

Les bons réflexes pour réussir

MP MP*
PT PT*
PC PC*
PSI PSI*

Électromagnétisme

- > VÉRIFIER SES **CONNAISSANCES** DE COURS
- > DÉGAGER DES **MÉTHODES** POUR LES EXERCICES
- > SAVOIR RÉDIGER LES **SOLUTIONS**

LIBRARY
N° INV 2945
16-04-10

MP MP*
PT PT*
PC PC*
PSI PSI*

Électromagnétisme

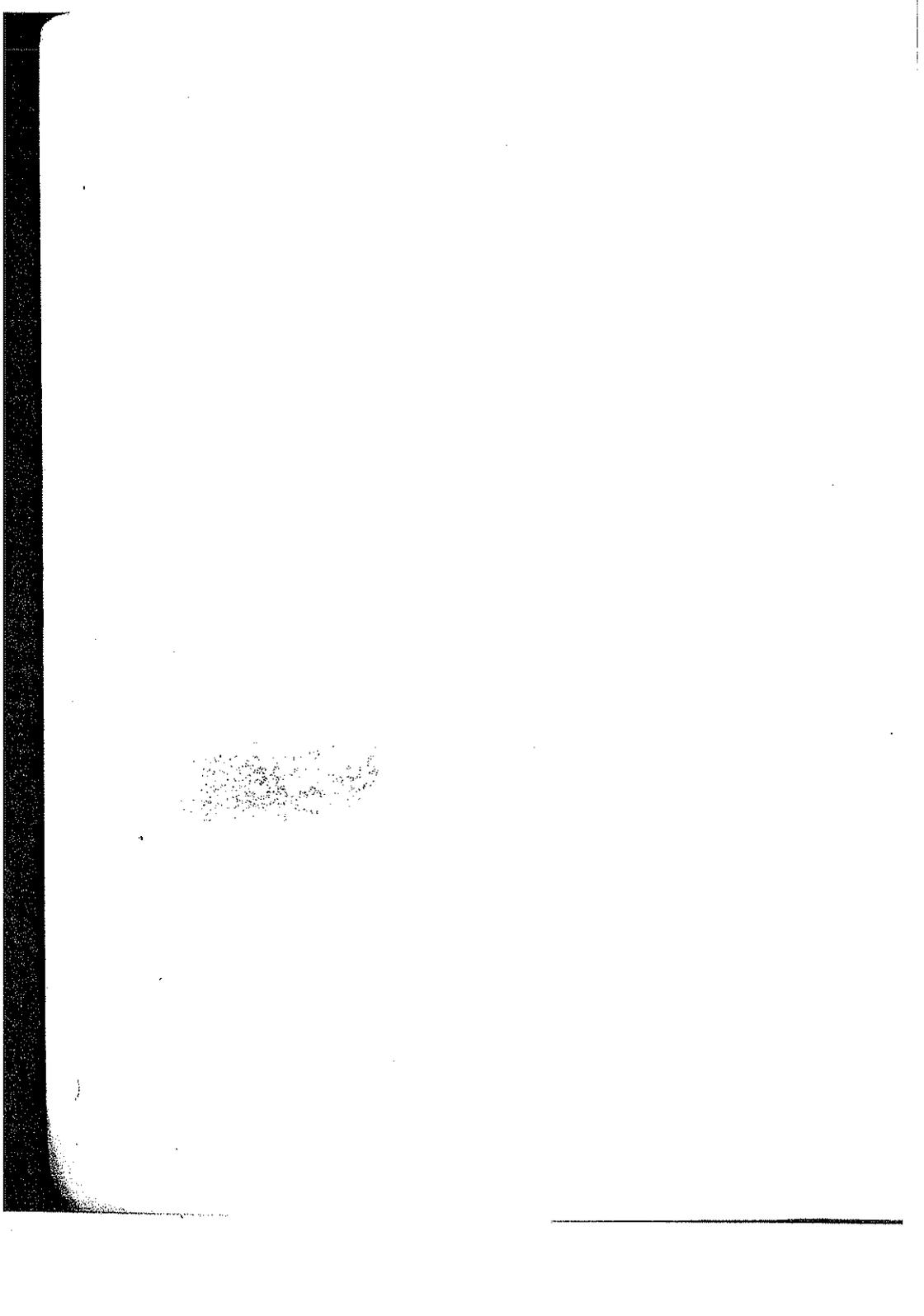
Marie-Claude Herpin

Professeur honoraire
en classes préparatoires
au lycée Hoche
à Versailles

Proctudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

Lycée Technique - Mohammédia





Avant-propos	3
➤ 1 Les outils de l'étude des champs	
1 - Orientation de l'espace	7
2 - Opérateurs différentiels couramment utilisés	9
3 - Propriétés locales des champs	11
4 - Invariances et symétries	13
savoir résoudre les exercices	17
s'entraîner	22
corrigés	23
➤ 2 Électrostatique des milieux conducteurs	
1 - Équations locales de l'électrostatique	27
2 - Conducteur en équilibre électrostatique	29
savoir résoudre les exercices	36
s'entraîner	43
corrigés	48
➤ 3 Magnétostatique	
1 - Équations locales de la magnétostatique	57
2 - Action du champ magnétique sur un conducteur	61
3 - Moment magnétique d'une distribution de courant	62
savoir résoudre les exercices	68
s'entraîner	80
corrigés	85
➤ 4 Les équations de Maxwell	
1 - Équations de Maxwell	97
2 - Équations de Maxwell dans les milieux	98
3 - Conséquences des équations de Maxwell	100
4 - Approximation des régimes quasi-stationnaires	103
5 - Bilan d'énergie électromagnétique	105
savoir résoudre les exercices	110
s'entraîner	121
corrigés	124
➤ 5 Induction électromagnétique	
1 - Compléments d'électrocinétique	133
2 - Induction électromagnétique	135
3 - Circuit fixe dans un champ magnétique variable (cas de Neumann)	135

4 - Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire (cas de Lorentz) ..	139
5 - Conversion électromécanique	141
6 - Courants de Foucault	143
savoir résoudre les exercices	147
s'entraîner	157
corrigés	167

➤ 6 Propagation et rayonnement

1 - Généralités sur les équations de propagation	183
2 - Propagation du champ électromagnétique dans le vide	185
3 - Ondes électromagnétiques dans un plasma	192
4 - Ondes électromagnétiques guidées	195
5 - Réflexion et transmission d'une onde plane	200
6 - Rayonnement dipolaire	202
savoir résoudre les exercices	209
s'entraîner	223
corrigés	232

Annexe	250
---------------------	-----

Index	255
--------------------	-----

Cet ouvrage fait partie de la collection « Classe prépa », une collection d'ouvrages simples et accessibles couvrant l'ensemble des programmes des classes préparatoires aux Grandes Écoles scientifiques.

Élaborée pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés, cette collection est basée sur une approche pragmatique des programmes. Ainsi, chaque chapitre est constitué de cinq rubriques :

- Retenir l'essentiel qui reprend les notions indispensables du cours et indique des conseils pour éviter les erreurs les plus fréquentes ;
- Avant la colle qui regroupe des QCM et des exercices d'application immédiate pour vérifier les connaissances ;
- Savoir résoudre les exercices qui, sur la base d'exercices « classiques », permet aux élèves de développer les méthodes indispensables en prépa : analyse de l'énoncé, démarche à suivre, réflexes à acquérir...
- S'entraîner qui regroupe par ordre de difficultés croissantes une batterie d'exercices ;
- Corrigés où l'ensemble des exercices sont corrigés en détails et commentés.

Coordination éditoriale : Béatrice Jovial-Vernet

Relecture : Gilbert Gié

Fabrication : Lucile Germaine

Composition : Alpha-Edit

Couverture : Marie-Astrid Bailly-Maitre

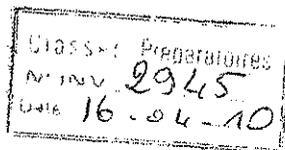
Maquette intérieure : Thierry Méléard

© Nathan, 2008 - ISBN 978-2-09-160478-7

N° d'éditeur : 10142356 - Dépôt légal : août 2008

Imprimé en France par CPI-Hérissey à Évreux - N° 109017

Avant-propos



L'étude de l'électromagnétisme est un des domaines les plus formateurs en physique.

La donnée des quatre équations de Maxwell reliant les champs électromagnétiques à leurs sources en est toute la base théorique. Le reste n'en est qu'une exploitation.

On y voit donc les conséquences de la linéarité de ces expressions et toute la richesse qu'apporte le formalisme mathématique lorsqu'il est convenablement maîtrisé.

L'étude des ordres de grandeur des temps ou des longueurs caractéristiques permet des simplifications typiques du raisonnement en physique.

Les applications de l'électromagnétisme se retrouvent dans tous les domaines, de la physique atomique à l'électrotechnique, du téléphone portable au TGV.

Cet ouvrage a été conçu pour aider les étudiants à s'approprier les techniques de raisonnement et de calcul qu'ils pourront retrouver dans d'autres domaines, en particulier en mécanique des fluides ou en optique.

Lorsque plusieurs approches sont possibles, on les retrouvera soit dans la partie cours, soit dans la partie « avant la colle », de manière à profiter de la richesse d'une double approche d'un même phénomène.

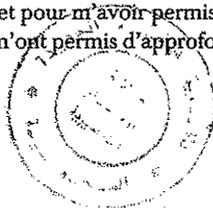
J'ai regroupé dans le premier chapitre le « mode d'emploi » de l'outil mathématique pour qu'il soit facile de s'y référer au fur et à mesure de l'avancée du cours. De même, une annexe rappelle les formules d'utilisation courante dans les exercices et les problèmes.

« Savoir résoudre les exercices » propose des extraits de problèmes de concours illustrant des types de raisonnement qu'il est important de bien connaître, car on les rencontre très fréquemment. On trouvera aussi dans le corrigé quelques indications pour bien lire un énoncé et comprendre en particulier les simplifications qui sont proposées, sans lesquelles l'exercice ne peut être mené à bien.

« S'entraîner » propose des exercices très divers, le plus souvent extraits de concours. Leur difficulté, plus ou moins grande, porte soit sur les modes de raisonnement, soit sur l'utilisation de l'outil mathématique. Les corrigés en sont détaillés pour permettre à l'étudiant de suivre pas à pas la démarche utilisée pour leur résolution.

J'espère que ces quelques chapitres seront utiles au lecteur dans son apprentissage de la physique et sa préparation aux concours.

Je tiens à remercier particulièrement Philippe Fleury pour sa relecture minutieuse et la qualité des échanges que nous avons eus sur certains points délicats, les éditions Nathan, et en particulier Isabelle Ravilly et Béatrice Jovial-Vernet pour m'avoir permis de mener à bien la rédaction de ce livre, et mes élèves dont les questions m'ont permis d'approfondir mes connaissances sur le sujet.



Marie-Claude Herpin

Avant-propos	3
➤ 1 Les outils de l'étude des champs	
1 - Orientation de l'espace	7
2 - Opérateurs différentiels couramment utilisés	9
3 - Propriétés locales des champs	11
4 - Invariances et symétries	13
savoir résoudre les exercices	17
s'entraîner	22
corrigés	23
➤ 2 Électrostatique des milieux conducteurs	
1 - Équations locales de l'électrostatique	27
2 - Conducteur en équilibre électrostatique	29
savoir résoudre les exercices	36
s'entraîner	43
corrigés	48
➤ 3 Magnétostatique	
1 - Équations locales de la magnétostatique	57
2 - Action du champ magnétique sur un conducteur	61
3 - Moment magnétique d'une distribution de courant	62
savoir résoudre les exercices	68
s'entraîner	80
corrigés	85
➤ 4 Les équations de Maxwell	
1 - Équations de Maxwell	97
2 - Équations de Maxwell dans les milieux	98
3 - Conséquences des équations de Maxwell	100
4 - Approximation des régimes quasi-stationnaires	103
5 - Bilan d'énergie électromagnétique	105
savoir résoudre les exercices	110
s'entraîner	121
corrigés	124
➤ 5 Induction électromagnétique	
1 - Compléments d'électrocinétique	133
2 - Induction électromagnétique	135
3 - Circuit fixe dans un champ magnétique variable (cas de Neumann)	135

4 - Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire (cas de Lorentz) ..	139
5 - Conversion électromécanique	141
6 - Courants de Foucault	143
savoir résoudre les exercices	147
s'entraîner	157
corrigés	167

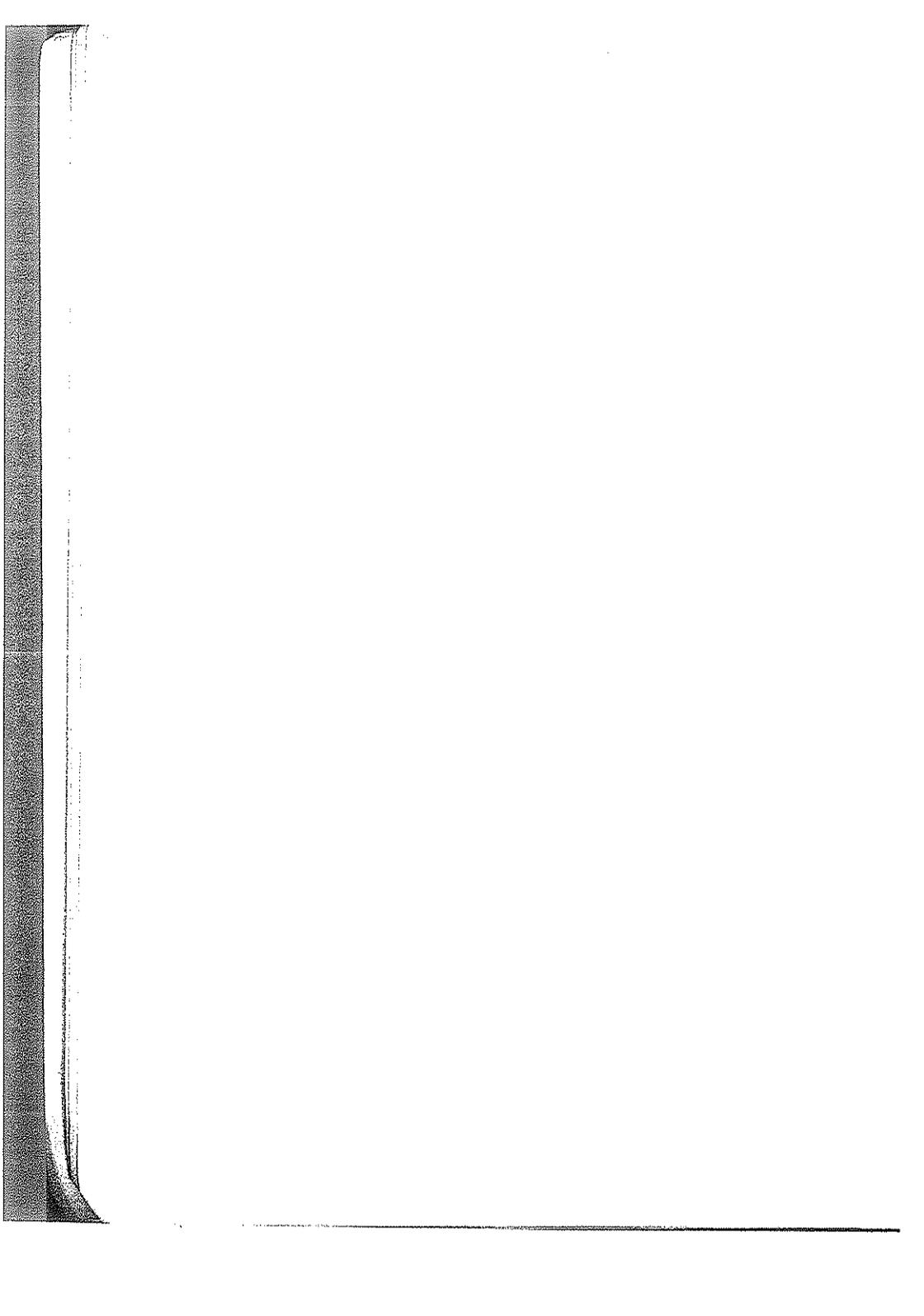


6 Propagation et rayonnement

1 - Généralités sur les équations de propagation	183
2 - Propagation du champ électromagnétique dans le vide	185
3 - Ondes électromagnétiques dans un plasma	192
4 - Ondes électromagnétiques guidées	195
5 - Réflexion et transmission d'une onde plane	200
6 - Rayonnement dipolaire	202
savoir résoudre les exercices	209
s'entraîner	223
corrigés	232

Annexe	250
---------------------	-----

Index	255
--------------------	-----



Les outils de l'étude des champs

1 Orientation de l'espace

1.1. Trièdre direct

Pour définir le repère orthonormé $Oxyz$ direct, on **convient** d'orienter l'axe Oz de manière à ce que le repère respecte la règle suivante connue sous plusieurs noms.

Règle du tire-bouchon

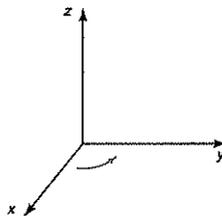
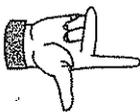
Une rotation de Ox vers Oy entraîne une translation du tire-bouchon vers les z positifs.

Ou bien, de manière équivalente :

Règle des trois doigts de la main droite

Les directions Ox , Oy , Oz sont indiquées respectivement par le pouce, l'index et le majeur de la main droite.

On peut retenir : trois doigts consécutifs, de la droite vers la gauche (figure 1).



Remarque
 ec la main gauche,
 trièdre ainsi obtenu
 ait indirect. Pour
 ir un trièdre direct,
 aurait prendre
 riculaire, l'index
 e majeur.

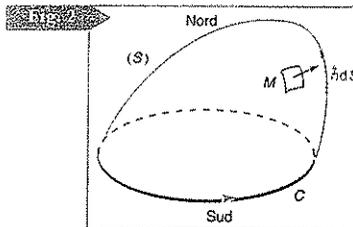
1.2. Surface ouverte

Considérons une surface ouverte (S), s'appuyant sur un contour fermé C orienté (figure 2).

Conventionnellement, on oriente la normale \vec{n} à la surface en un point M à partir du sens de circulation positif sur le contour C .

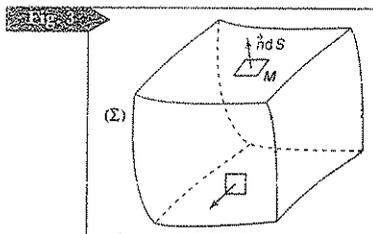
Une rotation dans le sens positif sur le contour C entraîne une translation du tire-bouchon de la face Sud vers la face Nord de la surface. Les normales sont orientées de la face Sud vers la face Nord.

On note $d\vec{S} = \vec{n} dS$ le vecteur de norme l'aire dS et de direction la normale \vec{n} .



1.3. Surface fermée

Considérons une surface fermée (Σ) entourant un volume V : on oriente la normale \vec{n} en un point M de la surface, de l'intérieur de la surface vers l'extérieur (figure 3).



1.4. Propriétés du vecteur surface

1.4.1. Surface fermée

$$\oint_{(\Sigma)} d\vec{S} = \vec{0}$$

1.4.2. Surface s'appuyant sur un contour fermé Γ

$$\vec{S} = \iint d\vec{S} \text{ ne dépend que du contour fermé orienté } \Gamma \text{ sur laquelle elle s'appuie.}$$

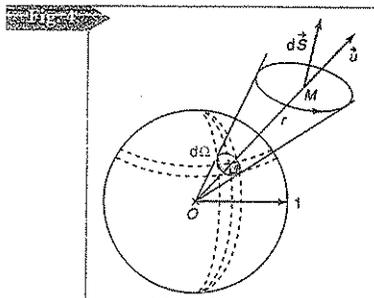
1.5. Angle solide

1.5.1. Définition

L'angle solide sous lequel on voit d'un point O une surface (S) s'appuyant sur un contour fermé C , est la portion d'espace intérieure au cône de sommet O dont les génératrices s'appuient sur le contour orienté C (figure 4).

