Brückenkurs SoSe 24

Ei- bis mehrdimensionale Differenzialrechnung

Yassin Ouali

04.04.2024

Zusammenfassung

Einen wunderschönen guten Morgen. Bei diesem Vortrag wird es um eine Einführung zu Differenziation im ein- bis mehrdimensionalen gehen. Hierbei wird der Fokus eher auf die Idee, als auf mathematische Präzision gelegt. Ich hoffe es wird euch Spaß machen.

Inhaltsverzeichnis

1 1D Differenzialrechnung

Begonnen wird mit der Untersuchung von Funktionen, die von einer Variablen abhängen und auf die reellen Zahlen abbilden. Dies macht man in der Physik häufig, um ein komplexes Problem z. B. erstmal auf einer Koordinatenachse zu verstehen, und es anschließend auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern. Die Folgende Diskussion geht sehr schnell voran und ist nur dazu da ein paar Grundideen zu geben, was passieren kann und wo die Reise hingeht. Um es im Detail zu verstehen warten die nächsten Semester auf euch.

1.1 Vom Steigungsdreieck zum Differenzial

Das Differenzial ist ein Versuch komplizierte Funktionsverläufe lokal Affin zu approximieren. Affin bedeutet, dass es sich um eine lineare Funktion handelt, die um einen konstanten Vektor verschoben wird. Es wird also eine affine Funktion der Form

$$f_{\Delta x}(x) = a_{\Delta x}\,(x - x_0) + b$$

gesucht, welche sich bestmöglich an einem Punkt x_0 an eine “komplizierte“ Funktion, z. B.

$$g(x) = 10\sin(4x) + e^x - x^3 \tag{1}$$

anschmiegt. Dafür wird zu Beginn zur Bestimmung der linearen Funktion das Steigungsdreieck benutzt, sodass

$$a_{\Delta x} = \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

gewählt wird. a wird Steigung genannt. Für den Verschiebungsvektor gilt

$$f_{\Delta x}(x_0) = b \overset{!}{=} g(x_0)$$

In Bild 1 ist eine solche Folge für verschiedene Δx dargestellt. Das Differenzial ist dann der Grenzwert der Steigung für $\Delta x \to 0$:

Definition Differenzial

Sei U eine offenes Intervall, dann ist das Differenzial einer Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ am Punkt $x_0 \in U$ der Grenzwert

$$g'(x_0) = \frac{dg}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

Eine andere Notation statt des Apostrophes ist das infinitesimale Steigungsdreieck $\frac{d}{dx}$. Ableitung und Differenzial sind Synonyme.

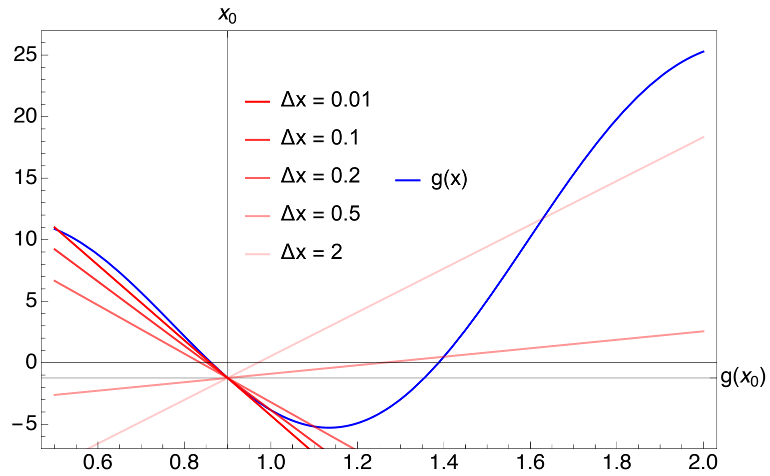

Abbildung 1: Approximation einer Funktion an einer Stelle x_0 durch Sekanten

Beispiel Ableitung von x^2

Sei $g(x) = x^2$ dann

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + \Delta x^2 + 2x_0 \Delta x - x_0^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + 2x_0 = 2x_0$$

Um die Erinnerung wieder aufzufrischen sind hier einige Ableitungen wichtiger Funktionen:

g	const.	x^α	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$	$e^{\alpha x}$	$\ln(x)$
g'	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$1+\tan^2(x)$	$-1-\cot^2(x)$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\frac{1}{x}$

Es ergibt sich also als beste lineare Approximation der ursprünglichen Funktion:

$$g(x) \approx f'(x_0)\,(x - x_0) + g(x_0),$$

auch Tangentengleichung genannt. Es kann also jeder Funktion (falls sie differenzierbar ist) an jedem Punkt ein Differenzial zugeordnet werden. Dies wird dann als neue Funktion $f'(x)$ aufgefasst. Sei C die Menge aller differenzierbaren Funktionen, dann ist

$$', \frac{d}{dx} : C \to C'$$
$$f(x) \mapsto f'(x)$$

eine Abbildung zwischen Funktionenräumen, mit $C' = \{f' | f \in C\}$. Höhere Differenziale sind dann iteriert Differenziale der Differenziale, wie z. B.:

$$\left(x^2\right)^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2}x^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}x^2\right) = \frac{d}{dx}2x = 2.$$

