssystemen an. Verändert man das Gleichungssystem dadurch, dass man zwei Gleichungen vertauscht, eine Gleichung mit $\lambda \neq 0$ multipliziert oder ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addiert, so ändert sich die Lösung des alten Systems nicht.

**Warnung:** Spalten darf man nicht vertauschen, oder man macht solche Umformungen, muss sich diese aber merken, um am Ende sein Ergebnis richtig zu interpretieren.

Definition 3.3

Sei A eine $m \times n$-Matrix und $\vec{b}$ ein m zeiliger Vektor. Dann gibt es ein zugehöriges Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$. Die Matrix mit Vektor  als zusätzliche Spalte nennt man erweiterte Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Man schreibt auch:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Hat man die erweiterte Matrix aufgellt, so vertauscht man jetzt solange Zeilen, bis $a_{11} \neq 0$. Ist das gelungen, tötet man mit diesem Element alle anderen darunter, also in den unteren Zeilen. Hat man das geschafft, geht man in die zweite Zeile und Spalte, vertauscht dann wiederum solange Zeilen, bis $a_{22} \neq 0$. Ist das auch geschafft, so tötet man alle darunterliegenden Elemente, also in der gleichen Spalte. Dies tut man jetzt sukzessiv, bis es nicht mehr geht und erhält eine Matrix der Form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$$

So, jetzt kann man aber ganz konkret die Lösungen aufschreiben. Angefangen bei der untersten Zeile:

$$x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}$$

Das setzt man jetzt sukzessive ein und berechnet die anderen Unbekannten:

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= \frac{1}{a'_{n-1,n-1}}(b'_{n-1} - a'_{n-1,n}x_n) \\ x_{n-2} &= \frac{1}{a'_{n-2,n-2}}(b'_{n-2} - a'_{n-2,n}x_n - a'_{n-2,n-1}x_{n-1}) \\ &\text{usw. ...} \end{aligned}$$

Jetzt keine Bange Das war jetzt alles Theorie, aber in der Praxis ist es wirklich ein leichtes Verfahren. Also hier jetzt ein Beispiel:

Beispiel 3.1

Wir fangen mit einem gegebenen Gleichungssystem an:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 + 0 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Der Gaußsche Algorithmus ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xmapsto{II+3I} \\ \xmapsto{I+III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right) \xmapsto{II+III} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{6}(-6) = -1 \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(-2+1) = \frac{1}{2} \\ x_1 &= -(-2+1-2\cdot\frac{1}{2}) = 2 \end{aligned}$$

Die Lösung ist also $x = (2, \frac{1}{2}, -1)$.

# 5 Hilfreicher Tipp

Die Playlist des YouTubers 3Blue1Brown über Lineare Algebra birgt eine Menge interessanter Fakten. Dank der wunderbaren Visualisierung versteht man dort oft mehr, als es in Vorlesungen je möglich wäre. *Hier* eine Verlinkung. (Es gibt sogar Untertitel in sehr vielen Sprachen!)