Par analogie avec la mesure en radians de l'angle entre deux demi-droites, on définit sa mesure Ω en stéradians comme l'aire de la portion de sphère de centre O et de rayon unité qu'il intercepte. Ω est sans dimension.

Si de O on voit la face Sud du circuit orienté, Ω est positif, si on voit la face Nord, Ω est négatif.



$$\Omega = \iint_{(S)} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2}, \text{ avec } \overrightarrow{OM} = r\vec{u}, M \text{ point courant sur la surface } (S).$$

1.5.2. Propriétés

- L'angle solide Ω est indépendant de la surface choisie s'appuyant sur C .
- L'angle solide Ω sous lequel d'un point intérieur à une surface fermée on voit cette surface vaut 4π .
- L'angle solide Ω sous lequel d'un point extérieur à une surface fermée on voit cette surface vaut 0 .
- L'angle solide Ω sous lequel d'un point on voit un plan vaut 2π .

2 Opérateurs différentiels couramment utilisés

Soit $U(\vec{r}, t)$ un champ de scalaires, et $\vec{A}(\vec{r}, t)$ un champ de vecteurs. L'application d'un opérateur différentiel les transforme en un autre champ soit de scalaires, soit de vecteurs.

En coordonnées cartésiennes, $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, soit : $U(x, y, z, t)$ et $\vec{A}(x, y, z, t)$.

Tous ces opérateurs sont linéaires :

$$\text{Op}(\lambda a + \mu b) = \lambda \text{Op}(a) + \mu \text{Op}(b).$$

2.1. Opérateur gradient (noté $\overrightarrow{\text{grad}}$)

Il est défini par : $dU = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot d\vec{r}$

En coordonnées cartésiennes :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz, \text{ et } d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z.$$

En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\text{grad}} U(x, y, z, t) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z.$

2.2. Opérateur rotationnel (noté $\overrightarrow{\text{rot}}$)

Il est défini par le théorème de Stokes : $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$

qui s'énonce ainsi : la circulation du vecteur \vec{A} sur le contour fermé orienté C est égale au flux de son rotationnel à travers une surface (S) quelconque s'appuyant sur C .

Remarque

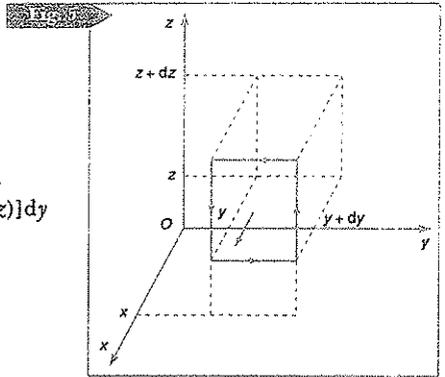
Dans toute la suite, on omettra d'écrire les variables qui n'interviennent pas directement dans le calcul.

Pour trouver la composante x , on l'applique à la surface élémentaire $dydz$.

La circulation du vecteur \vec{A} s'écrit, en regroupant les termes des côtés opposés (figure 5) :

$$\begin{aligned} & [A_x(x, y + dy, z) - A_x(x, y, z)]dz \\ & + [A_y(x, y, z) - A_y(x, y, z + dz)]dy \\ & [A_z(y + dy) - A_z(y)]dz + [A_y(z) - A_y(z + dz)]dy \\ & = \left[\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] dydz = [\text{rot} \vec{A} \cdot \vec{e}_x] dydz. \end{aligned}$$

Les autres composantes s'en déduisent par permutation circulaire.



En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A}(x, y, z, t) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z.$$

2.3. Opérateur divergence (noté div)

Il est défini par le théorème de Green-Ostrogradsky : $\oiint_{(\Sigma)} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{A} dt$

qui s'énonce ainsi : le flux du vecteur \vec{A} sortant de la surface fermée (Σ) est égal à la somme triple de sa divergence sur le volume V intérieur à cette surface.

En coordonnées cartésiennes, on l'applique au volume élémentaire $dx dy dz$.

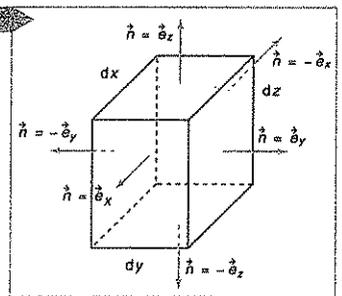
Le flux du vecteur \vec{A} s'écrit, en regroupant les termes des surfaces en regard (figure 6) :

$$\begin{aligned} & [A_x(x + dx, y, z) - A_x(x, y, z)] dydz \\ & + [A_y(y + dy) - A_y(y)] dx dz \\ & + [A_z(z + dz) - A_z(z)] dx dy \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\text{div} \vec{A}(x, y, z, t) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$



2.4. Opérateur Laplacien (noté Δ)

2.4.1. Laplacien scalaire

Il transforme un champ de scalaires en un autre champ de scalaires. Il est défini par :

$$\Delta U = \text{div}(\vec{\text{grad}} U)$$

$$\text{En coordonnées cartésiennes : } \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

2.4.2. Laplacien vectoriel (noté Δ)

Il transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs. Il est défini par :

$$\Delta \vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A})$$

En coordonnées cartésiennes : $\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z$.

2.5. Opérateur $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$

$\vec{B}(\vec{r}, t)$ est un champ de vecteurs quelconques. L'opérateur $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$, appliqué à un champ de scalaires, le transforme en un autre champ de scalaires défini par :

$$(\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})U = \vec{B} \cdot (\overrightarrow{\text{grad}}U)$$

En coordonnées cartésiennes : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}U = B_x \frac{\partial U}{\partial x} + B_y \frac{\partial U}{\partial y} + B_z \frac{\partial U}{\partial z}$.

Appliqué à un champ de vecteurs, l'opérateur $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$ le transforme en un autre champ de vecteurs.

En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{A} &= (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}A_x)\vec{e}_x + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}A_y)\vec{e}_y + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}A_z)\vec{e}_z \\ &= \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(B_x \frac{\partial A_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_y \\ &\quad + \left(B_x \frac{\partial A_z}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_z}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

2.6. Vecteur Nabla $\vec{\nabla}$

C'est l'opérateur en coordonnées cartésiennes : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$.

En coordonnées cartésiennes, et **seulement** en coordonnées cartésiennes, il permet de retrouver rapidement les expressions des opérateurs différentiels :

$$\cdot \overrightarrow{\text{grad}}U = \vec{\nabla}U, \quad \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad \cdot \text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad \cdot \Delta U = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})U = \nabla^2 U.$$

On trouvera dans le formulaire de la page 000 les expressions de ces opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques.

Attention

est valable qu'en coordonnées cartésiennes, et doit être utilisé comme un moyen mnémotechnique.

3 Propriétés locales des champs

3.1. Champs à rotationnel nul

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs \vec{E} soit un champ de gradients est que son rotationnel soit nul en tout point.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0} \iff \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}U$$

U est défini à un champ uniforme près.

La circulation de \vec{E} sur un contour fermé C est alors nulle quel que soit le contour choisi. On peut aussi montrer que les lignes de champ ne sont pas fermées sur elles-mêmes. Pour un tel champ :

- $\vec{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$ en tout point ;
 - \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire V par $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ (on prend $V = -U$ à cause des interprétations énergétiques) ;
 - $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ pour tout contour fermé C ;
- les lignes de champ de \vec{E} ne sont pas fermées et vont d'une source de champ à une autre ou à l'infini.

En électrostatique, le champ \vec{E} est un exemple de champ à rotationnel nul.

3.2. Champs à divergence nulle

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs soit un champ de rotationnels est que sa divergence soit nulle en tout point.

$$\text{div}\vec{B} = 0 \iff \vec{B} = \vec{\text{rot}}\vec{A}.$$

\vec{A} est défini à un champ de gradients près.

Le flux de \vec{B} sortant d'une surface fermée S est alors nul quelle que soit la surface choisie :

\vec{B} est dit à flux conservatif.

On peut aussi montrer que les lignes de champ sont fermées sur elles-mêmes, en entourant les sources de \vec{B} .

- $\text{div}\vec{B} = 0$ en tout point ;
 - \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur \vec{A} par $\vec{B} = \vec{\text{rot}}\vec{A}$;
 - $\oint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ pour toute surface fermée (Σ) (\vec{B} est à flux conservatif) ;
- les lignes de champ de \vec{B} ne se coupent pas, et sont fermées sur elles-mêmes en entourant les sources de \vec{B} .

En magnétostatique, le champ \vec{B} est un exemple de champ à divergence nulle.

3.3. Théorème d'unicité

Si, dans une région de l'espace, on connaît en tout point la divergence et le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r}, t)$, ainsi que les « conditions aux limites », le champ $\vec{A}(\vec{r}, t)$ est défini de manière unique.

Soit une région de l'espace où la divergence et le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{V}(\vec{r}, t)$ sont nuls.

Dans cette région de l'espace, on peut définir le potentiel U dont le champ $\vec{V}(\vec{r}, t)$ dérive. Si, en tout point de la surface fermée délimitant cette région, $U = \text{Cte}(t)$, ou $\vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$ (conditions aux limites), ce champ est identiquement nul.

S'il s'agit de tout l'espace, cela revient à ce que $\vec{V}(\vec{r}, t)$ décroisse avec la distance aux sources au moins en $\frac{1}{r^2}$.

Les conditions aux limites pour $\vec{A}(\vec{r}, t)$ seront donc son comportement à l'infini ou, sur la surface fermée (Σ) délimitant une région, la donnée du potentiel dont il dérive éventuellement ou la valeur de $\vec{A} \cdot d\vec{S}$ en tout point de (Σ).

4 Invariances et symétries

4.1. Principe de Curie

Un phénomène physique possède au moins les éléments de symétrie de ses causes.

4.2. Invariances

Si les sources de champ sont invariantes par translation ou rotation autour d'un axe, le champ possèdera les mêmes propriétés.

Attention : cela s'applique au champ et non au potentiel dont il dérive éventuellement, qui n'est pas la représentation d'un phénomène physique mais un intermédiaire de calcul.

4.3. Symétries par rapport à un plan

4.3.1. Règles de base

Le champ a les mêmes symétries que les sources.

Mais il convient de distinguer deux cas :

◦ La relation liant les sources au champ ne fait pas intervenir l'orientation de l'espace : on parle alors de vecteurs polaires ou de « vrais vecteurs ».

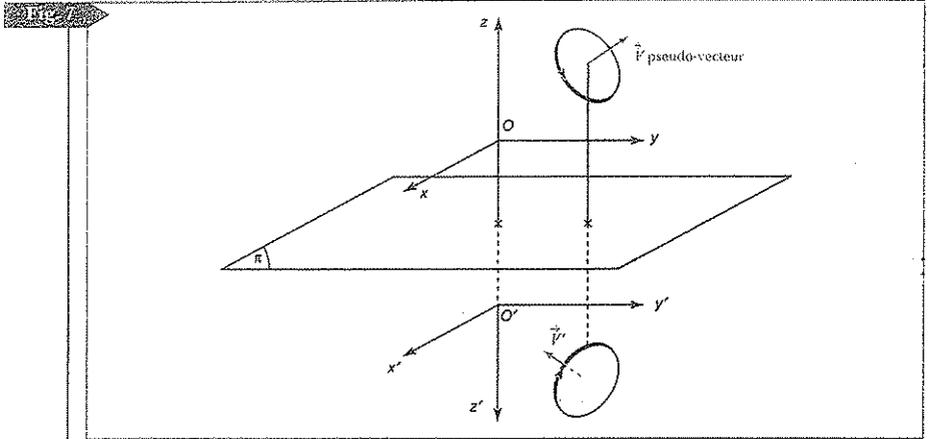
Pour un champ de vecteurs polaires, un plan de symétrie pour les sources est plan de symétrie pour le champ : $\vec{V}(\text{Sym}(M)) = \text{Sym}(\vec{V}(M))$.

Les composantes parallèles au plan sont identiques, les composantes perpendiculaires opposées.

De même, un plan d'antisymétrie pour les sources est plan d'antisymétrie pour le champ.

◦ La relation liant les sources au champ fait intervenir l'orientation de l'espace (produit vectoriel, rotationnel), on parle alors de vecteurs axiaux ou de « pseudo-vecteurs ». Il faut alors tenir compte de ce que le symétrique d'un trièdre direct par rapport à un plan est un trièdre indirect (figure 7) :

$$\vec{V}(\text{Sym}(M)) = -\text{Sym}(\vec{V}(M)).$$



Pour un champ de vecteurs axiaux, un plan de symétrie pour les sources est plan d'antisymétrie pour le champ : $\vec{V}(\text{Sym}(M)) = -\text{Sym}(\vec{V}(M))$.

Les composantes parallèles au plan sont opposées, les composantes perpendiculaires identiques.

De même, un plan d'antisymétrie pour les sources se comporte comme un plan de symétrie pour le champ.

4.3.2. Application

Après avoir repéré les plans de symétrie et d'antisymétrie des sources, on en déduit des indications sur la direction des vecteurs du champ.

Remarque

Pour un champ de vecteurs polaires (resp. axiaux) la donnée d'un plan d'antisymétrie (resp. de symétrie) passant par un point fournit la direction du vecteur du champ en ce point.

- En tout point d'un plan de symétrie pour les sources :
 - le vecteur d'un champ de vecteurs polaires est dans le plan ;
 - le vecteur d'un champ de vecteurs axiaux est perpendiculaire au plan.
- En tout point d'un plan d'antisymétrie pour les sources :
 - le vecteur d'un champ de vecteurs polaires est perpendiculaire au plan ;
 - le vecteur d'un champ de vecteurs axiaux est dans le plan.

Avant la colle

Tester ses connaissances

> Corrigés p. 23

1 On suppose que l'on connaît en tout point la divergence et le rotationnel d'un champ de vecteurs \vec{V} , ainsi que les conditions aux limites.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a. Le champ est unique.
- b. Le champ est continu.
- c. Pour que le champ soit continu, il faut que la divergence et le rotationnel soient aussi continus.
- d. Pour qu'il y ait une discontinuité du champ en un point, il faut qu'au voisinage de ce point la divergence et/ou le rotationnel tendent vers l'infini.

2 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a. Le flux d'un vecteur uniforme sortant d'une surface fermée est nul.
- b. La divergence d'un rotationnel est nulle.
- c. Le rotationnel d'un gradient est nul.
- d. Le gradient d'une divergence est nul.

e. La divergence d'un gradient est nulle.

3 a. Calculer l'angle solide d'un cône de révolution d'angle d'ouverture θ_0 .

b. Retrouver les résultats pour le plan et tout l'espace.

4 La divergence et le rotationnel d'un champ uniforme sont nuls, alors que le champ n'est pas nul.

Pourquoi ?

5 Les vecteurs suivants sont-ils des vecteurs axiaux (pseudo-vecteurs) ou des vecteurs polaires (vrais vecteurs) ?

- a. Le vecteur vitesse.
- b. Le vecteur force.
- c. Le vecteur rotation instantanée.
- d. Le vecteur champ électrique.
- e. Le vecteur champ magnétique.
- f. Le vecteur \vec{A} dont dérive le champ \vec{V} ($\vec{V} = \text{rot} \vec{A}$), avec \vec{V} champ de vrais vecteurs.

Savoir appliquer le cours

> Corrigés p. 24

1 1. Démontrer que, pour une surface fermée, $\vec{S} = \oint_{(\Sigma)} d\vec{S} = \vec{0}$.

2. Démontrer que le vecteur surface $\vec{S} = \iint_{(S)} d\vec{S}$ ne dépend que du contour fermé Γ orienté sur lequel s'appuie la surface S .

2 On cherche à déterminer la composante radiale du rotationnel en coordonnées cylindriques.

1 Déterminer l'élément de surface ouverte perpendiculaire à \vec{z} , en coordonnées cylindriques.

2 Appliquer le théorème de Stokes au champ $\vec{V} = V_r \vec{z}_r + V_\theta \vec{z}_\theta + V_z \vec{z}_z$.

3 En déduire l'expression de $\text{rot} \vec{V} \cdot \vec{z}_r$.

3 1. Déterminer l'élément de surface fermée en coordonnées sphériques correspondant aux accroissements dr , $d\theta$ et $d\phi$ des trois coordonnées.

2. Déterminer la valeur du volume $d\tau$ limité par cette surface.

3. Calculer le flux d'un champ

$\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\phi \vec{e}_\phi$ sortant de cette surface fermée.

4. À partir des éléments trouvés précédemment, donner l'expression de la divergence en coordonnées sphériques.

5. En déduire l'expression de ΔU en coordonnées sphériques.

6. Que devient cette dernière expression si U ne dépend que de r ?

1. Soit \vec{E} le champ électrostatique créé par une charge q placée en O .
Énoncer la loi de Coulomb.

2. a. Calculer le flux envoyé par \vec{E} à travers une surface fermée contenant O .

b. Calculer de même le flux envoyé par \vec{E} à travers une surface fermée ne contenant pas O .

3. En appliquant le théorème de superposition, en déduire le théorème de Gauss.

1 – Étude d'un champ à symétrie sphérique

Soit un champ \vec{V} à symétrie sphérique de centre O , de divergence et de rotationnel nuls en tout point sauf dans une boule de centre O et de rayon a , où la divergence est uniforme et vaut $\mu \neq 0$. On impose que \vec{V} tende vers 0 à l'infini au moins en $\frac{1}{r^2}$.

- 1 a. Montrer que le champ \vec{V} est un champ de vrais vecteurs.
 - b. Calculer \vec{V} en tout point en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky.
 - c. En déduire le potentiel scalaire U dont il dérive.
- 2 On veut retrouver ces résultats à partir des équations locales.
 - a. Montrer que \vec{V} est un champ de gradients dérivant d'un potentiel scalaire U .
 - b. Quelle équation différentielle vérifie U , à l'intérieur de la sphère de rayon a et à l'extérieur de cette sphère ?
 - c. Résoudre cette équation différentielle et donner l'expression générale de U . Ce potentiel est-il unique ?

Rappel : en coordonnées sphériques, $\Delta U(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right)$.

 - d. Déterminer le champ \vec{V} en tout point de l'espace.

résolution méthodique

Il faut en premier lieu considérer les invariances, afin de choisir le système de coordonnées. Ici, la symétrie est sphérique : en coordonnées sphériques, le champ ne dépendra que de r , donc d'une seule variable.

On considère ensuite les symétries pour avoir la direction : en chaque point M , passent deux plans de symétrie orthogonaux, se coupant suivant OM .

On se ramène ainsi à la détermination d'une seule fonction d'une seule variable.

Le choix de la surface $r = \text{Cte}$ qui ne fait appel qu'à une seule valeur de la fonction pour l'utilisation du théorème de Green-Ostrogradsky permet de remonter à cette valeur.

- a. En chaque point M passent deux plans de symétrie orthogonaux, se coupant suivant OM . Un champ de vecteurs axiaux serait donc identiquement nul, et ne vérifierait pas les conditions de l'énoncé.

Il n'existe pas de champ de vecteurs axiaux à symétrie sphérique.

C'est donc un champ de vecteurs polaires. Il appartient aux deux plans de symétrie, donc à leur intersection : $\vec{V} = V(r)\vec{e}_r$, en posant $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{e}_r$.