Solche Abbildungen von Funktionen auf andere Funktionen, in denen eine Ableitung involviert ist, heißen Differenzial-Operatoren. Ein Beispiel für einen ersten nicht trivialen Operator wäre z. B.:

$$L = c_0 + c_1\frac{d}{dx} + c_2\frac{d^2}{dx^2} \Rightarrow Lg = c_0 g + c_1 g' + c_2 g''$$

mit $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Aus 1.1 können dann folgende Rechenregeln für das Finden von Differenzialen aufgestellt werden:

Rechenregel Differenzierregeln

Summenregel $(f+g)' = f' + g'$

Vielfache $(\alpha f)' = \alpha f' \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$

verallgemeinerte Produktregel

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'$$

Leibniz'sche Regel $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Kettenregel $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$

Ableitung der Umkehrfunktion $\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Beispiel Anwendung der Differenzialregeln

- $(3x^3 + 4\cos(x))' = 9x^2 - 4\sin(x)$ (Summenregel und Vielfache)
- $(\sin^2(x))' = (\sin(x)\sin(x))' = \cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ (Produktregel mit $f(x) = g(x) = \sin(x)$)
- $(x\sin(x)e^{2x})' = \sin(x)e^{2x} + x\cos(x) + e^{2x} + x\sin(x)2e^{2x}$ (verall. Produktregel)
- $(x\sin(x))^{(4)}$ Nach Leibniz-Regel $(fg)^{(4)} = f^{(4)}g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg^{(4)}$ ergibt sich mit $f(x) = x$ und $g(x) = \sin(x)$, dass man wegen $f'(x) = 1$ und $f'' = f''' = f^{(4)} = 0$ nur die letzten Terme der Summe benötigt. Aus $g'''(x) = -\cos(x)$ und $g^{(4)}(x) = \sin(x)$ erhält man dann $(x\sin(x))^{(4)} = -4\cos(x) + x\sin(x)$
- $$\begin{aligned}\left(\frac{x^2+3}{(x-4)^2}\right)' &= \frac{2x(x-4)^2 - (x^2+3)2(x-4)}{(x-4)^4} = \frac{2x(x-4) - (x^2+3)2}{(x-4)^3}\\ &= \frac{2x^2 - 8x - 2x^2 - 6}{(x-4)^3} = \frac{-8x-6}{(x-4)^2}\end{aligned}$$

  Bei Anwendung der Quotientenregel auf gebrochen rationale Funktionen lässt man Zähler und Nenner so lange wie möglich in faktorisierter Form stehen, da man immer kürzen kann, wenn ein Faktor in höherer als erster Potenz im Nenner auftritt.
  Alternative: statt der Quotienten- die Produktregel benutzen:

  $$\left(\frac{x^2+3}{(x-4)^2}\right)' = \left((x^2+3)\,(x-4)^{-2}\right) = 2x(x-4)^{-2} + (x^2+3)(-2)(x-4)^{-3}$$

  Jetzt wird der Term mit dem kleinsten Exponenten ausgeklammert:

  $$= \big(2x(x-4) + (x^2+3)(-2)\big)\,(x-4)^{-3} = (-8x-6)(x-4)^{-3}$$

- $(\sin(x^4))'$ Mit der äußeren Funktion $f(x) = \sin(x)$ und der inneren Funktion $g(x) = x^4$ erhält man mit der Eselsbrücke “äußere Ableitung mal innere Ableitung„$(\sin(x^4))' = \cos(x^4)4x^3 = 4x^3\cos(x^4)$
- $(\arctan)'$ Die Regel über die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} lässt sich dann gut verwenden, wenn man die Ableitung f' der Funktion f durch f ausdrücken kann. In diesem Beipiel ist $f(x) = \tan(x)$ und $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + (f(x))^2$.

  $$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{(1+\tan^2)(\arctan(x))}\\ &= \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

1.1.1 Eindimensionale nicht differenzierbare Funktionen

Nun wäre die Welt zu schön (oder auch langweilig), wenn jede Funktion differenzierbar wäre. Aus diesem Grund ist nicht jede Funktion differenzierbar. In Abbildung 2 sind ein