- b. L'application du théorème de Green-Ostrogradsky à une sphère de rayon r fournit les relations :

• si $r < a$, $4\pi r^2 V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu$, soit $\vec{V}(r) = \frac{\mu}{3} \vec{r}$

• si $r > a$, $4\pi r^2 V(r) = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu$, soit $\vec{V}(r) = \frac{\mu a^3}{3r^2} \vec{e}_r$

c. • Si $r > a$, $\frac{dU}{dr} = -\mu \frac{a^3}{3r^2}$, soit $U(r) = \mu \frac{a^3}{3r}$ en choisissant de prendre l'origine des potentiels à l'infini ;

• si $r < a$, $\frac{dU}{dr} = -\mu \frac{r}{3}$, soit $U(r) = -\mu \frac{r^2}{6} + C$. On détermine la valeur de C par continuité en $r = a$:

$$C = \mu \frac{a^2}{2} : U(r) = \mu \frac{3a^2 - r^2}{6}$$

2 a. Le rotationnel étant nul en tout point, c'est un champ de gradients :

$$\vec{V} = -\vec{\text{grad}}U.$$

b. • Si $r < a$, $\text{div} \vec{V} = \mu$, et donc $\text{div}(\vec{\text{grad}}U) = \Delta U = -\mu$.

• Si $r > a$, de même, $\Delta U = 0$.

Pour $r < a$, $\Delta U(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = -\mu$, soit $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = -\mu r^2$.

c.

Pour résoudre l'équation différentielle, il ne faut pas oublier le calcul des deux constantes d'intégration.

Le potentiel doit être continu dans tout son domaine de définition, pour que le champ soit défini en tout point, cela fournit une première relation.

Il reste une constante à déterminer. Quand c'est possible, on choisit de prendre l'origine des potentiels à l'infini.

• Une première intégration donne : $r^2 \frac{dU}{dr} = -\mu \frac{r^3}{3} + C$.

Quand $r = 0$, $r^2 \frac{dU}{dr}$ s'annule, donc $C = 0$

$$\frac{dU}{dr} = -\mu \frac{r}{3}$$

• On intègre une seconde fois : $U = -\mu \frac{r^2}{6} + D$

Pour $r > a$, on remplace μ par 0 : $U = -\frac{C'}{r} + D'$.

On prend la détermination de U nulle à l'infini, soit $D' = 0$.

$\text{div} \vec{V}$ est fini en tout point, donc \vec{V} est continu. On écrit la continuité en $r = a$ de U et de son gradient :

$$-\mu \frac{a^2}{6} + D = -\frac{C'}{a}$$

$$-\mu \frac{a}{3} = \frac{C'}{a^2}$$

$$r < a : U = \mu \frac{3a^2 - r^2}{6}$$

$$r > a : U = \frac{\mu a^3}{3r}$$

La seule difficulté consiste dans le calcul des constantes d'intégration. Si les sources de champ restent finies, U et sa dérivée doivent être finis partout, et continus en tout point.

$$d. \vec{V} = -\vec{\text{grad}}U.$$

En un point M tel que $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{u}$

$$r < a: \vec{V} = \mu \frac{\vec{r}}{3}$$

$$r > a: \vec{V} = \frac{\mu a^3}{3r^2} \vec{e}_r$$

en conclusion

- On aura reconnu le calcul du champ électrique pour une boule uniformément chargée en volume, soit par le théorème de Gauss, soit par le calcul direct du potentiel.
- La connaissance d'un champ vectoriel représente la donnée de trois fonctions des trois variables d'espace, une pour chaque coordonnée. Il importe donc, avant tout calcul de voir si on ne peut pas ramener le problème, par l'étude des invariances et des symétries, à un nombre plus restreint de paramètres.
- L'utilisation du théorème de Green-Ostrogradsky donne une seule relation. Il ne faut donc l'utiliser que s'il ne fait intervenir qu'une seule valeur d'une seule variable.
- Le calcul des constantes d'intégration doit être fait avec soin, une discontinuité de potentiel entraînant une non définition des dérivées en ce point.

2 – Étude d'un champ de vecteurs

On considère un vecteur fixe $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Soit O l'origine du repère, et M un point quelconque.

On définit le champ de vecteurs \vec{V} par :

- $\vec{V}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ à l'intérieur du cylindre d'axe Oz et de rayon a .

- $\text{div}\vec{V} = 0$ et $\text{rot}\vec{V} = 0$ à l'extérieur du cylindre. $\vec{V} \rightarrow 0$ quand on s'éloigne de l'axe du cylindre.

- 1 Calculer la divergence et le rotationnel de ce champ à l'intérieur du cylindre.
- 2 Quelles sont les symétries et les invariances d'un tel champ ?
- 3 À partir du théorème de Stokes, déterminer l'expression du champ pour $r > a$.
- 4 Retrouver les résultats précédents à partir d'un potentiel vecteur $\vec{A}(r) = A(r)\vec{e}_z$.

Rappel : en coordonnées cylindriques $\Delta U(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right)$,

et $\text{rot}(A(r)\vec{e}_z) = -\frac{dA(r)}{dr} \vec{e}_\theta$.

résolution méthodique

➤ 1 À l'intérieur du cylindre, en coordonnées cartésiennes : $\vec{V}(M) = -\Omega y \vec{e}_x + \Omega x \vec{e}_y$.
Donc $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ et $\operatorname{rot} \vec{V} = 2\Omega \vec{e}_z$.

➤ 2 Les sources du champ sont invariantes par translation suivant Oz , et par rotation autour de Oz . Le système de coordonnées adapté est donc celui utilisant les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Les plans passant par Oz sont plans de symétrie pour $\vec{\Omega}$, et donc d'antisymétrie pour \vec{V} .

$$\vec{V} = \Omega r \vec{e}_\theta \text{ pour } r < a.$$

$$\text{Pour } r > a, \vec{V} = V(r) \vec{e}_\theta.$$

➤ 3 On applique le théorème de Stokes à un cercle de rayon r , orienté positivement suivant \vec{e}_θ .

• Pour $r < a$, $2\pi r V(r) = 2\Omega \pi r^2$, et donc on retrouve bien $\vec{V} = \Omega r \vec{e}_\theta$.

• Pour $r > a$, $2\pi r V(r) = 2\Omega \pi a^2$, soit $\vec{V} = \Omega \frac{a^2}{r} \vec{e}_\theta$.

Il n'y a pas violation du théorème d'unicité car le champ trouvé tend vers 0 en $\frac{1}{r}$ et non au moins en $\frac{1}{r^2}$.

➤ 4 Le champ étant à divergence nulle est un champ de rotationnels.

$\vec{A}(r) \vec{e}_z$ a les mêmes symétries que $\vec{\Omega}$, ce qui justifie de le chercher sous cette forme.

Rappelons qu'il est défini à un gradient près.

Sous cette forme, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

• Pour $r < a$: $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{rot} \vec{V} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} = 2\vec{\Omega}$.

• Pour $r > a$: $\Delta \vec{A} = 0$.

En coordonnées cartésiennes, $\Delta(A(r) \vec{e}_z) = \Delta A(r) \vec{e}_z$.

• Pour $r > a$: $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = 0$, soit : $\frac{dA}{dr} = \frac{C}{r}$ et $\vec{A} = C \ln\left(\frac{r}{b}\right) \vec{e}_z$.

• Pour $r < a$: $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = -2\Omega$, soit : $r \frac{dA}{dr} = -\Omega r^2$, pour assurer la définition du

champ en $r = 0$, et $\vec{A} = \left(-\Omega \frac{r^2}{2} + B \right) \vec{e}_z$.

On ne peut pas prendre l'origine des potentiels à l'infini. On la choisit sur le cylindre :

• $r < a$: $\vec{A} = \left(\Omega \frac{a^2 - r^2}{2} \right) \vec{e}_z$ et $\vec{V} = \operatorname{rot} \vec{A} = -\frac{dA}{dr} \vec{e}_\theta = \Omega r \vec{e}_\theta$

• $r > a$: $\vec{A} = C \ln\left(\frac{r}{a}\right) \vec{e}_z$ et $\vec{V} = -\frac{dA}{dr} \vec{e}_\theta = -\frac{C}{r} \vec{e}_\theta$. Par continuité, $C = -\Omega a^2$

$$\vec{A} = -\Omega a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{V} = \Omega \frac{a^2}{r} \vec{e}_\theta$$

en conclusion

- Le théorème d'Ampère est l'application du théorème de Stokes à un champ de rotationnel, ou champ à flux conservatif ($\text{div} \vec{V} = 0$, $\text{rot} \vec{V} \neq 0$).
- Le théorème de Gauss est l'application du théorème de Green-Ostrogradsky à un champ de gradient, ou champ à circulation nulle ($\text{rot} \vec{V} = 0$, $\text{div} \vec{V} \neq 0$).



15 min

» Corrigé p. 25

Formules dérivées des théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradsky

1. Démontrer la formule de Kelvin :

$$\oint_C U d\vec{\ell} = - \iint_{(S)} \vec{\text{grad}}U \wedge d\vec{S}.$$

2. Démontrer la formule du gradient :

$$\iint_{(S)} U d\vec{S} = \iiint_V \vec{\text{grad}}U d\tau.$$

3. Démontrer la formule du rotationnel :

$$\iint_{(S)} \vec{A} \wedge d\vec{S} = - \iiint_V \vec{\text{rot}}A d\tau.$$



15 min

» Corrigé p. 25

Champ d'un dipôle

On considère un champ de vecteurs \vec{V} à circulation nulle, invariant par rotation autour d'un axe Oz .

La divergence est nulle partout sauf éventuellement au voisinage de O où elle peut tendre vers l'infini.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par le potentiel scalaire dont il dérive.

2. En coordonnées sphériques,

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rU)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}.$$

On cherche une solution sous la forme $f(r)g(\theta)$.

a. Déterminer les équations vérifiées par $f(r)$ et $g(\theta)$.

b. Vérifier que $g(\theta) = \cos \theta$ est une solution possible, et déterminer $f(r)$ sous la forme Cr^α . Trouver les valeurs de α qui conviennent.

c. En déduire les champs correspondants, et interpréter.



20 min

» Corrigé p. 26

Champ au voisinage d'un axe de symétrie de révolution

On se place au voisinage de l'axe de révolution d'un champ $\vec{V}(r, z)$, dans une région de l'espace où sa divergence et son rotationnel sont nuls.

1. Quelle est la direction de $\vec{V}(0, z)$?

2. En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky à un cylindre centré sur l'axe et de rayon r petit devant l'échelle des variations de z , calculer au premier ordre la composante radiale du champ $V_r(r, z)$.

3. En appliquant le théorème de Stokes à un rectangle de hauteur dz et de largeur r , calculer au premier ordre non nul $V_z(r, z) - V_z(0, z)$.

Tester ses connaissances

1 a. Vrai. C'est le théorème d'unicité.

b. Vrai. Il suffit d'interpréter les dérivées partielles comme les dérivées de la fonction de cette seule variable, et d'appliquer les propriétés habituelles des fonctions dérivables.

Si on connaît en tout point la divergence et le rotationnel, les dérivées partielles en ce point sont définies.

c. Faux. Il y aura discontinuité de la dérivée, mais pas obligatoirement de la fonction.

d. Vrai. Mais toutes les composantes ne seront pas forcément discontinues.

2 a. Vrai. En effet, si le vecteur \vec{V} est uniforme, on peut le sortir de l'intégrale :

$$\iint_{(\Sigma)} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \vec{V} \cdot \iint_{(\Sigma)} d\vec{S} = 0.$$

b. Vrai. Il suffit de le vérifier en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Les dérivées secondes croisées sont égales. En regroupant les termes deux à deux :

$$\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} \right) = 0$$

c. Vrai. On le vérifie sur la première composante, les autres s'en déduisent par permutation circulaire :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right] = 0$$

d. Faux en général : $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right]$ n'est pas nul *a priori*.

On peut choisir comme contre-exemple le vecteur $x^2 \vec{e}_x + y^2 \vec{e}_y + z^2 \vec{e}_z = r^2 \vec{u}$.

e. Faux en général : c'est la définition du laplacien.

3 a. L'angle solide ne dépend pas de la surface choisie pour le calculer.

On considère la révolution sphérique de centre O et d'axe Oz , axe de révolution du cône :

$$\begin{aligned} \Omega &= \iint_{(S)} \vec{r}_r \cdot d\vec{S} = \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= [-2\pi \cos \theta]_0^{\theta_0} = 2\pi(1 - \cos \theta_0) \end{aligned}$$

b. Pour un plan, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, et $\Omega = 2\pi$. Pour tout l'espace, $\theta_0 = \pi$ et $\Omega = 4\pi$.

4 Il ne suffit pas qu'un champ soit à rotationnel et divergence nuls en tout point de l'espace pour qu'il soit nul. Il faut aussi que le champ tend vers 0 à l'infini au moins en $\frac{1}{r^3}$.

5 Le vecteur déplacement est un « vrai vecteur », puisque son sens ne dépend pas du choix du trièdre de référence. Tous les vecteurs qui s'en déduisent par dérivation par rapport au temps sont donc aussi de « vrais vecteurs ».

Ensuite vient la règle : un produit vectoriel ou un rotationnel transforme un vrai vecteur en pseudo-vecteur ou réciproquement.

a. et **b.** les vecteurs vitesse et force sont donc de « vrais vecteurs »

c. $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$, $\vec{\Omega}$ est donc un « pseudo-vecteur ».

d. Le vecteur champ électrique est défini à partir du vecteur force : $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$. C'est donc un « vrai vecteur ».

e. La force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ qui définit le champ magnétique fait intervenir un produit vectoriel : \vec{B} est donc un pseudo-vecteur.

f. $\vec{V} = \operatorname{rot} \vec{A}$. Donc pour que \vec{V} soit un vrai vecteur, il faut que \vec{A} soit un pseudo-vecteur.

Remarque : réciproquement, si \vec{V} était un pseudo-vecteur, \vec{A} serait un vrai vecteur.

Savoir appliquer le cours

1. $\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} d\vec{S}$ est un vecteur. Pour montrer que c'est le vecteur nul, il suffit de montrer que ses composantes en coordonnées cartésiennes sont nulles :

$$S_x = \vec{S} \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_x \cdot \iint_{(\Sigma)} d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} \vec{e}_x \cdot d\vec{S} \text{ puisque } \vec{e}_x \text{ est un vecteur fixe.}$$

D'après le théorème de Stokes-Ostrogradsky, si V est le volume intérieur à la surface (Σ) , $S_x = \iiint_V \text{div } \vec{e}_x d\tau = 0$

puisque \vec{e}_x est un vecteur fixe. Il en est de même pour les deux autres composantes.

$$\text{Donc } \vec{S} = \iint_{(\Sigma)} d\vec{S} = \vec{0}.$$

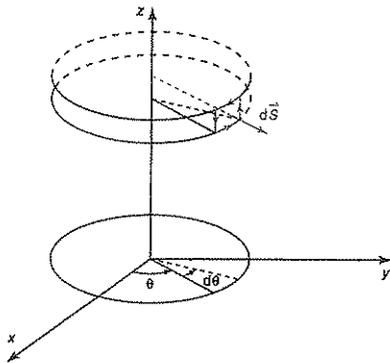
2. Il suffit de montrer que si deux surfaces S_1 et S_2 s'appuient sur le même contour orienté Γ , les vecteurs $\vec{S}_1 = \iint_{S_1} d\vec{S}$ et $\vec{S}_2 = \iint_{S_2} d\vec{S}$ sont égaux.

Les surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur le même contour, leur ensemble forme une surface (Σ) fermée. Les normales aux surfaces S_1 et S_2 sont orientées l'une vers l'intérieur, et l'autre vers l'extérieur. Soit S_1 celle dont la normale est orientée vers l'extérieur :

$$\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} d\vec{S} = \iint_{S_1} d\vec{S} - \iint_{S_2} d\vec{S} = \vec{S}_1 - \vec{S}_2 = \vec{0},$$

puisque (Σ) est une surface fermée.

2. 1. On oriente le contour de manière à ce que la surface $d\vec{S}$ soit orientée dans le même sens que \vec{e}_r : $d\vec{S} = r d\theta dz \vec{e}_r$ (figure).



2. La circulation de \vec{V} sur la courbe fermée orientée de côtés dz et $r d\theta$ s'écrit, d'après le théorème de Stokes :

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} \cdot r d\theta dz \vec{e}_r.$$

Le calcul direct donne :

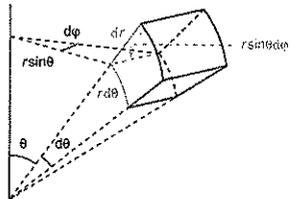
$$(V_z(\theta + d\theta) - V_z(\theta)) dz - (V_\theta(z + dz) - V_\theta(z)) r d\theta,$$

soit, en mettant en facteur $dS = r d\theta dz$:

$$d\vec{S} = r d\theta dz \vec{e}_r : \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r \cdot r d\theta dz \vec{e}_r.$$

3. En identifiant : $\vec{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{e}_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right)$

3. 1.



2. $d\tau = r^2 dr \sin \theta d\phi d\theta$

3. Il faut tenir compte du fait que les surfaces en regard n'ont pas la même aire :

$$d\Phi = [V_r(r + dr)(r + dr)^2 - V_r(r)r^2] \sin \theta d\theta d\phi + [V_\theta(\theta + d\theta) \sin(\theta + d\theta) d\phi - V_\theta(\theta) \sin \theta d\phi] r dr + [V_\phi(\phi + d\phi) - V_\phi(\phi)] r d\theta dr.$$

Soit, en mettant en facteur l'élément de volume $d\tau$:

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} V_\phi \right] \times r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

4. $\text{div } \vec{V} = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} V_\phi \right]$

5. $\Delta U = \text{div}(\text{grad } U)$.

$\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$. Donc :

$$\Delta U = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right]$$

6. Si U ne dépend que de r : $\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)$

On peut aussi l'écrire :

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2}$$

4. 1. D'après la loi de Coulomb : $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$

avec $\vec{OM} = r \vec{u}$.

$$2. \text{ Le flux } \Phi \text{ s'écrit : } \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\vec{z}}{r^2} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

où Ω est l'angle solide sous lequel du point O on voit la surface fermée (Σ) .

a. et b. Si la surface contient O , cet angle solide vaut 4π , si la surface ne contient pas O , l'angle solide est nul.

3. Le flux d'une somme de vecteurs étant la somme des flux de chacun d'eux, et le champ dû à un ensemble de charges étant la somme des champs dus à chacune d'elles, on en déduit le théorème de Gauss : le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée (Σ) quelconque est égal à la somme des charges intérieures au volume qu'elle renferme, divisée par ϵ_0 .

S'entraîner

1 Remarque : les formules à démontrer sont vectorielles. Il faut donc calculer chacune des composantes. Le plus simple est de faire le calcul en coordonnées cartésiennes pour une des composantes et d'en déduire le résultat pour les autres par permutation circulaire. La projection sur \vec{z}_x peut se faire à l'intérieur ou à l'extérieur des intégrales puisque c'est un vecteur fixe. On se contentera donc de vérifier les formules pour les composantes x .

1. $\oint_C U d\vec{\ell} \cdot \vec{z}_x$ est la circulation sur C du vecteur $U\vec{z}_x$.

D'après le théorème de Stokes,

$$\oint_C U d\vec{\ell} \cdot \vec{z}_x = \iint_{(S)} \text{rot}(U\vec{z}_x) \cdot d\vec{S}$$

$$\text{rot}(U\vec{z}_x) = \frac{\partial U}{\partial z} \vec{z}_y - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{z}_z = -\vec{z}_x \wedge \text{grad}U$$

$$\text{rot}(U\vec{z}_x) \cdot d\vec{S} = -\vec{z}_x \wedge \text{grad}U \cdot d\vec{S} = -\text{grad}U \wedge d\vec{S} \cdot \vec{z}_x$$

d'après les propriétés du produit mixte.

$$\text{Donc } \vec{z}_x \cdot \oint_C U d\vec{\ell} = -\vec{z}_x \cdot \iint_{(S)} \text{grad}U \wedge d\vec{S}$$

On obtient la même relation pour les autres composantes par permutation circulaire.

2. $\iint_{(S)} U \vec{z}_x \cdot d\vec{S}$ est le flux sortant du vecteur $U\vec{z}_x$.