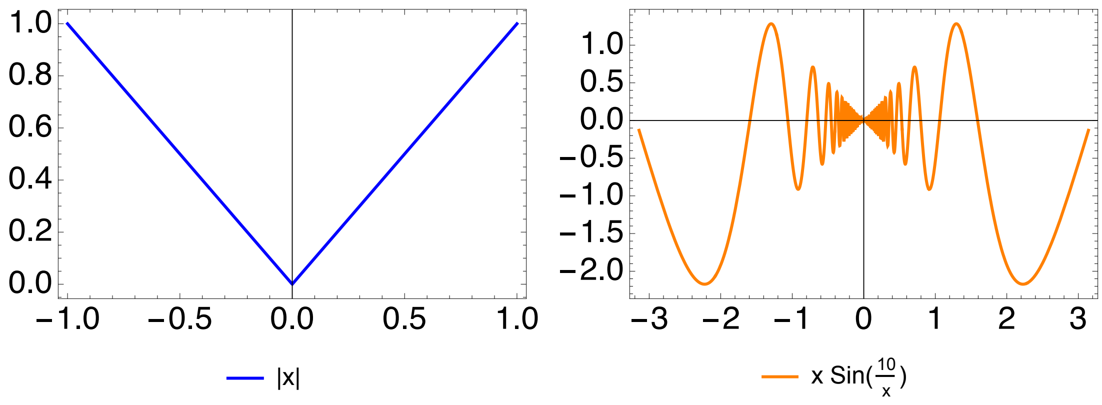

Abbildung 2: Geplottet wurden verschiedene Funktionen, die nicht differenzierbar sind

paar Beispiele dargestellt. Der blaue Plot ist die Betragsfunktion. An der Stelle $x_0 = 0$ lässt sich keine anschmiegende Gerade anbringen, der rechtsseitige Grenzwert ist ungleich dem linksseitigen

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} a_{\Delta x} = -1 \neq 1 = \lim_{\Delta x \downarrow 0} a_{\Delta x}$$

Im rechten Bild mit orangenen Graphen oszilliert die Funktion „unendlich stark” um $x_0 = 0$. Dort kann man also auch am Nullpunkt keine Gerade anlegen

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) = \text{existiert nicht}$$

Die Ableitung exisiert hier also auch nicht.

1.2 Vom Differenzial zur Taylorentwicklung

Nun ist es so, dass eine Näherung durch eine lineare Funktion nicht immer ausreicht, um interressante Funktionenverläufe zu modellieren. Man kann ja versuchen die zu untersuchende Funktion durch Polynome höherer Ordnung zu approximieren ($x^2, x^3, x^4, \ldots$; Ein tieferes Verständnis warum Polynome zur Approximation gut geeignet sind, gibt der Satz von Stone-Weierstraß). Der Ansatz lautet also nun:

$$g(x) \approx \sum_{n=0}^{N} c_n (x - x_0)^n.$$

Jetzt müssen wir nur noch an die Koeffizienten c_n herankommen. Hierfür wird n-Mal Differenziert und die Stelle x_0 untersucht:

$$g(x_0) \stackrel{!}{=} c_0 \quad g^{(1)}(x_0) \stackrel{!}{=} c_1 \quad g^{(2)}(x_0) \stackrel{!}{=} 2!\, c_2 \quad g^{(3)}(x_0) \stackrel{!}{=} 3!\, c_3 \quad \dots \quad g^{(N)}(x_0) \stackrel{!}{=} N!\, c_N$$

So haben wir N-Bestimmungsgleichungen für N Koeffizienten gefunden, sodass sich ergibt:

$$g(x) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Beispiel Taylorreihe von $u(x) = -\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$ um $x_0 = 0$

Zunächst werden alle Ableitungen bestimmt. Also der Reihe nach:

ν	0	1	2	3	...	n
$u^\nu(x)$	$-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$	$\frac{1}{2-x}$	$\frac{1}{(2-x)^2}$	$\frac{2!}{(2-x)^3}$	...	$\frac{(n-1)!}{(2-x)^n}$
$u^\nu(0)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	...	$\frac{(n-1)!}{2^n}$

Die Taylorreihe ($N = \infty$ bei der Taylorentwicklung) lautet damit

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{(n-1)!}{2^n}x^n.$$

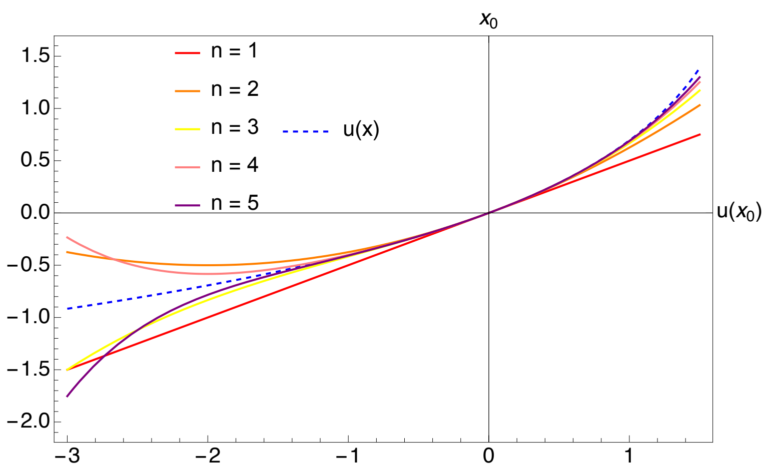

Abbildung 3: Taylorreihe von $u(x) = -\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$ um $x_0 = 0$

Um auch auf die "komplizierte" Funktion (1) vom Beginn zurückzukommen ist in Abbildung 6 zu erkennen, wie eine immer bessere Approximation erreicht wird, je mehr Monome zur Beschreibung hinzugenommen werden. Versucht man ein Polynom durch ein Taylorpolynom zu nähern, so wird das Taylorpolynom exakt. An dieser Stelle, ist noch wichtig, dass das Taylorpolynom wie das Differenzial auch komplett versagen kann. In Abbildung 7 versuchen wir eine „zusammengeklebte“ Funktion zu approximieren. Die Funktion ist stetig

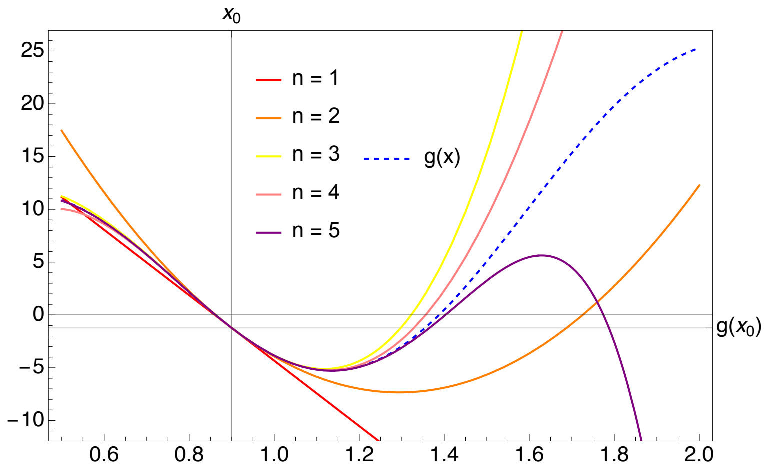

Abbildung 4: Approximation einer Funktion durch Taylorpolynome

und auch ihre erste Ableitung, aber da die Taylorentwicklung von der lokalen Information ausgeht versagt sie hier komplett für größere Abstände.

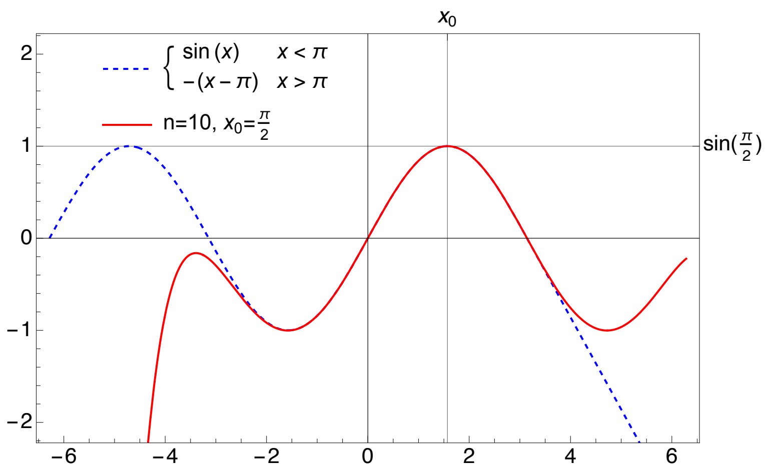

Abbildung 5: Approximation einer Funktion ein Taylorpolynom, welches den Funktionenverlauf in größerer Umgebung nicht sehr gut beschreibt.

Zusatz: Das Problem des „zusammenklebens“ findet nicht bei komplexen Funktionen statt ($g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), die komplex differenzierbar sind (holomorphe Funktionen). In anderen Worten, man kann holomorphe Funktionen nicht differenzierbar zusammenkleben. Komplexe Differenzierbarkeit ist eine stärkere Bedingung als reelle.

2 N-D Differenzialrechnung

Nun diskutieren wir die schönen Bilder. Begonnen wird damit den Wertebereich zu vergrößern. Es werden also nicht mehr Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ begutachtet, sondern Funktionen von z. B. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Diese Funktionen bekommen schnell physikalische Bedeutungen. So kann z.B. die Temperatur eines Raumes, $T(x,y,z)$, oder einer Tischoberfläche, $T(x,y)$ durch eine solche Funktion. beschrieben werden.