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} U \vec{z}_x \cdot d\vec{S} &= \iiint_V \text{div}(U\vec{z}_x) dt = \iiint_V \frac{\partial U}{\partial x} dt \\ &= \iiint_V \text{grad}U \cdot \vec{z}_x dt = \vec{z}_x \cdot \iiint_V \text{grad}U dt \end{aligned}$$

3. $\iint_{(S)} \vec{A} \wedge d\vec{S} \cdot \vec{z}_x = \iint_{(S)} \vec{z}_x \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S}$ d'après les propriétés du produit mixte. C'est donc le flux sortant du vecteur $\vec{z}_x \wedge \vec{A}$.

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \vec{z}_x \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \iiint_V \text{div}(\vec{z}_x \wedge \vec{A}) dt \\ &= \iiint_V \left(-\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dt = -\vec{z}_x \cdot \iiint_V \text{rot}A dt \end{aligned}$$

2 1. Sauf au voisinage de O , $\Delta U = 0$. On choisit un système de coordonnées sphériques d'axe Oz .

L'invariance par rotation autour de l'axe s'écrit : \vec{V} indépendant de ϕ . La circulation de \vec{V} sur un cercle équatorial s'écrit donc $2\pi r \sin\theta V$ et est nulle. $V = 0$ et

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0.$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rU)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Remarque : noter le passage des dérivées partielles aux dérivées de fonctions à une seule variable.

$$2. \text{ a. } \Delta U = \frac{1}{r} \frac{d^2(rf)}{dr^2} g(\theta) + \frac{f(r)}{r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dg}{d\theta} \right) = 0,$$

soit, en séparant les variables :

$$\frac{r}{f(r)} \frac{d^2(rf)}{dr^2} = -\frac{1}{\sin\theta g(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dg}{d\theta} \right) = A \text{ où } A \text{ est}$$

une constante puisque l'expression ne dépend ni de r , ni de θ .

b. Si $g(\theta)$ est de la forme $\cos\theta$,

$$-\frac{1}{\sin\theta g(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dg}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\sin\theta \cos\theta} \frac{d}{d\theta} (-\sin^2\theta) = 2$$

la solution convient avec $A = 2$.

$$\frac{d^2(rf)}{dr^2} = 2 \frac{f(r)}{r}, \text{ soit avec } f(r) = Cr^\alpha :$$

$$(\alpha + 1)\alpha Cr^\alpha = 2Cr^\alpha.$$

Il y a deux solutions qui conviennent, $\alpha = 1$ et $\alpha = -2$.

c. $\circ \alpha = 1 : U = Cr \cos\theta, \vec{V} = C(-\cos\theta \vec{z}_r + \sin\theta \vec{z}_\theta) :$

$\vec{V} = -C\vec{z}_z$: le champ est uniforme, parallèle à l'axe de symétrie.

$$\circ \alpha = -2 : U = \frac{C}{r^2} \cos\theta, \vec{V} = \frac{C}{r^3} (2\cos\theta \vec{z}_r + \sin\theta \vec{z}_\theta).$$

On reconnaît le champ d'un dipôle placé en O et aligné sur Oz .

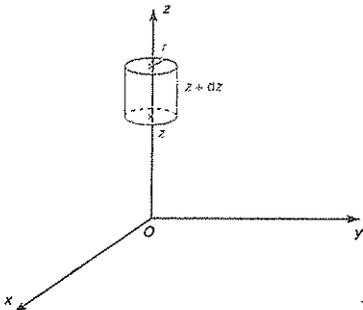
Remarque : changer θ en $\pi - \theta$ change $\cos\theta$ en $-\cos\theta$.

Le choix de $g(\theta) = \cos\theta$ implique que le plan xOy est un plan d'antisymétrie pour le potentiel, donc pour le champ.

- 3 1. En un point de l'axe Oz , axe de symétrie de révolution du champ, \vec{V} appartient à l'axe :

$$\vec{V}(0, z) = V_z(0, z)\vec{e}_z$$

2.



Le flux sortant du cylindre est nul puisque la divergence est nulle en tout point intérieur.

Au premier ordre en r , on peut confondre $V_z(r, z)$ et $V_z(0, z)$.

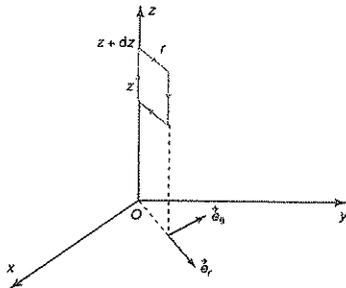
Remarque : il s'agit ici de distances r petites devant la distance ζ caractéristique des variations de $V_z(0, z)$:

$$\frac{r}{\zeta} \ll 1.$$

$$\text{Soit : } \pi r^2(V_z(0, z+dz) - V_z(0, z)) + 2\pi r V_r(r, z) = 0,$$

$$\text{ou encore : } V_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial V_z}{\partial z}(0, z)$$

3.



La circulation sur le contour du rectangle est nulle puisque le rotationnel est nul en tout point de sa surface. Soit :

$$\int_0^r V_r(r', z+dz) dr' - \int_0^r V_r(r', z) dr' + V_z(0, z) dz - V_z(r, z) dz = 0$$

ou encore :

$$\int_0^r -\frac{r'}{2} \frac{\partial^2 V_z(0, z)}{\partial z^2} dz + V_z(0, z) dz - V_z(r, z) dz = 0, \text{ et donc :}$$

$$V_z(r, z) dz - V_z(0, z) dz = -\frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 V_z(0, z)}{\partial z^2}$$

Remarque : l'expression de $V_r(r, z)$ est donc exacte au troisième ordre près en $\frac{r}{\zeta}$.

On pourrait reprendre la valeur du flux avec cette nouvelle expression et construire ainsi la série solution de l'équation du champ.

$V_r(r, z)$ ne fait intervenir que des termes de puissance impaires de r , et $V_z(r, z)$ que des termes de puissance paires de r .

MP

PT

Électrostatique des milieux conducteurs

1 Équations locales de l'électrostatique

1.1. Les sources du champ électrostatique

En régime permanent, un volume $\delta\tau$ centré sur le point P , petit à l'échelle macroscopique, mais grand à l'échelle microscopique (échelle mésoscopique) contient une charge δq indépendante du temps.

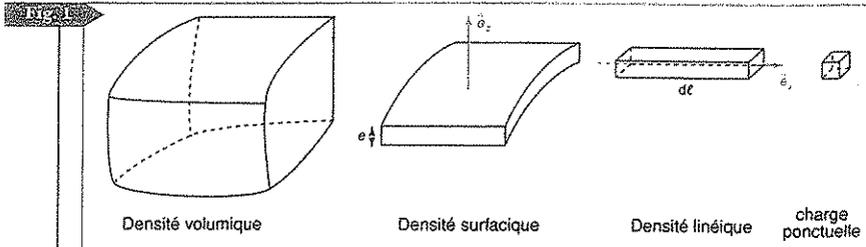
On définit la densité volumique de charge ρ au point P par $\rho = \frac{\delta q}{\delta\tau}$. ρ , exprimée en $C \cdot m^{-3}$, est alors une fonction continue $\rho(x, y, z)$ des coordonnées du point P , indépendante du volume $\delta\tau$ choisi.

C'est cette distribution de charges qui est la source du champ électrostatique.

Si les charges sont localisées au voisinage d'une surface $\vec{dS} = dS\vec{e}_n$, sur une épaisseur ε , on modélise la répartition en faisant tendre ε vers 0 et la densité volumique ρ vers l'infini, en gardant $\sigma = \int_V \rho(x, y, z) dz$ constant. $\delta q = \sigma dS$ (voir figure 1). σ est la **densité surfacique** de charge, exprimée en $C \cdot m^{-2}$.

Si la densité surfacique est localisée au voisinage d'une courbe $\vec{d\ell} = d\ell\vec{e}_t$, on la modélise par la **densité linéique de charge** λ , exprimée en $C \cdot m^{-1}$. $\delta q = \lambda d\ell$, ce qui correspond à une densité surfacique tendant vers l'infini sur une largeur tendant vers 0.

Enfin, si la densité linéique est localisée au voisinage d'un point, on la modélise par une charge ponctuelle q , ce qui correspond à une densité linéique tendant vers l'infini sur une longueur de courbe tendant vers 0.



Les sources de champ élémentaires sont modélisées par : $\rho d\tau$, σdS , $\lambda d\ell$ ou q ponctuelle.

1.2. Les lois de l'électrostatique pour le champ et le potentiel

La présence de charges modifie les propriétés d'un milieu : une charge test placée en un point M est soumise à une force $\vec{F} = q\vec{E}(M)$, où $\vec{E}(M)$ est le champ électrostatique créé par la répartition de charges.

$\vec{E}(M)$ est lié à la répartition de charges par les lois de l'électrostatique, qui peuvent s'exprimer indifféremment sous les formes suivantes.

1.2.1. Loi de Coulomb

$$\vec{E}(M) = \iiint \frac{\rho d\tau_p}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \vec{PM} = \iint \frac{\sigma dS_p}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \vec{PM} = \int \frac{\lambda d\ell_p}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \vec{PM} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M^3} \vec{P_i M}.$$

ou encore :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}V(M) \text{ avec :}$$

$$V(M) = \iiint \frac{\rho d\tau_p}{4\pi\epsilon_0 PM^2} = \iint \frac{\sigma dS_p}{4\pi\epsilon_0 PM^2} = \int \frac{\lambda d\ell_p}{4\pi\epsilon_0 PM^2} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M^2}.$$

1.2.2. Équations locales

$\vec{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$ et $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (équation de Maxwell-Gauss) avec \vec{E}_i tendant vers $\vec{0}$ au moins en $\frac{1}{r^2}$ en l'absence de charges à l'infini.

Ce qui est équivalent à :

le champ \vec{E} est un champ de gradients : $\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}V(M)$ et donc sa circulation est nulle sur toute courbe fermée Γ : $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$. \vec{E} vérifie le théorème de Gauss :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\nu} \rho d\tau$$

Déterminer \vec{E} revient à chercher la solution unique de l'équation de Poisson : $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ avec V tendant vers 0 à l'infini au moins en $\frac{1}{r}$ en l'absence de charges à l'infini.

Remarque : l'existence de charges à l'infini résulte toujours d'une modélisation de la distribution pour obtenir les symétries nécessaires à l'utilisation du théorème de Gauss. Dans ces cas-là, on calcule toujours d'abord \vec{E} , pour en déduire V , en choisissant alors une origine des potentiels adéquate.

1.2.3. Discontinuité de \vec{E} à la traversée d'une surface chargée

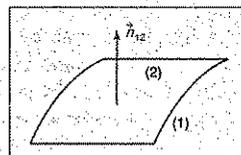
S'il y a distribution surfacique, cela implique que la densité volumique de charges, source du champ, est infinie à la surface.

\vec{E} présente donc une discontinuité à la traversée de cette surface (voir l'exercice 3 de « Tester ses connaissances »).

• $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$ entraîne la continuité de la composante de \vec{E} tangente à la surface chargée.

• $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ entraîne une discontinuité de la composante normale à la surface :

$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$, où \vec{n}_{12} est la normale à la surface chargée avec la densité surfacique σ , orientée du milieu 1 vers le milieu 2 (voir figure).



1.2.4. Interprétation énergétique du potentiel V

Le travail de la force électrostatique $q\vec{E}$ lors du déplacement de la charge q d'un point A à un point B s'écrit :

$$\int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{c} = V(A) - V(B), \text{ et ce indépendamment du chemin suivi.}$$

$qV(M)$ représente donc l'énergie potentielle électrostatique de la charge q placée en M , l'origine des énergies potentielles étant prise à l'endroit où V est nul (le plus souvent à l'infini), ou l'énergie que doit fournir un opérateur extérieur pour amener de manière réversible une charge d'un point où le potentiel est nul au point M où il vaut $V(M)$.

2 Conducteur en équilibre électrostatique

2.1. Propriétés des conducteurs en équilibre électrostatique

2.1.1. Définition d'un conducteur

Un conducteur est un corps qui contient des porteurs de charges libres, c'est-à-dire des charges susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique même très faible.

2.1.2. Équilibre électrostatique d'un conducteur

Remarque

Les charges ne sont évidemment pas immobiles, ne serait-ce qu'en raison de l'agitation thermique, mais à l'échelle macroscopique, cela n'engendre pas de fluctuations de ρ , V ou \vec{E} .

Un conducteur est en équilibre électrostatique lorsqu'il n'est le siège d'aucun mouvement d'ensemble de porteurs de charges.

2.1.3. Conséquences de l'équilibre électrostatique d'un milieu conducteur

Sous l'action d'un champ électrostatique, les charges d'un conducteur se déplacent. Quand ces charges n'ont plus de mouvement d'ensemble, c'est donc que $\vec{E} = \vec{0}$ en tout point du volume du conducteur. Le conducteur est donc un volume équipotentiel.

Remarque

On suppose ici qu'il n'y a pas d'autres forces agissant sur les porteurs de charges : température uniforme, conducteur homogène, immobile dans un référentiel galiléen... De plus le poids des porteurs de charge est toujours négligeable devant les forces électriques.

La condition nécessaire et suffisante d'équilibre électrostatique d'un conducteur immobile homogène et de température uniforme est que celui-ci soit un volume équipotentiel.

Le champ \vec{E} est uniformément nul dans le volume du conducteur.

Dans le volume du conducteur, le champ est uniforme, donc de divergence nulle : la densité volumique de charges $\rho(M)$ y est donc nulle.

Le volume étant équipotentiel, à l'extérieur, au voisinage du conducteur, le champ électrique est normal à sa surface.

Les charges du conducteur se répartissent au voisinage immédiat de la surface, là où s'exercent des forces supplémentaires qui les empêchent de sortir du conducteur. Ces charges sont modélisées par une répartition surfacique $\sigma(M)$, et donc une densité volumique infinie sur une épaisseur nulle.

Dans un conducteur en équilibre électrostatique dans le vide, les charges sont réparties au voisinage de la surface.

2.2. Étude des conducteurs en équilibre électrostatique

2.2.1. Théorème de Coulomb

À l'intérieur du conducteur, le champ est nul. À l'extérieur, il est normal à la surface. La présence d'une répartition surfacique de charges entraîne une discontinuité $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ du champ électrostatique (voir 1.2.3), d'où le théorème suivant :

Théorème de Coulomb

À la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique, $\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface du conducteur, orienté vers l'extérieur du volume conducteur.

2.2.2. Étude d'un ensemble de conducteurs en équilibre électrostatique dans le vide

À l'extérieur des conducteurs, il n'y a aucune charge. La recherche du champ revient donc à résoudre $\Delta V = 0$ dans l'espace entre les conducteurs, avec comme conditions aux limites sur les conducteurs que leur surface est équipotentielle, et qu'à l'infini V tende vers 0 au moins en $\frac{1}{r}$. La donnée, soit de la valeur du potentiel V_i , soit de la charge totale Q_i de chacun des conducteurs \mathcal{C}_i suffit à assurer l'unicité de la solution.

- Si un conducteur est isolé, sa charge totale se conserve. On connaît donc Q_i .
- Si un conducteur est relié à une source de potentiel V_i , cette source lui fournit les charges nécessaires pour qu'il soit à ce potentiel V_i .

2.2.3. Cavité vide de charges à l'intérieur d'un conducteur

À l'intérieur de la cavité, il faut résoudre $\Delta V = 0$ en tout point, avec comme condition aux limites $V = V_0$ constante sur le conducteur.

La solution triviale $V = V_0$ et donc $\vec{E} = \vec{0}$, convient et d'après le théorème d'unicité, c'est donc la solution cherchée.

➤ Une cavité vide de charges à l'intérieur d'un conducteur est un volume équipotentiel au même potentiel que le conducteur.

2.2.4. Capacité d'un conducteur seul dans l'espace

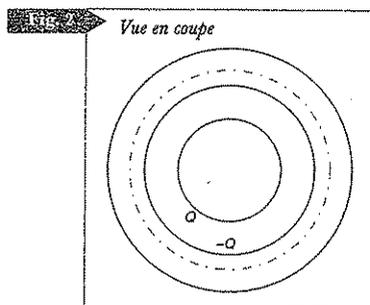
Il faut résoudre $\Delta V = 0$ partout à l'extérieur du conducteur, et $V = V_0$ sur le conducteur. Avec la condition habituelle à l'infini, la solution est unique. On en déduit \vec{E} , et donc σ sur le conducteur et Q_0 charge totale du conducteur. La linéarité de l'équation entraîne que toutes ces grandeurs sont proportionnelles à V_0 . On appelle capacité la constante C de proportionnalité : $Q_0 = CV_0$. On l'exprime en Farad (F) : $1 \text{ F} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}^{-1}$.

2.3. Étude des condensateurs

2.3.1. Définition

On appelle condensateur un ensemble de deux conducteurs en influence totale : l'un (armature externe) entoure complètement l'autre (armature interne). L'espace entre les armatures peut être vide ou rempli d'un isolant (diélectrique).

Sauf indication contraire, on ne considérera que des condensateurs à vide.



2.3.2. Capacité

L'application du théorème de Gauss à une surface fermée dans le volume de l'armature externe (figure 2), entraîne que la charge totale intérieure est nulle. Les charges étant superficielles, la charge de l'armature interne est égale et opposée à celle de la face interne de l'armature externe. Cette charge est la charge Q du condensateur.

- Si les deux armatures sont au même potentiel, le volume est équipotentiel, et la charge du condensateur est nulle.
- Sinon, la linéarité des équations liant le potentiel aux charges entraîne que la charge Q est proportionnelle à la différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ entre l'armature interne notée 1 et l'armature externe notée 2.

Remarque

Les résultats obtenus pour les capacités des condensateurs à vide se généralisent dans le cas de condensateurs à diélectriques de permittivité relative ϵ_r , en remplaçant ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_r$ dans l'expression de la capacité.

On appelle capacité C du condensateur le coefficient de proportionnalité :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

C ne dépend que de la géométrie du condensateur et éventuellement de la nature du diélectrique qui sépare les armatures.

Remarque : si l'on modifie le potentiel des armatures sans changer leur différence, on ne modifie pas Q , mais la charge répartie à la surface externe de l'armature externe.

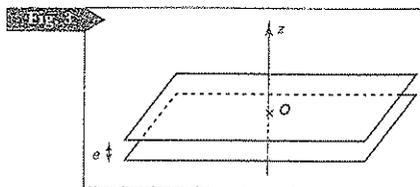
2.3.3. Exemple de calcul d'une capacité, celle du condensateur plan idéal

Il faut résoudre $\Delta V = 0$ partout entre les armatures, $V = V_1$ sur l'armature interne, $V = V_2$ sur l'armature externe. Dans le cas général, il faut faire intervenir des méthodes numériques.

Le calcul peut se faire dans des géométries particulièrement simples, pour lesquelles le potentiel ne dépend que d'une seule variable d'espace :

Condensateur plan : les armatures sont deux conducteurs plans d'aire S , parallèles entre eux, distants de e (voir figure 3).

En négligeant « les effets de bord », on les modélise par deux plans infinis, distants de e . On parle alors de condensateur plan idéal.



Soit Oz la direction perpendiculaire aux armatures. Les conditions aux limites sont :

$$V(z=0) = V_1 \text{ et } V(z=e) = V_2.$$

On cherche une solution ne dépendant que de z . L'équation de Laplace se ramène à $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$. $V = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{e}z$ est une solution qui convient, et donc la solution unique.

$$\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{e} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ d'après la loi de Coulomb.}$$

$$Q = \epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{e} S.$$

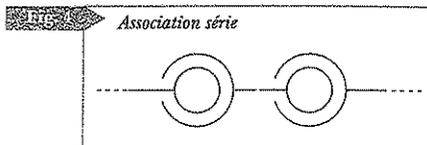
La capacité d'un condensateur à vide plan est : $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$.

2.3.4. Groupements de condensateurs

◦ Groupement en série

L'armature interne de l'un est reliée à l'armature externe de l'autre (voir figure 4).