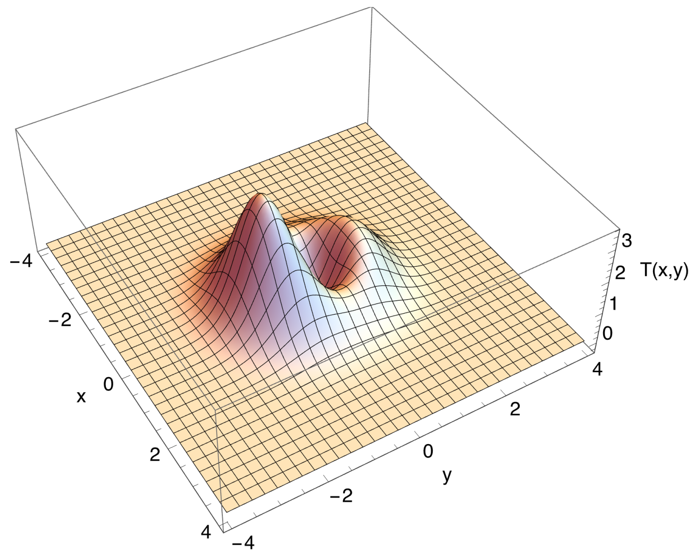

Abbildung 6: Plot einer Funktion mehrerer Veränderlichen: $(x, y, T(x, y))$, mit $T(x, y) = (x^2 + 2.5y^2 - y)e^{1-x^2-y^2}$.

2.1 Verallgemeinerung des Differenzials auf höhere Dimensionen

Wir möchten wieder eine Funktion durch eine lineare Funktion approximieren. In Abbildung 7 ist zu erkennen, dass bei höher dimensionalen Funktionen nicht mehr eine Tangente anzulegen ist, sondern eine Tangentialebene.

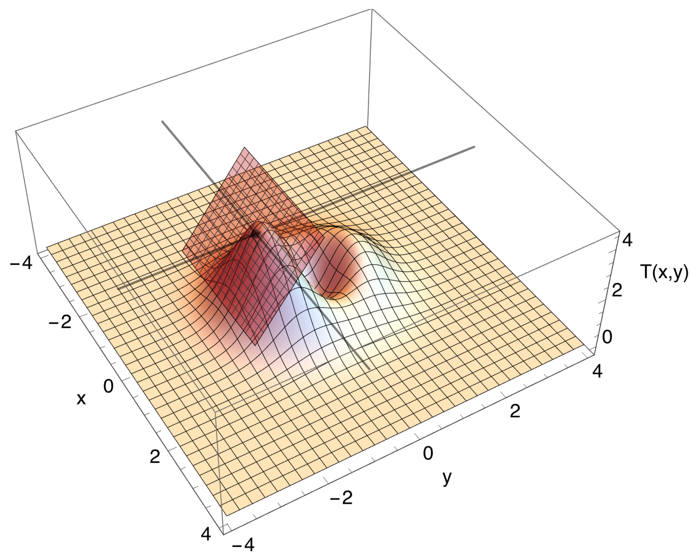

Abbildung 7: Plot einer Funktion mehrerer veränderlichen: $(x, y, T(x, y))$, mit $T(x, y) = (x^2 + 2.5y^2 - y)e^{1-x^2-y^2}$ und einer Tangentialebene am Punkt $(0, 1.1, T\,(0, 1.1))^T$.

Dies bedeutet, dass in Definition 1.1 $\Delta x \to \Delta \vec{x}$ und $g'(x_0)$ nun nicht Zahlen sind, sondern zu einem anderen Objekt erhoben werden, Vektoren. Auch muss dann die Funktion zur Approximation zu einer linearen Funktion im mehrdimensionalen, einer Matrix, erhoben werden. Für ein tieferes Verständnis, warum Matrizen lineare Abbildungen zugeordnet werden können, verweise ich hier auf mein vergangenes Skript "Brückenkurs WiSe 21/22 Matrizen". Jetzt kann man aber in 1.1 nicht durch einen Vektor teilen und auf der rechten Seite steht ein ganzer Vektor. Deswegen wird die Definition umgeschrieben zu:

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} &&\Big| - g'(x_0) \\ 0 &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0 + \Delta x) - g'(x_0)\Delta x}{\Delta x} \\ \rightsquigarrow \quad 0 &= \lim_{|\Delta \vec{x}| \to 0} \frac{g(\vec{x}_0) - g(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) - \vec{g}\,'^T(\vec{x}_0)\Delta \vec{x}}{|\Delta \vec{x}|}. \end{aligned}$$

Was ist jetzt passiert:

- Das Differenzial ist ein Vektor und es wird das Skalarprodukt mit $\Delta \vec{x}$ gebildet, ein Spezialfall der Matrixmultiplikation. Hier im 2-D-Fall:

$$\vec{g}\,'^T(\vec{x}_0)\Delta \vec{x} = \left(g\,'_1(\vec{x}_0), g\,'_2(\vec{x}_0)\right) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = g\,'_1(\vec{x}_0)\Delta x + g\,'_2(\vec{x}_0)\Delta y.$$

  Somit ist $f(x, y) = \vec{g}\,'^T(\vec{x}_0)\,(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{g}(\vec{x_0})$ unsere gesuchte lineare Funktion, welche auch in Abbildung 7 dargestellt ist.

- Der Nenner ist nun in Normstrichen. Dies ist ein Maß für die Länge des Abstandsvektors $\Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \vdots \end{pmatrix}$.

Definition

Sei $\Omega = \times_{i=1}^n (a_i, b_i)$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $\vec{x}_0 \in \Omega$. Dann heßt g (total) differenzierbar in $\vec{x}_0$, wenn ein n dimensionaler Vektor $\vec{g}\,'(\vec{x}_0)$ existiert, sodass:

$$\lim_{\Delta \vec{x} \to 0} \frac{g(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) - g(\vec{x}_0) - \vec{g}\,'^T(\vec{x}_0)\Delta \vec{x}}{|\Delta \vec{x}|} = 0.$$

Bei der obigen Definition ist eine zu große Einschränkung auf das Definitionsgebiet zur Vereinfachung getroffen worden. Ω kann ein beliebiges offenes Gebiet sein.

Zusatz: Analog gilt für vektorwertige Funktionen $\vec{g} : \Omega \to \mathbb{R}^m$:
$\vec{g}$ heißt differenzierbar in $\vec{x}_0$, falls es eine Matrix $\underline{dg} \in M_{m,n}$ (m Zeilen und n Spalten) gibt mit

$$\lim_{\Delta\vec{x}\to 0} \frac{\vec{g}(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) - \vec{g}(\vec{x}_0) - \underline{dg}(\vec{x}_0)\Delta\vec{x}}{|\Delta\vec{x}|} = \vec{0}.$$

Die Matrix $\underline{dg} = J\vec{g} = D\vec{g}$ heißt auch Jacobimatrix oder Funktionalmatrix. Die Differenzierbarkeit vektorwertiger Funktionen ist äquivalent dazu, dass alle Komponenten $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind.

2.1.1 Mehrdimensionale nicht differenzierbare Funktionen

Wie auch bei der 1-dimensionalen Differenzierbarkeit gibt es auch in der mehrdimensionalen Differenzierbarkeit Funktionen, die nicht differenzierbar sind. In Abbildung 8 sind zwei Beispiele dargestellt. In beiden Fällen ist glaube ich anschaulich klar, dass im Ursprung ($\vec{x} = (0,0)^T$) keine Ebene an die Funktion angelegt werden kann.

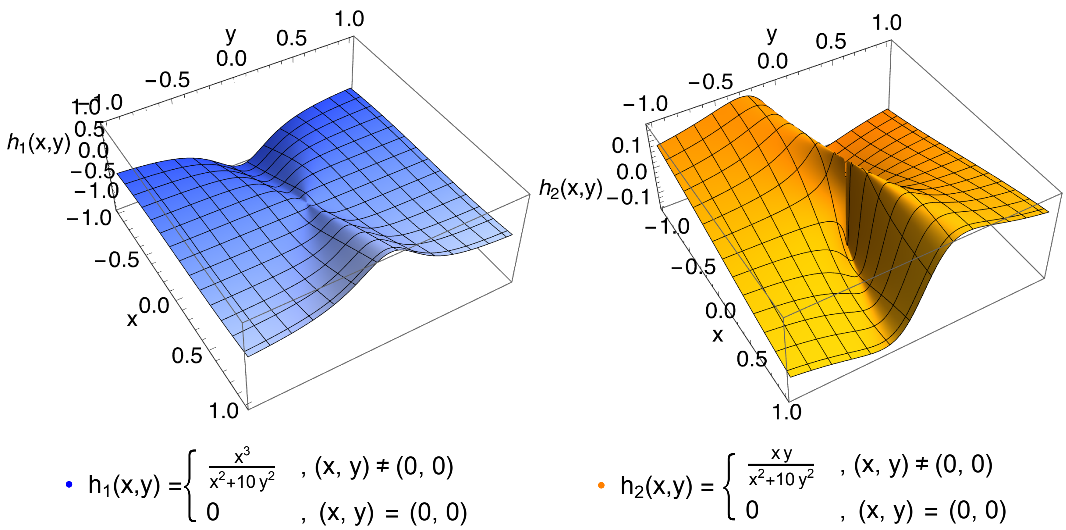

Abbildung 8: Plot zweier mehrdimensionaler Funktionen, die am Punkt $(0,0)^T$ nicht differenzierbar sind.