On considère que les ensembles armature interne-armature externe sont isolés, et non chargés au départ.



Toutes les armatures internes portent alors la même charge, et la différence de potentiel aux bornes de l'ensemble est la somme des différences de potentiel aux bornes de chaque condensateur. La capacité du condensateur équivalent Γ est alors telle que :

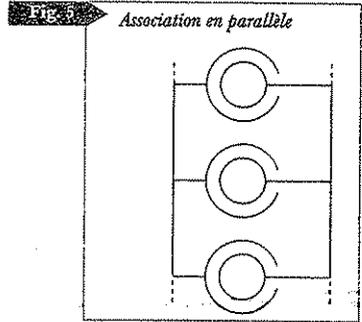
$$\frac{1}{\Gamma} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

• **Groupement en parallèle**

Les armatures internes sont reliées entre elles, au même potentiel V_1 , de même pour les armatures externes, au même potentiel V_2 (voir figure 5).

On additionne donc les charges, et la capacité du condensateur équivalent Γ est alors telle que :

$$\Gamma = \sum_i C_i$$



• **Condensateur de faible épaisseur**

Si l'on considère un condensateur de faible épaisseur, c'est-à-dire dont l'épaisseur est faible devant le rayon de courbure, il peut être considéré comme une association en parallèle de condensateurs plans, et sa capacité s'écrit :

$$\Gamma = \iint_P \varepsilon_0 \frac{dS(P)}{e(P)}$$

Si l'épaisseur est constante : $\Gamma = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$ comme pour le condensateur plan.

2.4. Énergie électrostatique

2.4.1. Énergie électrique emmagasinée dans un condensateur

• Pour un condensateur de capacité C , chargé par une différence de potentiel V , de charge Q , l'énergie emmagasinée dans le condensateur s'écrit :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

• Pour un condensateur plan : $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{e} V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S e$

L'énergie est donc proportionnelle au volume Se entre les armatures.

2.4.2. Densité volumique d'énergie électrostatique

Ce résultat est général. L'énergie électrique emmagasinée dans un condensateur est localisée dans l'espace entre les armatures, avec une densité volumique $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$.

D'une manière générale, l'énergie électrique est localisée avec une densité volumique $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ dans tout l'espace où E est non nul.

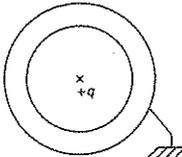
Avant la colle

Tester ses connaissances

> Corrigés p. 43

- 1 Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).
Soit un conducteur creux de forme quelconque, seul dans l'espace, maintenu au potentiel nul. On place une charge $+q$ à l'intérieur de la cavité (voir figure).

- a. Sa charge totale est nulle.
- b. La charge surfacique extérieure est nulle en tout point.
- c. La charge surfacique intérieure totale est égale à $-q$.
- d. La charge surfacique extérieure totale est égale à $+q$.



- 2 Pour un ensemble de conducteurs, les répartitions de charge ont les mêmes symétries que les répartitions de volume conducteur.

- a. Vrai
- b. Faux

- 3 Redémontrer :

a. $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ à la traversée d'une surface chargée avec la densité surfacique σ .

b. Dans un condensateur, la charge de l'armature interne est égale et opposée à celle de la face interne de l'armature externe.

- 4 a. Les forces électrostatiques s'exercent uniquement sur les charges. Pourquoi cela se traduit-il par une force d'interaction entre les conducteurs ?

b. Il n'existe pas de positions d'équilibre stable pour une particule soumise uniquement à un champ électrostatique. Pourquoi ?

- 5 Répondre aux questions suivantes.

a. Le champ $\vec{E}(x, y, z)$ à l'intérieur de la cavité (contenant ou non des charges) d'un conducteur creux maintenu à un potentiel V_0 est-il modifié si l'on change la répartition de charges à l'extérieur ?

b. De même, le champ $\vec{E}(x, y, z)$ à l'extérieur d'un conducteur creux maintenu à un potentiel V_0 est-il modifié si l'on change la répartition de charges à l'intérieur de la cavité ?

c. Pour protéger un volume expérimental des influences extérieures, il suffit de l'entourer complètement d'un conducteur ou même d'un simple grillage métallique, appelé *cage de Faraday*.

Comment ce dispositif fonctionne-t-il ?

Savoir appliquer le cours

> Corrigés p. 49

- 1 Une distribution de charges à symétrie sphérique induit un potentiel $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$.

1. Calculer le champ en tout point de l'espace.

2. a. À partir du théorème de Gauss, trouver la distribution de charges. Quelle est la charge totale de la distribution ?

b. Retrouver ces résultats à partir des équations locales.

Rappel : si V ne dépend que de r ,

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r V}{\partial r^2}$$

3. A.N. : calculer en électron-volt le puits de potentiel en O créé par la distribution volumique de charge sachant que $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $a = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

- 2 On considère un volume conducteur métallique cylindrique, de charge Q , de rayon a , en

rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de son axe de symétrie de révolution Oz .

1. Écrire la condition d'équilibre relatif des charges libres de ce conducteur.

2. En déduire la distribution volumique de charges et la différence de potentiel U entre l'axe et la périphérie.

A.N. : calculer U et commenter, avec $a = 5 \cdot 10^{-2}$ m ; $\omega = 20\pi \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$; masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg ; charge : $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

3 1. Calculer la charge d'une sphère conductrice de rayon a , portée au potentiel V_0 , seule dans l'espace.

2. En déduire le champ au voisinage de la sphère.

3. On considère deux sphères de rayon a et b , avec $a < b$, très éloignées l'une de l'autre, et portées au même potentiel.

Comparer les charges qu'elles portent, et les champs à leur voisinage. En déduire ce qu'on appelle le « pouvoir des pointes ». Commenter.

4. Retrouver le « pouvoir des pointes » en traçant l'allure des lignes de champ arrivant sur un conducteur présentant des rayons de courbure variés.

5. Expliquer pourquoi la Terre peut être considérée comme une source de potentiel nul.

4 1. Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique, composé de deux armatures

cylindriques coaxiales de rayons a et b , avec $a < b$, et de même hauteur h . On négligera les effets de bord.

Retrouver le résultat obtenu pour un condensateur de faible épaisseur en faisant tendre a vers b .

2. a. Calculer la capacité d'un condensateur sphérique, composé de deux sphères concentriques de rayons a et b , avec $a < b$.

b. Calculer le champ entre les armatures, la densité volumique d'énergie, et l'énergie totale emmagasinée dans le condensateur.

Retrouver le résultat $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$.

c. On insère une troisième sphère concentrique de rayon c infiniment mince, $a < c < b$, non chargée, et isolée. La charge Q portée par l'armature interne est-elle modifiée ?

Retrouver ce résultat en considérant l'association de condensateurs.

d. Reprendre la question précédente avec une sphère d'épaisseur ϵ :

$$a < c - \frac{\epsilon}{2} < c + \frac{\epsilon}{2} < b.$$

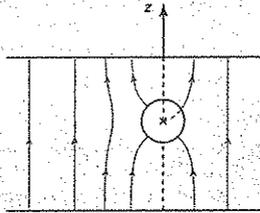
5 1. Calculer la charge d'un conducteur sphérique de rayon a , seul dans l'espace, porté au potentiel V_0 .

2. En le maintenant au potentiel V_0 , on l'entoure d'un conducteur sphérique de rayon b , porté au potentiel nul.

Calculer la nouvelle charge du conducteur et justifier le nom de condensateur.

1 – Sphère conductrice dans un champ uniforme

On place une sphère conductrice de centre O et de rayon a , isolée et non chargée dans une région où règne un champ uniforme $E_0 = E_0 e_z$. On suppose que la répartition de charges sources du champ uniforme n'est pas modifiée. On veut déterminer les perturbations de champ dues à la présence de cette sphère, et les charges induites par le champ sur la sphère conductrice (voir figure).



- 1 Déterminer en coordonnées sphériques d'origine O , le potentiel dont dérive le champ uniforme, en choisissant l'origine des potentiels en O .
- 2 On superpose à ce potentiel celui qui serait créé par un dipôle $\vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_z$ placé en O .
 - a. Donner l'expression du potentiel résultant.
 - b. Montrer qu'il existe une équipotentielle sphérique centrée en O .
 - c. Quelle doit être la valeur de p_0 pour que cette équipotentielle ait comme rayon a ?
- 3 En utilisant l'unicité de la solution de l'équation de Poisson, en déduire les perturbations de champ dues à la présence d'une sphère conductrice de rayon a dans un champ uniforme \vec{E}_0 , et la distribution de charges sur cette sphère.
- 4 Quelle serait la distribution si la sphère portait une charge $Q \neq 0$. Quel serait alors le potentiel de la sphère ?

résolution méthodique

Résoudre un problème d'équilibre entre conducteurs revient à résoudre l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ partout à l'extérieur des conducteurs, la surface des conducteurs imposant les conditions aux limites.

On peut le faire en prenant une solution de l'équation de Laplace connue (les potentiels de distributions de charge simples ou des solutions ne dépendant que d'un paramètre par exemple), et déterminer des équipotentielles. Ce sera une solution à l'extérieur de conducteurs ayant la forme de ces équipotentielles. En ajustant les paramètres pour que le potentiel ou la charge totale des conducteurs soient ceux qui sont imposés, les conditions aux limites seront vérifiées, et on aura la solution unique.

1 $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z = -\vec{\text{grad}} V_1$, donc $V_1 = -E_0 z + \text{Cte}$. En coordonnées sphériques,

$z = r \cos \theta$. L'origine des potentiels étant en O : $V_1 = -E_0 r \cos \theta$

Les charges sources d'un champ uniforme ne peuvent être qu'à l'extérieur de la zone où règne ce champ.

Dans une modélisation où ce champ occupe tout l'espace, les charges sont à l'infini, et l'origine des potentiels doit donc être choisie arbitrairement. Ici, on peut supposer que ce champ est créé par un condensateur plan, la sphère étant suffisamment loin des armatures pour ne pas perturber la répartition de charges sur celles-ci.

2

Le développement multipolaire fournit les solutions de l'équation de Laplace présentant un pôle en O .

a. Le potentiel dû au dipôle s'écrit $V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0 \cos \theta}{r^2}$.

La superposition des deux potentiels fournit donc une solution : $V = \left(\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \right) \cos \theta$

b. V est nul quel que soit θ si $r = \left(\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{\frac{1}{3}}$. La sphère de rayon $\left(\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{\frac{1}{3}}$ est donc une surface équipotentielle, de potentiel nul.

c. Pour que cela corresponde au rayon a de la sphère, il faut prendre $p_0 = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0$, et on obtient :

$$V = E_0 r \cos \theta \left(\frac{a^3}{r^3} - 1 \right)$$

3

On dispose d'une solution de l'équation de Laplace, vérifiant les conditions aux limites à l'infini : on retrouve le champ uniforme, l'influence de la sphère ne s'y faisant plus ressentir. La sphère de rayon a est équipotentielle. Il reste à vérifier que sa charge totale est nulle pour utiliser le théorème d'unicité.

La solution trouvée à la question 2.c. implique que la perturbation du champ due à la sphère conductrice à l'extérieur de la sphère est égale au champ créé par un dipôle placé au centre de la sphère.

Si l'on applique le théorème de Gauss à une surface fermée autour de la sphère, on trouvera donc que la charge intérieure à cette surface est nulle. La charge totale de la sphère conductrice est donc bien nulle.

On dispose donc bien de la bonne solution.

C'est aussi la solution que l'on obtiendrait en imposant un potentiel nul à la sphère conductrice (sphère reliée au sol).

Pour trouver la distribution de charge, on calcule le champ à la surface du conducteur (il doit être normal à la surface), et on utilise le théorème de Coulomb.

$$\bullet E_r = E_0 \cos \theta \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} \right), \text{ soit, à la surface de la sphère : } E_r(a) = 3E_0 \cos \theta.$$

$$\bullet E_\theta = E_0 \sin \theta \left(\frac{a^3}{r^3} - 1 \right), \text{ soit, à la surface de la sphère : } E_\theta(a) = 0, \text{ comme prévu.}$$

Donc la densité surfacique de charges à la surface de la sphère vaut :

$$\sigma = \epsilon_0 E_r(a) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

On retrouve bien que la charge totale est nulle.

Le champ à l'intérieur de la sphère étant nul, cette distribution surfacique crée le champ \vec{E}_0 uniforme à l'intérieur de la sphère.

► 4 Il suffit de rajouter au potentiel précédent celui d'une charge $+Q$ placée en O .

Le potentiel de la sphère serait alors $V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ et la densité surfacique :

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} + 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

en conclusion

- Dans un conducteur, les charges se déplacent pour que le volume du conducteur soit équipotentiel.
- Les conducteurs donnant la forme des équipotentielles, on cherche des solutions de l'équation de Laplace permettant d'obtenir ces équipotentielles.
- On calcule alors le potentiel des conducteurs et leur charge totale, ce qui permet d'adapter les paramètres pour obtenir une solution qui satisfasse aux conditions aux limites.

2 - Piège de Penning (d'après Navale)

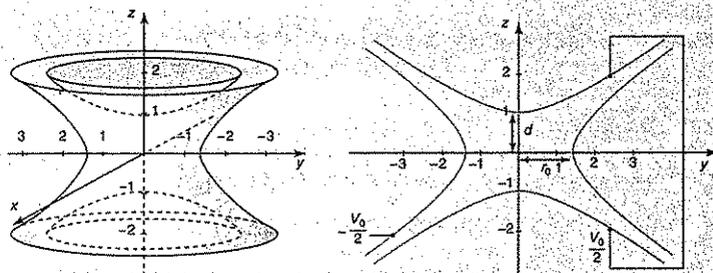
Dans une région de l'espace où l'on superpose un champ électrostatique et un champ magnétique de géométries appropriées, on peut piéger une particule élémentaire chargée (« piège de Penning »).

On étudie dans cette exercice la partie électrostatique de ce piège.

- 1 On considère une région de l'espace vide de charges où règne le seul champ électrostatique issu du potentiel $V(x, y, z) = V(\vec{r}) = \frac{V_0}{4d^2}(\alpha z^2 - x^2 - y^2)$.

- Déterminer la valeur de α .
- Montrer que le champ électrostatique associé à V possède la symétrie de révolution autour de l'axe Oz .
- Représenter l'allure des équipotentielles dans un plan méridien (contenant Oz) : préciser la nature de ces courbes et leurs asymptotes.
- Comparer le dispositif utilisé en pratique pour créer V (voir figure ci-dessous à gauche) au dispositif qui serait idéal, et que l'on précisera.

Exprimer en fonction de d , dans l'approximation identifiant ces deux dispositifs, r_0 et z_0 définis sur la figure ci-dessous à droite.



- 2 On étudie désormais le mouvement d'un électron au voisinage de O , dans ce champ.

a. Mouvement axial

Écrire la projection de l'équation du mouvement sur l'axe Oz . À quelle condition portant sur V_0 , le mouvement reste-t-il « confiné » au voisinage de O ? Décrire le mouvement dans ce cas, en déterminant en particulier la pulsation propre associée, que l'on notera ω_z , et que l'on exprimera en fonction de V_0 , e , m , et d .

A.N. : Calculer ω_z pour $d = 5 \text{ mm}$, $V_0 = -12 \text{ V}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

b. Mouvement transversal

Montrer que lorsqu'il y a confinement longitudinal, il n'y a pas confinement transversal.

3 Pour piéger la particule, il est nécessaire d'ajouter un champ magnétique parallèle à Oz : $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On notera $\omega_c = \frac{eB}{m}$ la pulsation cyclotron associée.

a. Mouvement axial

Étudier brièvement la projection sur Oz du mouvement d'un électron dans ce piège.

b. Mouvement transversal

- i) Écrire en coordonnées cartésiennes le système différentiel associé au mouvement transversal dans le plan xOy .
- ii) En déduire l'équation d'évolution de la variable complexe $\zeta = x + iy$.
- iii) Montrer que lorsque B est supérieur à une valeur critique B_c que l'on déterminera, le mouvement transversal reste borné au voisinage de O . Déterminer la valeur numérique de B_c .

résolution méthodique

1

Pour qu'une fonction représente un potentiel dans une région vide de charges, il faut qu'elle vérifie l'équation de Laplace.

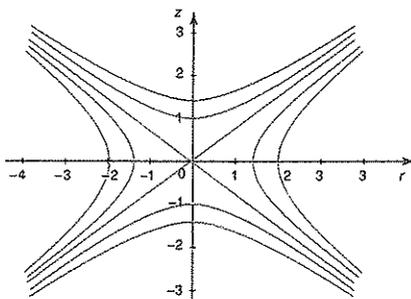
a. $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{V_0}{4d^2}(2\alpha - 4) = 0$ donc $\alpha = 2$.

b. En coordonnées cylindriques d'axe Oz , le potentiel s'écrit :

$V = \frac{V_0}{4d^2}(2z^2 - r^2)$, il ne dépend donc pas de θ .

Il a donc la symétrie de révolution autour de Oz , il en est de même du champ qui en dérive.

c. Les équipotentielles sont des hyperboloïdes de révolution, dont les traces dans le plan méridien sont des hyperboles d'asymptotes d'équation $z = \pm r\frac{\sqrt{2}}{2}$ (voir figure).



d. Pour que le dispositif soit idéal, il faudrait que les conducteurs soient des hyperboloïdes infinis. Dans la pratique, le potentiel aura la bonne valeur excepté près des extrémités des conducteurs si l'on peut négliger les effets de bord.

Pour cela, il faut que l'équipotentielle $+\frac{V_0}{2}$ soit à la distance $z_0 = d$ du point O et l'équipotentielle $-\frac{V_0}{2}$ à la distance $r_0 = d\sqrt{2}$ de O .

2 L'électron de charge $-e$ est soumis à la force $-e\vec{E}$, avec :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = \frac{V_0}{2d^2}(-2z\vec{e}_z + \vec{r}).$$

a. Le mouvement de l'électron, en projection sur Oz , est donné par l'équation :

$\ddot{z} = \frac{eV_0}{md^2}z$. Pour que la solution reste finie, il faut que V_0 soit négatif.

On pose alors $\omega_z = \sqrt{\frac{-eV_0}{md^2}}$, et le mouvement est harmonique de pulsation ω_z .

A.N. : $\omega_z = 2,9 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

b. Le mouvement transversal vérifie alors l'équation $\ddot{\vec{r}} = \frac{\omega_z^2}{2}\vec{r}$ dont les solutions tendent vers l'infini.

Il n'y a donc pas de confinement transversal s'il y a confinement longitudinal, et réciproquement.

3 La force magnétique s'exerçant sur la particule est la force de Lorentz, $-e\vec{v} \wedge \vec{B}$, soit $-e\dot{y}B\vec{e}_x + e\dot{x}B\vec{e}_y = m\omega_c(-\dot{y}\vec{e}_x + \dot{x}\vec{e}_y)$.

a. Le mouvement axial n'est pas perturbé, la force magnétique étant perpendiculaire à Oz .

b. i) En projection sur le plan xOy , les équations du mouvement s'écrivent :

$$\ddot{x} = \frac{\omega_z^2}{2}x - \omega_c\dot{y} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = \frac{\omega_z^2}{2}y + \omega_c\dot{x}.$$

ii) $\ddot{\zeta} - i\omega_c\dot{\zeta} - \frac{\omega_z^2}{2}\zeta = 0$.

iii) Le discriminant de l'équation caractéristique est réel et s'écrit $\Delta = 2\omega_z^2 - \omega_c^2$.

Pour que le mouvement soit borné, il doit être négatif, donc $\omega_c > \omega_z\sqrt{2}$, ce qui se traduit par :

$$B > B_c = \sqrt{2\frac{-mV_0}{ed^2}}$$

A.N. : $B_c = 2,34 \cdot 10^{-3} \text{ T}$, grandeur très accessible.

Ce dispositif est utilisé en pratique pour faire des tests de mécanique quantique sur un dispositif à un seul électron.

en conclusion

- ° Pour créer un potentiel électrostatique donné, entre deux équipotentiels, il suffit de « métalliser » ces équipotentiels et de les porter au potentiel convenable à l'aide d'un générateur.
- ° On ne peut pas piéger une particule chargée dans un champ électrostatique agissant seul, il faut pour cela lui ajouter l'action d'un champ magnétique.
- ° Pour étudier le mouvement d'une particule dans un champ magnétique suivant Oz , il est souvent astucieux d'utiliser la variable complexe $x + iy$ pour étudier le mouvement dans le plan xOy . La partie réelle de la solution donnera le mouvement suivant Ox et la partie imaginaire le mouvement suivant Oy . Les quatre conditions initiales, position et vitesse sur Ox et Oy , fourniront les quatre constantes d'intégration nécessaires, parties réelles et imaginaires des deux constantes d'intégration complexes.

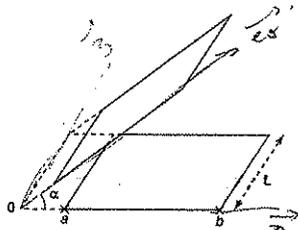


10 min

> Corrigé p. 51

Condensateur diédrique

On considère un condensateur diédrique, d'arête Oz , formé de deux portions de plans rectangulaires, de longueur $(b-a)$, de largeur L , distants de a de l'arête, formant entre eux un angle α (voir figure).



1. On rappelle l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

En déduire la capacité du condensateur, en négligeant les effets de bord.

2. Retrouver ce résultat en le considérant comme une association de condensateurs plans d'épaisseur variable.



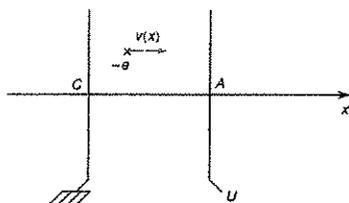
20 min

> Corrigé p. 52

Diode à vide

Deux plaques métalliques planes, d'aire \mathcal{S} et distantes de d , sont soumises dans le vide à une différence de potentiel U . L'une des plaques, la cathode, dont le potentiel est pris comme référence ($V_c = 0$), émet des électrons par effet thermoélectronique (on les considérera émis sans vitesse initiale). Ces électrons sont captés par l'autre plaque, l'anode, polarisée positivement : $V_A = U > 0$ (voir figure).

On néglige les effets de bord, c'est-à-dire que les grandeurs physiques ne dépendront que de x , distance du point considéré à la cathode.



1. Donner la relation liant la vitesse des électrons $v(x)$ au potentiel $V(x)$ entre les électrodes.

2. Donner l'expression du module de l'intensité du courant I traversant la diode, en fonction de $\rho(x)$ densité volumique de charge, $v(x)$, et \mathcal{S} aire des électrodes.

3. À l'aide de l'équation de Poisson, établir l'équation différentielle vérifiée par $V(x)$ entre les électrodes.

4. Résoudre l'équation obtenue en 3. en cherchant une solution en x^α , et en déduire la relation $I(U)$ caractéristique de la diode. (On admettra que le champ électrique est nul en $x = 0$.)



40 min

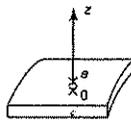
> Corrigé p. 52

Pression électrostatique

1. Pour calculer la force électrostatique exercée sur la charge $\rho d\tau$ au point M , centre du volume $d\tau$ d'une distribution, il ne faut pas prendre en compte la contribution au champ en M de la charge elle-même.

Soit une sphère de rayon a , uniformément chargée avec la densité volumique uniforme ρ_0 . Calculer le champ créé par la distribution à l'intérieur de la sphère. Vérifier qu'il est nul au centre, et qu'il n'y a donc pas de précaution particulière à prendre pour une distribution volumique (ce n'est pas le cas pour des distributions surfaciques).

2. On modélise la répartition de charges au voisinage de la surface dS de normale \vec{z}_z d'un conducteur par une densité volumique uniforme $\rho(z) = \rho_0$ sur une couche d'épaisseur ϵ petite devant la dimension caractéristique de dS (voir figure) :
si $z < 0$ ou $z > \epsilon$: $\rho(z) = 0$; si $0 < z < \epsilon$: $\rho(z) = \rho_0$.



- Calculer le champ \vec{E} à l'intérieur de cette couche.
- Calculer la force électrostatique qui s'exerce sur un volume $d\tau = dx dy dz$ de cette distribution.
- On fait tendre $\rho(z)$ vers l'infini et z vers 0, et on appelle σ la densité surfacique de charges ainsi obtenue.

i) Rappeler la relation liant σ , $\rho(z)$ et e .
 ii) En déduire, en fonction de σ , la force qui s'exerce sur l'élément de surface du conducteur $dS = dx dy$. Montrer que c'est une force de pression, et donner l'expression de la pression électrostatique.

3. Application : Soit une sphère de rayon R , portée au potentiel V . On pose au sommet de cette sphère un petit disque mince conducteur de rayon a et de masse $\zeta\pi a^2$.

- Calculer la force électrostatique s'exerçant sur ce disque.
- Pour quelle valeur V_1 du potentiel, le disque se soulèvera-t-il ? Quelle est alors la nouvelle force électrostatique qui agit sur lui ? Expliquer l'origine de la discontinuité de la force.
- En supposant qu'il est astreint à n'avoir que des mouvements verticaux, à quelle hauteur se stabilisera-t-il ?
- On diminue progressivement le potentiel de la sphère. Pour quelle valeur V_2 du potentiel, le disque se reposera-t-il sur la sphère ?



40 min

> Corrigé p. 53

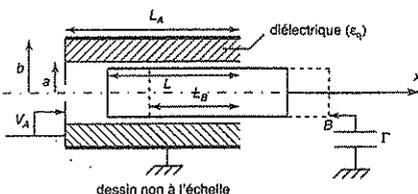
Étude d'une machine électrostatique (d'après ENSI)

Un condensateur cylindrique C dont le diélectrique est en verre de champ disruptif K et de permittivité relative ϵ_r , a son armature interne P immobile en translation selon son axe, à la manière d'un piston au moyen d'une tige isolante T . Les armatures externes et internes ont même longueur L_A et pour rayons b et a , avec $b - a \ll a$. La longueur du tube est suffisante pour qu'on puisse la considérer comme infinie. On négligera les effets de bord des armatures.

La position de P correspondant aux armatures en regard sur toute leur longueur L_A sera dite position « A ». Dans cette position, l'armature interne P vient en contact avec une butée métallique A portée à un potentiel fixe V_A par rapport à l'arma-

ture externe prise comme référentiel des potentiels (potentiel du sol). L'armature P prend la charge Q_A (voir figure).

Pour les applications numériques, on prendra : $L_A = 10$ cm ; $a = 5$ cm ; $b - a = 0,1$ cm ; $\epsilon_r = 6$; $V_A = 500$ V ; $K = 100$ kV · m⁻¹.



1. On rappelle que la capacité d'un condensateur cylindrique est proportionnelle à la longueur L des armatures en regard : $C = \alpha L$ (α désignant une constante).

Donner une expression approchée de α .

Calculer C_A littéralement et numériquement.

2. Partant de la position A , on tire progressivement P hors de l'armature externe.

Quelle sera la position limite « B » pour ne pas endommager le diélectrique ?

On indicera par A et B les grandeurs relatives aux positions « A » et « B » dans tout le problème.

Calculer L_B , C_B et la tension V_B aux bornes de C .

3. a. Écrire le bilan de l'énergie électrostatique W_e acquise par C dans la translation de l'armature mobile de la position A à la position B , et l'exprimer en fonction de Q_A .

En déduire le sens de la force que l'on a dû exercer sur la tige T selon l'axe du condensateur orienté vers l'extérieur. Donner la valeur numérique de W_e .

b. Quelle est l'énergie W_e fournie sous forme électrique par l'extérieur ? Donner sa valeur numérique. Que suggère la comparaison des deux résultats précédents ?

4. La course de l'armature mobile P est limitée en position B par une butée métallique B , reliée par un fil métallique de très faible résistance à l'armature d'un condensateur de capacité Γ dont l'autre armature est reliée au sol.

Quelle est la tension V_1 finale d'équilibre aux bornes de Γ après que, partie de A , l'armature P ait touché la butée B ? On exprimera V_1 en fonction de V_B et des grandeurs géométriques.

Donner la valeur numérique de V_1 avec $\Gamma = 5$ nF.

5. On fait revenir l'armature mobile P de la position B précédente à la position A puis aller de nouveau en B. À chaque contact de butée en A et B, on attend l'équilibre électrique, atteint d'ailleurs presque instantanément. Exprimer en fonction de V_B la nouvelle tension V_2 aux bornes de Γ . Donner sa valeur numérique.

6. Partant de l'état précédent, on réitère les opérations de va-et-vient.

Donner l'expression de $V_n - V_B$ en fonction de $V_{n-1} - V_B$.

Quelle est la valeur de la tension V_n après $n - 1$ opérations ?

Calculer la tension limite V_ℓ de charge de Γ . Retrouver directement ce résultat par le raisonnement. Donner la valeur numérique de V_ℓ .



40 min

> Corrige p. 54

Étude d'un colloïde (d'après ESTP)

Une solution colloïdale est une suspension dans l'eau de particules chargées de même signe. On suppose que ces particules, de très faible dimension, sont cependant de taille notable devant celle des ions qui les entourent, ions d'une eau plus ou moins pure constituant l'électrolyte de la solution.

Ces derniers, quasi-punctuels, portent la charge $q = e$ ou $-e$ (e étant la charge de l'électron) et ont la densité volumique N_0 , identique pour les anions et les cations (neutralité globale de l'électrolyte).

Ces ions, soumis à un potentiel V , se répartissent en moyenne selon la loi de Boltzmann :

$$\frac{N^\pm}{N_0} = \exp\left(-\frac{\pm eV}{kT}\right), \text{ où } V \text{ est le potentiel local, } T \text{ la}$$

température absolue, et k la constante de Boltzmann.

La population des particules est ici considérée comme suffisamment diluée dans la solution pour que champ et potentiel électrostatiques à leur voisinage ne soient créés que par l'une d'entre elles et les ions qui l'entourent.

Ces particules portent une charge Q que l'on suppose uniformément répartie à la surface d'une sphère de rayon r_0 .

1. Calcul de la densité de charge

On ne s'intéresse ici qu'à des rayons $r \gg r_0$ autour d'une particule.

a. Établir l'expression de la densité volumique de charge ρ entourant une particule en fonction de N_0 , e , V , et kT .

b. Que devient cette expression lorsque l'on peut considérer $eV \ll kT$?

2. Loi du potentiel $V(r)$

On admettra dorénavant que l'hypothèse $eV \ll kT$ est vérifiée, à savoir que l'agitation thermique est prépondérante pour la description du système.

a. Écrire l'équation de Poisson obtenue dans ces conditions. On posera $\lambda^2 = \frac{\epsilon_0 kT}{2N_0 e^2}$, et en déduire

l'équation différentielle vérifiée par $U(r) = rV(r)$.

Rappel : le Laplacien en symétrie sphérique s'écrit

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 rV}{\partial r^2}.$$

b. Donner la solution générale de cette équation. Simplifier, en notant que $V(r)$ doit tendre vers zéro à l'infini.

Soit A la constante d'intégration du terme convergent. Donner l'expression de V en fonction de A , r et λ .

c. Donner une interprétation physique de λ . Calculer, pour les données suivantes, la valeur de N_0 .

$$r_0 = 5 \cdot 10^{-9}, \quad \lambda = 20 \text{ } \Omega, \quad \tau_0, \quad e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C,}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}, \quad k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1},$$

$$T = 300 \text{ K.}$$

d. Écrire, toujours pour $r > r_0$, le champ créé par une particule considérée comme un conducteur parfait, si elle était dans le vide.

En déduire la valeur de A en fonction de Q , ϵ_0 , λ et r_0 .

Donner l'expression de $V(r)$ en fonction de Q , ϵ_0 , λ , r_0 et r .

3. Forces dans le système colloïdal

a. Écrire l'expression de la force $F = |\vec{F}|$ s'exerçant entre deux particules de colloïde éloignées de la distance d ($d > 2r_0$), en fonction de Q , ϵ_0 , λ , r_0 et d .

b. Comparer avec la force $F_0 = |\vec{F}_0|$ s'exerçant entre ces deux mêmes particules dans le vide. Commenter.

c. Calculer le rapport $\frac{F}{F_0}$ avec les données précédentes, et $d = 100r_0$.

Calculer ce même rapport pour une densité N_0 multipliée par 10. Expliquer alors ce que l'on appelle en physique la *floculation*, ou formation de gélatine.



40 min

> Corrigé p. 54

Influence d'une droite chargée sur un plan conducteur (d'après ENSSET)

Soit un plan conducteur au potentiel 0. À une distance d du plan, on place une droite (D) chargée uniformément avec la densité linéique λ . On veut connaître la répartition de charges sur le plan, et la force d'interaction entre le plan et la droite chargée.

1. Soient deux droites chargées avec les densités linéiques uniformes $+\lambda$ et $-\lambda$, parallèles et distantes de $2d$.

a. Montrer que le champ créé par ces deux droites dans le demi-espace contenant (D) est le même que celui créé par la charge (D) et les charges du plan conducteur.

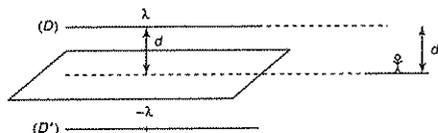
b. En déduire la charge surfacique induite sur le plan par la droite (D). Quelle est la charge portée par unité de longueur parallèlement à la droite du plan ?

2. Quelle est la force exercée par le plan sur la droite par unité de longueur ?

3. a. Pour les équipotentielles proches de la droite (D), montrer que l'influence du plan est négligeable, et que l'on peut donc les considérer comme des cylindres de révolution autour de la droite (D).

b. L'exercice modélise un conducteur caténaire de traction électrique à courant continu de rayon 0,5 cm, parallèle au plan du sol à une hauteur de 6 m, porté au potentiel $V_0 = 1\,500$ V.

Que vaut le champ sous la ligne au niveau du sol ? Quelle est la valeur du potentiel à la cote 1,80 m au-dessus du sol, à la verticale du conducteur ? Un individu mesurant 1,80 m est-il en danger lorsqu'il passe sous la ligne (voir figure) ?



40 min

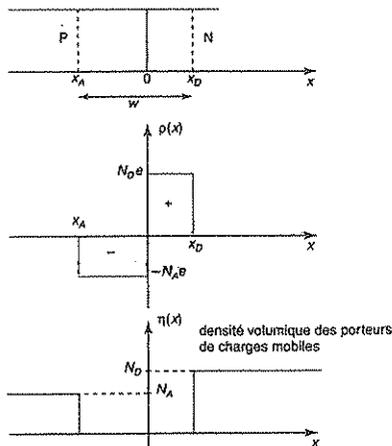
> Corrigé p. 55

Étude d'une jonction P-N (d'après ENSI)

1. Jonction P-N isolée

En théorie, une jonction P-N pourrait être réalisée par soudure en $x = 0$ d'une surface de semi-

conducteur dopé P et d'une surface de semi-conducteur dopé N. En pratique, on part d'un même substrat semi-conducteur monocristallin préalablement dopé P et l'on réalise la zone dopée N par diffusion gazeuse d'atomes pentavalents donneurs d'électrons (voir figure).



conductor dopé N comme un gaz d'électrons libres de densité volumique N_D dans un solide et un semi-conducteur dopé P comme un gaz de porteurs positifs de charge $+e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C de densité volumique N_A . Les semi-conducteurs N et P sont globalement neutres dans la mesure où les charges libres sont compensées par des charges fixes.

La jonction P-N est la zone frontière séparant la région P de la région N.

Dans la mesure où l'épaisseur w de la jonction est faible devant sa surface, on la considérera comme illimitée dans les directions y et z .

Au moment de la création de la jonction, les électrons de charge $-e$ du semi-conducteur dopé N ont tendance à diffuser dans le semi-conducteur dopé P, en même temps que les porteurs de charge $+e$ du semi-conducteur dopé P ont tendance à diffuser dans le semi-conducteur dopé N.

Finalement, la région ($0 < x < x_D$) initialement neutre est vidée de ses électrons libres, et devient uniformément chargée positivement avec une densité volumique $\rho(x) = N_D e$, et la région ($x_A < x < 0$) initialement neutre est vidée de ses porteurs de charge positive, et devient uniformément

chargée négativement avec une densité volumique $\rho(x) = -N_A e$.

Dans le cas du silicium de permittivité relative $\epsilon_{SC} = 3,6\pi$, on observe, à température ambiante $T = 300 \text{ K}$, que la barrière de potentiel créée entre les régions N et P est $V_0 = 0,7 \text{ V}$ lorsque $N_A = 1,0 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$ et $N_D = 2,0 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$. On admet que l'existence d'une permittivité relative ϵ_{SC} se traduit par le remplacement dans les formules de l'électrostatique de ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_{SC}$.

a. Calculer et représenter en fonction de x la répartition du champ électrique $E(x)$ lorsque le semi-conducteur n'est soumis à aucune excitation extérieure.

On justifiera que le champ électrique est nul en dehors de la jonction ($x < x_A$ et $x > x_D$).

b. Calculer et représenter $V(x)$ dans les mêmes conditions.

c. Exprimer et calculer, toujours dans ces conditions, l'épaisseur $w = x_D - x_A$ de la zone de jonction vidée de ses porteurs de charge ou zone de charge d'espace en fonction de ϵ_{SC} , V_0 , N_A et N_D .

2. Jonction P-N soumise à une différence de potentiel extérieure

Lorsque l'on soumet la jonction P-N à une différence de potentiel extérieure V_{AK} , la barrière de potentiel entre les régions N et P devient $(V_0 - V_{AK})$. Le

modèle précédent reste valable, mais les valeurs de x_A et x_D sont modifiées.

• Lorsque V_{AK} est positif, la barrière de potentiel est abaissée, et l'on observe le passage d'un courant entre l'anode et la cathode.

• Lorsque V_{AK} est négatif, la barrière de potentiel est surélevée et l'on observe un courant inverse $I_{AK} = I_S < 0$ d'amplitude négligeable.

Ces deux états, conducteur et isolant, caractérisent le fonctionnement en diode de la jonction P-N.

On va s'intéresser à la jonction polarisée en inverse par une tension $V_{AK} = -V < 0$ et étudier son comportement vis-à-vis de petites variations δ de la barrière de potentiel.

a. Donner l'expression de la quantité de charges stockées respectivement dans les régions Ox_A et Ox_D en fonction de ϵ_{SC} , S surface de la jonction, N_A , N_D , V_0 et V .

b. Calculer ces quantités de charge en utilisant $V_{AK} = -V = -3,5 \text{ V}$ et $S = 1 \text{ mm}^2$.

c. Lorsque l'on superpose une petite variation de tension δV à la tension V , on observe une modification de la largeur w de la zone de jonction vidée de ses porteurs de charge, associée à une modification de la charge stockée dans chacune des régions Ox_A et Ox_D .

Déterminer et calculer la capacité de la jonction associée à ces petites variations de tension et de charge.

Tester ses connaissances

1 Réponse a. Faux. La solution $V = 0$ en tout point extérieur au conducteur vérifie les conditions aux limites, c'est donc la solution. E est donc nul partout à l'extérieur du conducteur. D'après le théorème de Gauss, la somme de la charge totale Q du conducteur et de la charge de la cavité est nulle : $Q = -q$.

Réponse b. Vrai et Réponse d. Faux. Le champ étant nul en tout point de la surface extérieure, la distribution surfacique est nulle en tout point d'après le théorème de Coulomb.

Réponse c. Vrai. On dit qu'il y a influence totale. Ces charges ont été fournies par le générateur de potentiel nul pour compenser à l'intérieur du conducteur le champ dû à la charge $+q$. En général, la distribution n'est pas uniforme.