2.2 Partielle Ableitung und der Gradient

Im obigen Text tauchte $\vec{g}\,'(\vec{x}_0)$ auf. Was ist das denn überhaupt? Hierfür möchte ich erstmal einen anderen Begriff einführen, das partielle Differenzial/ die partielle Ableitung.

2.2.1 Partielle Ableitung

Nun haben wir gesehen, dass das höher dimensionale Differenzial äquivalent dazu ist Funktionen statt durch Geraden, durch höher dimensionale lineare Funktionen, wie z. B. eine Ebene anzunähern. Nun sollte es aber einen Weg, geben das höherdimensionale Differenzial einzuschränken und so auf das 1-D Differenzial zu stoßen. In der Tat, kann man die Funktion $f(x, y)$ implizit als eine 1-D Funktionenschar betrachten, z.B. $f_y(x)$, sodass es zu jedem y eine neue 1-D Funktion gibt. Beim bilden des Steigungsdreiecks kann man jetzt nur diese eine Variable variieren, sodass es zu der partiellen Ableitung kommt.

Definition Partielle Ableitung

Sei $\Omega = \times_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $\vec{x}_0 \in \Omega$. Dann heßt g partiell differenzierbar in $\vec{x}_0$ nach der i-ten Variable, wenn die Funktion

$$x \to g(x_{0,1}, ..., x_{0,i-1}, x, x_{0,i+1}, ..., x_{0,n}),$$

die durch festhalten aller anderen Koordinaten gebildet wird, nach x differenzierbar ist. Somit gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_{0,1}, ..., x_{0,i-1}, x + \Delta x, x_{0,i+1}, x_{0,n}) - g(x_0)}{\Delta x}$$

Andere Bezeichnungen sind $D_i g, \partial_{x_i} g$ oder g_{x_i}. Im 1-D Fall gilt $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dg}{dx}$. Mit anderen Worten ist die partielle Ableitung eine Richtungsableitung in die Richtung einer der Koordinatenachsen.

Beispiel Partielle Ableitungen der Funktion $g(\vec{x}) = xy^2 + z$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x, y, z) - g(x, y, z)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)y^2 + z - xy^2 - z}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x y^2}{\Delta x} = y^2 \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(x, y + \Delta y, z) - g(x, y, z)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x(y + \Delta y)^2 + z - xy^2 - z}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x(y^2 + \Delta y^2 + 2y\Delta y) - xy^2}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2xy\Delta y + x\Delta y^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 2xy + x\Delta y = 2xy
\end{aligned}$$

Was fällt uns auf? Nun die Ableitungen nach x und y lassen den z-Term ganz verschwinden. Analog verschwindet bei der Ableitung nach z jeweils der Term, der nur x und y enthält. Wenn ich nach einer Variable ableite, kann ich also so tun, als ob alle anderen Variablen nur Konstanten wären. Sie fallen beim Ableiten weg und ich kann sie aus der Ableitung herausziehen. Hier ähnlich wie im 1-Dimensionalen ein paar Rechenregeln:

Rechenregel Partielle Differenzierregeln

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

Summenregel	$\frac{\partial}{\partial x_i}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$
Vielfache	$\frac{\partial \alpha f}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}$
Produktregel	$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$
Kettenregel	$\frac{\partial h(g(\vec{x}))}{\partial x_i} = h'(g(\vec{x})) \frac{\partial g}{\partial x_i}$

2.2.2 Der Gradient

Jetzt haben wir alle Mittel zusammen um uns das Differenzial genauer anzuschauen. Die lineare Approximation in 2-D lautet:

$$f(x,y) = \vec{g}'(\vec{x}_0) \cdot \Delta\vec{x} + g(\vec{x_0}) = \vec{g}'_x(\vec{x}_0) \cdot \Delta x + \vec{g}'_y(\vec{x}_0) \cdot \Delta y + g(\vec{x_0})$$

Um es mathematisch sauber zu verstehen braucht man ein bisschen mehr Vorarbeit, auf die ich hier verzichten möchte, aber intuitiv wird jetzt klar, dass wenn ich die Funktion ein stückweit in x-Richtung verschiebe, die partielle Ableitung in x-Richtung das Maß für die Änderung ist, sodass

$$f(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0) \cdot \Delta y + g(\vec{x_0})$$

Schreiben wir das Rückwärts wieder in Vektorform und unterdrücken die Stelle x_0, so gilt:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}^T \vec{x} + g(\vec{x_0}) = \vec{\nabla} g \cdot \vec{x} + g(\vec{x_0})$$

wobei ein neues Objekt eingeführt wurde, der Nabla Operator $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$. Dieser ist im 3-D besonders wichtig für Physiker, wie sich später zeigen wird. $\vec{\nabla} g = \text{grad}(g)$ heißt Gradient.