2 Réponse b. Faux. Il suffit de considérer deux conducteurs symétriques par rapport à un plan (Π) , portés aux potentiels V_0 et $-V_0$: (Π) sera plan de symétrie pour les volumes conducteurs, et plan d'antisymétrie pour les répartitions de charge. Pour que ce soit vrai, il faudrait que les potentiels de ces conducteurs aient les mêmes symétries que les volumes conducteurs.

3 a. Cette propriété est directement liée aux deux propriétés du champ électrique : $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ et $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ou, de manière équivalente, à :

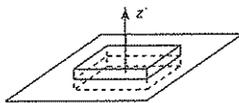
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{et} \quad \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Si l'on choisit Oz perpendiculaire à l'élément de surface $dx dy$ chargé avec la densité surfacique σ la circulation sur la courbe orientée représentée sur la figure ci-contre s'écrit, en faisant tendre la hauteur du rectangle vers 0 ce qui rend nulles les contributions des deux côtés normaux à la surface : $(E_x(z_+) - E_x(z_-))\delta\ell_x = 0$, soit : $E_x(z_+) = E_x(z_-) = 0$ continuité de la composante x .

On démontre de même la continuité de la composante y :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \text{ entraîne la continuité de la composante de } \vec{E} \text{ tangente à la surface chargée.}$$

Le théorème de Gauss appliqué à la surface fermée représentée sur la figure ci-contre s'écrit, en



faisant tendre l'épaisseur vers 0 ce qui rend nulle la contribution au flux des surfaces latérales :

$$(E_x(z_+) - E_x(z_-))\delta S = \frac{\sigma \delta S}{\epsilon_0}, \text{ soit une discontinuité}$$

$\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ de la composante normale à la surface chargée.

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ entraîne une discontinuité de la composante normale : } \vec{E}_{N_2} - \vec{E}_{N_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}.$$

L'ensemble se traduit par l'expression :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

On peut, de manière équivalente, démontrer ces propriétés à partir des équations locales et des dérivées partielles. On remarque que seules les dérivées par rapport à z pourront éventuellement devenir infinies, conduisant à une discontinuité d'une composante de \vec{E} :

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \text{ donc il n'y a pas de discontinuité de } E_y.$$

De même, $\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0$ et il n'y a pas de discontinuité de E_x .

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ avec } \rho \rightarrow \infty, \text{ et } \epsilon \rightarrow 0.$$

La discontinuité ne peut porter que sur $\frac{\partial E_z}{\partial z}$.

Par définition, $\sigma = \int_0^{\epsilon} \rho(z) dz$. En sommant sur l'épaisseur ϵ et en faisant tendre ϵ vers 0 :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\epsilon} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (E_z(\epsilon) - E_z(0)).$$

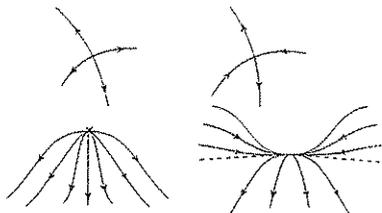
Il y a donc une discontinuité $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ de la composante normale, de l'intérieur vers l'extérieur, et continuité de la composante tangentielle, ce qui se résume à l'expression vectorielle $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$.

b. Il suffit d'appliquer le théorème de Gauss à une surface dans l'épaisseur de l'armature externe entourant complètement l'armature interne. Le champ étant nul dans le conducteur, la charge intérieure à cette surface est nulle : elle est composée de la charge à la surface de l'armature interne et de la charge à la surface interne de l'armature externe. Ces deux charges sont donc égales et opposées.

4 a. Sauf cas exceptionnel (émission thermoélectrique, effet photoélectrique) les électrons ne peuvent pas quitter le conducteur. C'est donc qu'à la surface du conducteur, il y a une force exercée par le réseau métallique du conducteur sur les électrons, égale et opposée à celle exercée par le champ électrostatique. D'après le principe de l'action et de la réaction, le réseau est donc soumis à une force égale à celle que subissent les électrons qu'il maintient à sa surface.

b. S'il y avait un extremum du potentiel en un point M , par exemple un maximum, les lignes de champ divergeraient à partir de ce point, et le flux sortant d'une surface fermée autour de ce point serait positif, ce qui est impossible s'il n'y a pas de charges. Un équilibre stable correspond à un minimum du potentiel, et est donc irréalisable ainsi.

Remarque : cela n'empêche pas l'existence de points où le champ serait nul : ce qui correspondrait alors à un minimum du potentiel dans une direction, et à un maximum dans un autre (profil en « selle de cheval », voir ci-dessous).



5 À l'intérieur de la cavité, l'équation de Poisson reste inchangée, et les conditions aux limites sur la cavité sont inchangées. Il n'y a donc aucun effet électrostatique à l'intérieur de la cavité.

Le raisonnement est le même pour l'extérieur : le conducteur porté à un potentiel V_0 sert d'écran électrostatique entre l'intérieur et l'extérieur. La répartition de charges change sur le conducteur pour compenser les changements du champ dus aux modifications des répartitions de charges.

C'est le principe utilisé pour la cage de Faraday : le grillage étant équipotentiel, la surface qu'il délimite est globalement équipotentiel, les déformations de l'équipotentielle portant sur des distances de l'ordre de grandeur de la taille du maillage. Si la cage est à la masse, on est dans le cas précédent. Si elle n'est pas reliée, l'effet sera le même à condition que l'ensemble des dispositifs intérieurs soient isolés de l'extérieur. Une modification éventuelle du potentiel de la cage s'appliquerait alors à l'ensemble du dispositif intérieur, sans modification des champs électrostatiques.

Savoir appliquer le cours

1 $\vec{E} = -\text{grad}V = \frac{q \exp\left(-\frac{r}{a}\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \vec{z}$.

2. a. D'après le théorème de Gauss, la charge intérieure à une sphère de rayon r sera :

$$Q(r) = 4\pi r^2 \epsilon_0 E(r) = q \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right).$$

Si on fait tendre r vers 0, $Q(r)$ tend vers q : il y a donc une charge ponctuelle en O .

Si l'on fait tendre r vers l'infini, $Q(r)$ tend vers 0 : cette charge ponctuelle est donc entourée d'un nuage de charges négatives de densité volumique $\rho(r)$.

Entre les sphères de rayon r et $r + dr$, il y aura une charge $4\pi r^2 \rho(r) dr = \frac{dQ(r)}{dr} dr$, soit :

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dQ}{dr} = -\frac{q}{4\pi r a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

b. $\rho = -\epsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 rV}{\partial r^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{q}{4\pi a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right)$
 $= -\frac{q}{4\pi r a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right).$

Il ne faut pas oublier de remarquer la divergence en $\frac{1}{r}$ du potentiel en O signe de la présence d'une charge en O . En faisant tendre r vers 0, on retrouve le potentiel créé uniquement par cette charge, qui vaut donc $+q$.

Remarque : une discontinuité de la dérivée de $V(r)$ indiquerait la présence d'une charge surfacique.

3. La contribution au potentiel de la distribution volumique est : $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\exp\left(-\frac{r}{a}\right) - 1 \right)$, soit, en O un puits de potentiel de $-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = -27$ volts : à comparer avec l'énergie d'ionisation de 13,6 eV de l'atome d'hydrogène.

2 1. Dans le référentiel en rotation, l'équilibre s'écrit en tenant compte de la force d'inertie axifuge : $-\epsilon \vec{E} + m\omega^2 r \vec{e}_r = 0$.

Dans le conducteur à l'équilibre, \vec{E} n'est donc pas nul, mais égal à $\frac{m}{\epsilon} \omega^2 r \vec{e}_r$.

2. La différence de potentiel entre l'axe et le centre s'écrit : $V(a) - V(0) = -\frac{m}{\epsilon} \omega^2 \frac{a^2}{2}$

$\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 \operatorname{div} \left(\frac{m}{\epsilon} \omega^2 (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) \right) = 2 \frac{m}{\epsilon} \epsilon_0 \omega^2$, indépendant de la charge totale Q du conducteur. Le conducteur étant isolé, il apparaît un surplus de charges au voisinage de la surface.

A.N. : $V(a) - V(0) = -2,8 \cdot 10^{-11}$ volts. C'est donc toujours négligeable, et on pourra considérer le volume comme équipotentiel. De même la densité volumique de charges est négligeable, et on pourra la considérer comme nulle comme dans un conducteur immobile.

3 1. Le problème est à symétrie sphérique. $Q = 4\pi\epsilon_0 a V_0$.

2. La densité surfacique est donc $\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{a}$, et le champ à la surface, d'après le théorème de Coulomb : $\vec{E} = \frac{V_0}{a} \vec{e}_r$.

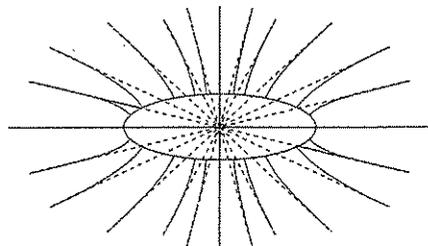
3. Le rapport des charges est égal au rapport des rayons, le rapport des champs est inversement proportionnel au rapport des rayons : $\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{a}{b}$, $\frac{E_a}{E_b} = \frac{b}{a}$.

Le champ est donc plus intense dans les régions de faible rayon de courbure : c'est ce qu'on appelle « le pouvoir des pointes ». Les pointes présentant des rayons de courbure très faibles, le champ à leur voisinage est très intense, au point qu'il y a parfois ionisa-

tion de l'air dans ce voisinage, qui devient conducteur : Il se produit alors une décharge sous forme d'une étincelle.

Cela favorise en particulier le passage de la foudre, d'où le principe du paratonnerre.

4. Loin du conducteur, les équipotentielles prennent une forme quasi-sphérique, centrée sur le conducteur. Les lignes de champ s'infléchissent au voisinage du conducteur pour arriver perpendiculairement à sa surface (voir figure).



En partant de deux tubes de champ de même section loin du conducteur, les lignes de champ sont plus resserrées là où les rayons de courbure sont les plus faibles. En dehors des conducteurs, le flux de \vec{E} est conservatif. Donc, si la section du tube de champ est plus faible, le champ est plus intense.

5. Le rayon de la Terre est suffisamment grand pour que l'on puisse négliger ses variations de potentiel liées à des échanges de charge. C'est donc une source de potentiel qu'on prend comme référence.

4 1. On néglige les effets de bord, c'est-à-dire que l'on considère que le champ ne dépend que de r en coordonnées cylindriques.

L'application du théorème de Gauss à un cylindre de hauteur h et de rayon $a < r < b$ donne l'expression du champ entre les armatures : $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r} \vec{e}_r$, si Q est la charge portée par l'armature interne de hauteur h . On en déduit le potentiel : $V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{r}$ en prenant l'origine des potentiels sur l'armature externe.

$V(a) - V(b) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{b}{a}$, et la capacité du conden-

sateur s'écrit : $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$

Si le condensateur est de faible épaisseur :

$$\epsilon = b - a \ll a, \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(1 + \frac{\epsilon}{a}\right)} \approx 2\pi\epsilon_0 h \frac{a}{\epsilon}$$

On retrouve la formule $C = \frac{\epsilon_0 S}{\epsilon}$.

2. a. D'après le théorème de Gauss appliqué à une sphère de rayon $a < r < b$, le champ entre les armatures vaut $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, et le potentiel s'écrit donc

$$V = Cte + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \text{ ce qui donne :}$$

$$V(a) - V(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

La capacité vaut donc : $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$

b. Entre les armatures, le champ vaut $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$,

donc la densité volumique d'énergie $\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$, et l'énergie totale emmagasinée entre les armatures :

$$E = \int_a^b \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

c. Cela revient à métalliser l'équipotentielle de rayon c , sans apporter de charges. Il n'y aura donc rien de changé entre les armatures. La nouvelle sphère aura pour potentiel $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c}$.

L'ensemble peut être considéré comme deux condensateurs en série :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c - \frac{\epsilon}{2}} + \frac{1}{c + \frac{\epsilon}{2}} - \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{\epsilon}{c^2 - \frac{\epsilon^2}{4}} \right) \end{aligned}$$

La capacité est donc changée, et la nouvelle charge Q

$$\text{vaut : } Q = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab \left(c^2 - \frac{\epsilon^2}{4} \right)}{(b-a) \left(c^2 - \frac{\epsilon^2}{4} \right) - \epsilon ab} V$$

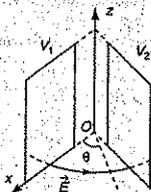
5 1. Le problème est à symétrie sphérique. $Q = 4\pi\epsilon_0 a V_0$ pour la sphère seule.

2. $V_0 = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$, soit une charge $Q' = \frac{b}{b-a} Q$,

d'autant plus grande que la sphère extérieure est proche de la sphère intérieure. Le condensateur permet de charger davantage un conducteur à partir du même générateur électrostatique : condensation d'électricité sur l'armature interne.

S'entraîner

1. Si l'on néglige les effets de bord, les armatures sont des morceaux d'équipotentielles $\theta = 0$ et $\theta = \alpha$, dans un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz (voir figure). Négliger les effets de bord consiste à considérer les lignes de champ comme des cercles centrés sur Oz où, ce qui revient au même, que les équipotentielles sont des plans contenant Oz .



Un potentiel ne dépendant que de θ permet d'obtenir de telles équipotentielles.

$U = A\theta + B$ vérifie l'équation de Laplace. Si les armatures

(1) et (2) sont aux potentiels V_1 et V_2 , $U = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\alpha} \theta$ vérifie les conditions aux limites.

On en déduit le champ au voisinage de l'équipotentielle de l'armature (1) au potentiel V_1 : $\vec{E} = \frac{1}{r} \frac{V_1 - V_2}{\alpha} \vec{e}_\theta$.

La densité surfacique vaut donc $\frac{\epsilon_0 V_1 - V_2}{r \alpha}$, et la charge totale de l'armature (1) :

$$\epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{\alpha} L \int_a^b \frac{dr}{r} = \epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{\alpha} L \ln \frac{b}{a}$$

La capacité du condensateur est donc : $C = \epsilon_0 \frac{L}{\alpha} \ln \frac{b}{a}$

2. On peut considérer l'ensemble comme des condensateurs en parallèles, d'épaisseur αr , d'aire Ldr . Le condensateur équivalent a donc une capacité :

$$C = \int_a^b \epsilon_0 \frac{Ldr}{\alpha r} = \epsilon_0 \frac{L}{\alpha} \ln \frac{b}{a}$$

Le champ $\frac{1}{r} \frac{V_1 - V_2}{\alpha} \vec{e}_\rho$ est en effet de norme constante sur les lignes de champ qui sont des arcs de cercle de rayon r . En prenant pour épaisseur des condensateurs plans αr , la circulation entre les armatures est donc bien la même dans les deux cas.

2. 1. L'énergie potentielle électrostatique est $-\epsilon V(x)$. La conservation de l'énergie mécanique fournit la relation demandée :

$$\frac{1}{2} m v^2(x) = \epsilon V(x)$$

2. Le module de l'intensité du courant s'écrit : $I = -\rho(x)v(x)S$, en tenant compte de ce que la densité de charge est négative.

3. $\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$. Les deux premières équations permettent d'obtenir une autre expression de $\rho(x)$ en fonction de $V(x)$: $\rho(x) = -\frac{I}{v(x)S} = -\frac{I}{S} \sqrt{\frac{m}{2\epsilon V(x)}}$, d'où l'équation différentielle vérifiée par $V(x)$:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2\epsilon V(x)}}$$

4. Si l'on cherche une solution en Ax^α , A et α doivent vérifier :

$$\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2} = \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}} A^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{pour tout } x, \text{ soit}$$

$$\alpha-2 = -\frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = \frac{4}{3}, \quad \text{et } A^{\frac{3}{2}} = \frac{9I}{4\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}$$

$$\text{La solution s'écrit donc } V = \left(\frac{9I}{4\epsilon_0 S}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{m}{2\epsilon}\right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{4}{3}}$$

Elle vérifie $V(0) = 0$ et $E(0) = 0$. C'est bien la solution cherchée.

Pour $x = d$, $V(d) = U$. Donc la relation entre I et U s'écrit :

$$I = \frac{4\epsilon_0 S}{9d^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}}} U^{\frac{3}{2}}$$

3. 1. L'application du théorème de Gauss à une sphère de rayon $r < a$ donne :

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r, \quad \text{qui s'annule en } r = 0.$$

2. a. Dans le conducteur, le champ est nul. Au voisinage de la surface, seules les dérivées partielles par rapport à z

sont non négligeables, $\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0}$, donc, à

$$\text{l'intérieur de la couche : } \vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \vec{e}_z$$

b. Le volume dt de cote z , de charge $\rho_0 dt$ est donc

$$\text{soumis à la force électrostatique : } d\vec{F} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z dz dx dy \vec{e}_z$$

c. i) Par définition, $\sigma = \int_0^r \rho(z) dz = \rho_0 r$.

$$\text{ii) } d\vec{F} = \int_0^r \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z dz dS \vec{e}_z = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS$$

C'est donc une force de pression, vers l'extérieur du conducteur, de valeur $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$.

3. a. La pression électrostatique vaut $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$, la force électrostatique est donc égale à $\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \pi a^2 \vec{e}_z$, l'axe Oz étant la verticale passant par le centre O de la sphère, orientée vers le haut.

Le problème étant à symétrie sphérique,

$$Q = 4\pi R^2 \sigma = 4\pi \epsilon_0 R V, \quad \text{donc } \sigma = \epsilon_0 \frac{V}{R}, \quad \text{et}$$

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_0 V^2}{2R^2} \pi a^2 \vec{e}_z$$

b. Le disque décollera donc pour $\frac{\epsilon_0 V^2}{2R^2} = \zeta g$, soit

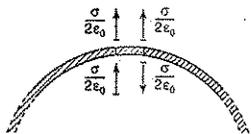
$$V_1 = \sqrt{\frac{2\zeta g}{\epsilon_0}} R.$$

Une fois le disque décollé, mais proche de la surface, il est soumis à la force électrostatique due au champ électrique $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$, soumis donc à une force deux fois plus grande.

Ce passage du champ de $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ à $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$ est dû à la contribution au champ des charges surfaciques qui ont remplacé celles qui sont parties avec le disque. Cette contribution au champ est $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ à l'extérieur, et $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ à l'intérieur pour

compenser le champ dû aux autres charges de la sphère à l'intérieur du conducteur (figure). Cela suppose que l'on peut négliger l'influence du disque sur la sphère, et que le conducteur est donc revenu dans son état initial, le générateur fournissant les charges nécessaires. Ce qui est réalisé si la distance d à la sphère est grande devant a , tout en restant petite devant R , pour que l'on puisse considérer que l'on reste au voisinage de la surface ($a \ll d \ll R$).

La force variera donc continûment de $\frac{\sigma \pi a^2}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ à $\frac{\sigma \pi a^2}{\epsilon_0} \vec{e}_z$, sur une distance de l'ordre de a .



c. À l'extérieur de la sphère, le champ est de la forme

$\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$. En $r = R$, la force était le double du poids.

L'équilibre se fera donc à une distance r telle que $\frac{R^2}{r^2} = \frac{1}{2}$, donc à une hauteur $h = R(\sqrt{2} - 1)$.

d. Le disque se reposera sur la sphère pour $V = V_2 = V_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$. La force électrostatique redeviendra alors égale à la moitié du poids.

4. 1. Pour un condensateur à vide : en négligeant les effets de bord, le problème est à symétrie cylindrique.

Le champ entre les armatures est en $\frac{1}{r}$, et s'écrit donc,

d'après le théorème de Gauss : $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} \vec{r}$.

La circulation entre les deux armatures vaut :

$V_a - V_b = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}$, et la capacité : $C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}$.