Warnung: Nur weil partielle Ableitungen berechnet werden können, heißt das nicht, dass das Differenzial tatsächlich existiert. In Abbildung 8 sind Plots von Funktionen, deren partielle Ableitungen existieren, aber trotzdem keine lineare Funktion angeschmiegt werden kann.

Zusatz: Die Jacobimatrix hat die Gestalt:

$$J\vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{g}_1}{\partial x} & \frac{\partial \vec{g}_1}{\partial y} & \cdots \\ \frac{\partial \vec{g}_2}{\partial x} & \frac{\partial \vec{g}_2}{\partial y} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{\nabla} g_1 - \\ -\vec{\nabla} g_2 - \\ \vdots \end{pmatrix}$$

3 Vektorfelder, Nabla Kalkül

Nun sind für einen Physiker nicht nur Funktionen vom $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ relevant, sondern auch vektorwertige Funktion von $\mathbb{R}^{2/3} \to \mathbb{R}^{2/3}$. Solche Funktionen beschreiben z. B. den Fluss einer Flüssigkeit, das elektrische Feld und das Magnetfeld.

$$\vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}, \quad \vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Dies bedeutet, dass jedem Punkt im Raum ein Vektor zugeordnet wird. Zwei Beispiele sind in Abbildung 9 dargestellt.

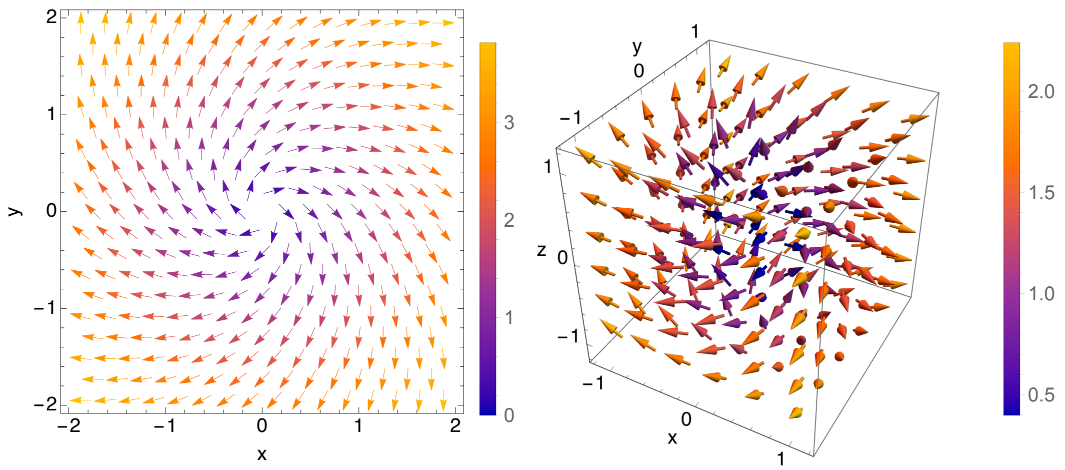

Abbildung 9: Plot zweier Vektorwertiger Funktionen. Die Farbe ist Maß für die Länge des Vektors. Die linke Funktion lautet $\vec{v}(x,y) = (x+y, -x+y)^T$, die rechte $\vec{w}(x,y,z) = (x+y, -x+y, z^2)^T$.

3.1 Nabla-Kalkül

Es klingt zwar auf den ersten Blick äußerst unintuitiv und verwirrend, aber ein Differrentialoperator steht zu Beginn des Studiums im Vordergrund, der Nabla Operator in 3-D und 2-D:

Definition Nabla Operator

Der zwei bzw. drei dimensionale Nabla operator lautet:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ohne physikalische Intuition oder Erklärung, sind hier drei wichtige Operationen, die mit diesem formuliert werden:

Definition Gradient, Divergenz, Rotation

Seien $\vec{v}, \vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mit $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, , z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

- Der Gradient erhebt eine Skalare (nicht vektorielle) Funktion zu einer vektoriellen

$$\vec{v} = \text{grad}(g) = \vec{\nabla} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- Die Rotation (auch Rotor oder Wirbelstärke) eines Vektorfeldes ist das Kreuzprodukt des Nabla Operators mit diesem

$$\vec{w} = \text{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y R - \partial_z Q \\ \partial_z P - \partial_x R \\ \partial_x Q - \partial_y P \end{pmatrix}$$

- Die Divergenz oder auch Quellstärke ist das Skalarpodukt mit dem Nabla Operator

$$g = \text{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla}^T \vec{v} = \partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R$$

Beispiel Divergenz und Rotation von $\vec{F} = (3x, xy, z)^T$

- Divergenz:

$$\vec{\nabla}^T \vec{F} = 3 + x + 1 = 4 + x$$

- Rotation:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$$