On obtient la capacité du condensateur à diélectrique

en remplaçant ϵ_0 par ϵ : $\alpha = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon r}{b} = 2\pi\epsilon_0 \epsilon \frac{a}{b-a}$

Remarque : on obtient immédiatement ce résultat en considérant que c'est un condensateur de faible épaisseur, donc de capacité $\epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{e} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{2\pi a L}{b-a}$.

A.N. : $C_A = 1,67$ nF.

2. L'armature interne est isolée, donc sa charge reste constante. Elle se déplace le long de l'armature pour se concentrer en face de l'armature externe.

$E_A = \frac{V_A}{b-a} = \frac{Q_A}{\alpha L_A (b-a)}$ et

$E_B = \frac{V_B}{b-a} = \frac{Q_A}{\alpha L_B (b-a)} = \frac{L_A V_A}{L_B (b-a)}$ limité par la valeur

K . Donc $V_B = K(b-a)$, $\frac{L_B}{L_A} = \frac{V_A}{K(b-a)}$, $C_B = \frac{L_B}{L_A} C_A$.

A.N. : $L_B = 0,5$ cm, $C_B = 8,33 \cdot 10^{-2}$ nF, $V_B = 10$ kV.

3. a. L'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité C et de charge Q vaut $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$.

$$\text{Donc } W_a = \frac{1}{2} Q_A^2 \left(\frac{1}{C_B} - \frac{1}{C_A} \right) = \frac{Q_A^2 L_A - L_B}{2\alpha L_A L_B}$$

Cette énergie est positive : l'opérateur a fourni de l'énergie mécanique qui a été transformée en énergie électrostatique. La force exercée est dans le sens du déplacement, donc dirigée vers l'extérieur.

A.N. : $W_a = \frac{V_A^2}{2} C_A \left(\frac{L_A}{L_B} - 1 \right) = 3,95 \cdot 10^{-3}$ J.

b. L'énergie électrique fournie par l'extérieur est l'énergie de charge du condensateur C_A par la source de potentiel

V_A : $W_e = \frac{1}{2} C_A V_A^2$. A.N. : $2,1 \cdot 10^{-4}$ J.

L'énergie électrostatique en position B est donc essentiellement d'origine mécanique : on a une machine électrostatique qui transforme l'énergie mécanique en énergie électrique.

4. Lorsque l'armature mobile P arrive au contact de B , la charge totale de C_B et Γ est conservée, et l'ensemble est au même potentiel V_1 .

Initialement Γ était non chargé, et son potentiel était nul. Au contact de P , son potentiel devient V_1 et sa charge ΓV_1

tels que : $(C_B + \Gamma)V_1 = C_B V_B$, soit : $V_1 = \frac{C_B}{C_B + \Gamma} V_B$

A.N. : 164 V.

5. Après un aller-retour, l'armature P est dans le même état que précédemment, mais le condensateur Γ est chargé avec $Q_1 = \Gamma V_1$.

La mise à l'équilibre s'écrit donc :

$(C_B + \Gamma)V_2 = C_B V_B + \Gamma V_1 = (C_B + \Gamma)V_B + \Gamma(V_1 - V_B)$,

soit : $(C_B + \Gamma)(V_2 - V_B) = \Gamma(V_1 - V_B) = -\frac{\Gamma^2}{C_B + \Gamma} V_B$,

d'où $V_2 = V_B \left(1 - \left(\frac{\Gamma}{C_B + \Gamma} \right)^2 \right)$. A.N. : 325 V.

6. De même $(C_B + \Gamma)V_n = C_B V_B + \Gamma V_{n-1}$
 $= (C_B + \Gamma)V_B + \Gamma(V_{n-1} - V_B)$

soit : $(C_B + \Gamma)(V_n - V_B) = \Gamma(V_{n-1} - V_B)$ ou encore

$V_B - V_n = \frac{\Gamma}{\Gamma + C_B} (V_B - V_{n-1})$.

$V_B - V_n = \left(\frac{\Gamma}{\Gamma + C_B} \right)^n V_B$ et $V_n = V_B \left(1 - \left(\frac{\Gamma}{\Gamma + C_B} \right)^n \right)$

La tension limite vaut donc $V_e = V_B$. Ce résultat était prévisible, puisque lorsque le potentiel aux bornes de Γ atteint la valeur V_B , l'armature P cesse de le charger.

A.N. : 10 kV.

5 1. a. $\rho = N^+e - N^-e = N_0e \left(\exp \frac{-eV}{kT} - \exp \frac{+eV}{kT} \right)$
 $= -2N_0e \sinh \left(\frac{eV}{kT} \right)$

b. Si $eV \ll kT$, $\rho = -\frac{2N_0e^2V}{kT}$ au troisième ordre près en $\frac{eV}{kT}$.

2. a. L'équation de Poisson s'écrit alors :

$$\Delta V = \frac{2N_0e^2V}{\epsilon_0 kT} = \frac{V}{\lambda^2}$$

V étant à symétrie sphérique : $\frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2} = \frac{V}{\lambda^2}$, soit, avec

$$U = rV : \frac{d^2U}{dr^2} = \frac{U}{\lambda^2}$$

b. La solution générale est de la forme :

$$V(r) = \frac{1}{r} \left(A \exp \left(-\frac{r}{\lambda} \right) + B \exp \left(+\frac{r}{\lambda} \right) \right)$$

$V(r)$ devant converger à l'infini, B est nul.

$$V(r) = \frac{A}{r} \exp \left(-\frac{r}{\lambda} \right)$$

Le champ s'écrit alors : $\vec{E}(r) = \frac{A}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) \exp \left(-\frac{r}{\lambda} \right) \vec{e}_r$

λ est la distance caractéristique de l'influence électrostatique de la répartition de charge.

$$N_0 = \frac{\epsilon_0 kT}{2e^2 \lambda^2}$$

A.N. : $N_0 = 7,15 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$, soit : $1,19 \cdot 10^{-4} \text{ moles} \cdot \text{m}^{-3}$, ce qui correspond pratiquement à l'auto-dissociation de l'eau pure ($1,0 \cdot 10^{-7} \text{ moles} \cdot \text{l}^{-1}$).

c. Le champ créé par la particule de charge Q dans le vide à sa surface s'écrit : $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \vec{e}_r$.

En ces points, la contribution des ions est nulle. Cette valeur doit donc coïncider avec celle obtenue à partir de

la formule précédente : $\vec{E} = \frac{A}{r_0^2} \left(1 + \frac{r_0}{\lambda} \right) \exp \left(-\frac{r_0}{\lambda} \right) \vec{e}_r$.

Donc $A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left(1 + \frac{r_0}{\lambda} \right) \exp \left(\frac{r_0}{\lambda} \right)}$

Le potentiel s'écrit donc :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r \left(1 + \frac{r_0}{\lambda} \right) \exp \left(\frac{r-r_0}{\lambda} \right)}$$

3. a. La force entre deux particules de colloïde éloignées de d s'écrit :

$$F = |\vec{F}| = Q|E(d)| = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(\frac{\lambda+d}{\lambda+r_0} \right) \exp \left(-\frac{d-r_0}{\lambda} \right)$$

b. Dans le vide, on aurait $F_0 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$. L'existence des

ions modifie donc la force d'interaction par un facteur

$$\frac{F}{F_0} = \left(\frac{\lambda+d}{\lambda+r_0} \right) \exp \left(-\frac{d-r_0}{\lambda} \right), \text{ fonction décroissante de } d$$

La présence d'ions autour de la charge Q diminue la force répulsive qui existe entre deux particules chargées de même signe. Il y a écrantage de la force électrostatique.

c. Avec $d = 100r_0$: $\frac{F}{F_0} = 4,05 \cdot 10^{-2}$ Si l'on multiplie

la densité N_0 par 10, on diminue λ d'un facteur $\sqrt{10}$:

$$\lambda = 6,32r_0. \text{ On obtient alors : } \frac{F}{F_0} = 2,3 \cdot 10^{-6}$$

En présence d'ions dans la solution, la répulsion d'origine électrostatique entre les particules chargées identiques qui les maintenait éloignées diminue fortement avec la concentration en ions, d'où leur rapprochement et la formation d'agrégats : phénomène de floculation.

6 1. a. Le champ créé par une droite infinie, uniformément chargée avec la densité linéique λ en un point M à la distance r de la droite est donné par le théorème de Gauss :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

Le potentiel s'en déduit : $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r}$, où a est le rayon de l'équipotentielle cylindrique choisie comme origine des potentiels.

Soit Oz la normale au plan passant par les droites, Ox la direction des deux droites : le potentiel créé par les deux droites en un point $M(x, y, z)$ s'écrit :

$$V(x, y, z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(d+z)^2 + y^2}}{\sqrt{(d-z)^2 + y^2}}$$

Dans cette distribution, le plan $z = 0$ est l'équipotentielle nulle. Donc, dans le demi-espace limité par le plan et contenant (D) , la solution de l'équation de Laplace satisfaisant aux conditions aux limites est la même pour le plan conducteur et la droite (D) et pour les deux droites (D) et (D') . Il y a donc identité des champs électriques pour les deux distributions de charges.

b. Dans ce demi-espace, le champ électrique s'écrit donc, en un point $M(x, y, 0)$ du plan conducteur :

$$\vec{E}(x, y, 0) = -(\text{grad}V)_{x,y,0} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{d}{d^2 + y^2} \vec{e}_z$$

La densité surfacique de charges induite sur le plan conducteur vaut donc, d'après le théorème de Coulomb :

$$\sigma = \frac{-\lambda}{\pi} \frac{d}{d^2 + y^2}$$

• La charge par unité de longueur portée par le plan s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\lambda}{\pi} \frac{d}{d^2 + y^2} dx = -\frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{d^2}} d\left(\frac{y}{d}\right) \\ = -\frac{\lambda}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{y}{d}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = -\lambda.$$

Remarque : ce résultat peut se retrouver très rapidement, car l'application du théorème de Gauss à une surface limitée par le plan conducteur, et des plans parallèles à yOz doit donner la même charge intérieure dans les deux configurations : la charge par unité de longueur du plan doit être donc la même que celle de la droite (D').

2. La force exercée par le plan sur la droite est la même que celle qu'exercerait la droite (D') :

Le champ créé par (D') en un point de la droite (D) vaut, d'après la formule de la question 1. a. : $\frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \vec{e}_x$, et

la force par unité de longueur est donc : $\vec{F} = \frac{-\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 d} \vec{e}_z$ force attractive.

3. a. Le potentiel à la distance a de (D) dû à (D) et (D') varie entre $V(x, 0, d-a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2d-a}{a}$ et

$$V(x, 0, d+a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2d+a}{a}.$$

Si l'on néglige a devant d , le cylindre d'axe (D) et de rayon a peut donc être considéré comme l'équipotentielle $V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2d}{a}$. La droite équivalente au conducteur de rayon a porte la charge linéique $\lambda = 2\pi\epsilon_0 \frac{V_0}{\ln \frac{2d}{a}}$.

b. Le champ à la verticale du conducteur, vaut au niveau du sol :

$$\vec{E}(0, 0, 0) = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 d} \vec{e}_z = -\frac{2V_0}{2d \ln \frac{2d}{a}} \vec{e}_z, \text{ et le potentiel à la}$$

$$\text{hauteur } h = 1,80 \text{ m : } V(x, 0, h) = \frac{V_0}{\ln \frac{2d}{a}} \ln \frac{d+h}{d-h}$$

$$\text{A.N. : } |\vec{E}| = 64,2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \text{ et } V = 119 \text{ V}.$$

Un individu étant un milieu conducteur, son passage perturbe localement la forme des équipotentielles, et son corps forme à l'équilibre un volume équipotentiel. S'il est isolé, sa charge totale reste nulle. S'il ne l'est pas, son potentiel est celui du sol, donc nul, et il n'emmagasine aucune énergie lors de son passage. Il n'y a donc pas de risque. Le cas serait différent s'il touchait la source de tension, ses pieds n'étant pas isolés du sol.

7 1. Dans le modèle considéré, \vec{E} ne dépend que de x .

a. Dans la jonction, à l'équilibre, le champ électrique compense l'action de la diffusion. Ailleurs, le milieu est neutre, et de densité volumique de porteurs de charge uniforme, donc l'équilibre se traduit par $\vec{E} = \vec{0}$ comme dans les conducteurs.

En tenant compte de la permittivité relative, l'équation locale du champ s'écrit dans la jonction :

$$x_A \leq x \leq 0 : \frac{dE_x}{dx} = -\frac{N_A e}{\epsilon_0 \epsilon_{SC}}, \quad 0 \leq x \leq x_D :$$

$$\frac{dE_x}{dx} = +\frac{N_D e}{\epsilon_0 \epsilon_{SC}}, \quad x < x_A \text{ et } x > x_D : \vec{E} = \vec{0}.$$

$$x_A \leq x \leq 0 : \vec{E} = -\frac{N_A e}{\epsilon_0 \epsilon_{SC}} (x - x_A) \vec{e}_x,$$

$$0 \leq x \leq x_D : \vec{E} = +\frac{N_D e}{\epsilon_0 \epsilon_{SC}} (x - x_D) \vec{e}_x.$$

$$\text{En } x = 0, \vec{E} = \frac{N_A e}{\epsilon_0 \epsilon_{SC}} x_A \vec{e}_x = \frac{-N_D e}{\epsilon_0 \epsilon_{SC}} x_D \vec{e}_x : \text{conservation}$$

de la charge et continuité de \vec{E} en $x = 0$ sont liés.

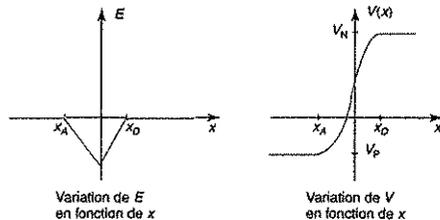
$$\text{b. } x_A \leq x \leq 0 : \frac{dV}{dx} = -E(x) : V = V_P + \frac{N_A e (x - x_A)^2}{\epsilon_0 \epsilon_{SC} 2},$$

en appelant V_P le potentiel uniforme du semi-conducteur dopé P.

$$0 \leq x \leq x_D : \frac{dV}{dx} = -E(x) : V = V_N - \frac{N_D e (x - x_D)^2}{\epsilon_0 \epsilon_{SC} 2}, \text{ en}$$

appelant V_N le potentiel uniforme du semi-conducteur dopé N.

Les variations de E et V en fonction de x sont représentées sur les figures ci-dessous.



En $x = 0$, il y a continuité de \vec{E} et de V . On en déduit : $-N_A x_A = N_D x_D$, soit :

$$\frac{-x_A}{N_A} = \frac{x_D}{N_D} = \frac{x_D - x_A}{N_A + N_D} = w \frac{N_A N_D}{N_A + N_D},$$

$$\text{et } V_P + \frac{N_A e x_A^2}{\epsilon_0 \epsilon_{sc} 2} = V_N - \frac{N_D e x_D^2}{\epsilon_0 \epsilon_{sc} 2},$$

$$\text{soit : } V_0 = \frac{N_D e x_D^2}{\epsilon_0 \epsilon_{sc} 2} + \frac{N_A e x_A^2}{\epsilon_0 \epsilon_{sc} 2}.$$

c. En fonction de w : $V_0 = \frac{ew^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_{sc}} \left(\frac{N_A N_D}{N_A + N_D} \right)$,

et $w = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_{sc}}{e} \left(\frac{N_A + N_D}{N_A N_D} \right) V_0}$

A.N. : $w = 9,4 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,94 \text{ }\mu\text{m}$.

2. a. La densité volumique de charge est uniforme et vaut $-N_A e$, le volume est $-Sx_A$, la quantité de charge négative stockée dans la région Ox_A de la zone de jonction, égale et opposée à celle positive stockée dans la région Ox_D ,

s'écrit : $Q_A = N_A x_A S e = -\frac{N_A N_D e}{N_A + N_D} S w = -Q_D$.

En remplaçant w par son expression en fonction du potentiel :

$$Q_D = -Q_A = S \sqrt{2\varepsilon_0\varepsilon_{sc} \left(\frac{N_A N_D}{N_A + N_D} \right) e (V + V_0)}.$$

b. A.N. : $Q_D = 3,65 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

c. $\frac{\delta Q_D}{Q_D} = \frac{1}{2} \frac{\delta V}{V + V_0}$, soit :

$$\delta Q_D = \frac{1}{2} S \sqrt{2\varepsilon_0\varepsilon_{sc} \left(\frac{N_A N_D}{N_A + N_D} \right) \frac{e}{(V + V_0)}} \delta V.$$

La capacité de la jonction associée à ces petites variations de tension et de charge vaut donc :

$$\gamma = \frac{1}{2} S \sqrt{2\varepsilon_0\varepsilon_{sc} \left(\frac{N_A N_D}{N_A + N_D} \right) \frac{e}{(V + V_0)}}.$$

A.N. : $\gamma = 4,34 \cdot 10^{-11} \text{ F}$.

Magnétostatique

1 Équations locales de la magnétostatique

1.1. Les sources du champ magnétique

1.1.1. Charges en mouvement

Les charges peuvent avoir un mouvement d'ensemble par rapport à un référentiel galiléen. À l'échelle mésoscopique, en moyenne sur un volume $d\tau$ de centre P , chaque type i de charge mobile, de densité volumique moyenne $\rho_i(P)$ à une vitesse moyenne $\vec{v}_i(P)$.

Il lui correspond une densité volumique de courant $\vec{j}_i(P) = \rho_i \vec{v}_i$.

La densité volumique totale s'écrit $\vec{j}(P) = \sum_i \vec{j}_i(P)$.

En régime permanent, ces grandeurs sont indépendantes du temps. Ce sont ces distributions de courant qui sont les sources du champ magnétostatique.

1.1.2. Équation de conservation de la charge

Le flux $\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ de \vec{j} à travers la surface S représente le débit algébrique de charge à travers cette surface, positif si les charges positives traversent la surface de sa face Sud vers sa face Nord.

Soit un volume V limité par une surface fermée Σ , contenant une charge $q(t)$.

$\iint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$ représente la charge algébrique sortie du volume V entre les instants t et $t + dt$.

La conservation de la charge s'écrit donc :

$$\frac{dq}{dt} + \iint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

$q(t) = \iiint_V \rho(P, t) d\tau_P$, donc, V étant fixe : $\frac{dq}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(P, t) d\tau_P$.

Remarque

\vec{j} peut être non nul, alors que la densité volumique ρ est nulle : la densité des charges mobiles peut être compensée par la répartition des charges fixes. C'est presque toujours le cas dans les conducteurs.

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky : $\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) = 0$, quel que soit le volume V choisi.

➤ L'équation locale de conservation de la charge s'écrit : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$.

En régime permanent, cela se ramène à $\operatorname{div} \vec{j} = 0$. \vec{j} est à flux conservatif.

1.1.3. Intensité du courant

Donc, en régime permanent, les lignes de courant sont fermées sur elles-mêmes, et les tubes de courant sont des boucles de courant. Le flux de \vec{j} à travers une section quelconque de ces boucles est indépendant de la section : c'est l'intensité I de la boucle de courant.

Les charges ne pouvant pas sortir d'un conducteur aux interfaces conducteur-isolant, \vec{j} est tangent à ces surfaces.

Un tronçon de conducteur forme une portion de tube de champ, et on peut définir l'intensité I du courant qui le traverse :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \text{ où } S \text{ est une section quelconque du conducteur.}$$

1.1.4. Les sources du champ magnétostatique

• Distribution volumique

C'est la distribution volumique de courant $\vec{j} dt$ indépendante du temps qui est la source élémentaire du champ magnétostatique.

• Nappes de courant

Si la répartition est limitée au voisinage d'une surface $d\vec{S} = dS \vec{e}_x$ sur une épaisseur e , \vec{j} est dans le plan yOz de cette surface, soit par exemple $\vec{j} = j \vec{e}_y$, et on la modélise par une distribution surfacique en faisant tendre \vec{j} vers l'infini et l'épaisseur e vers 0 en gardant constant $\vec{i}_s = i_s \vec{e}_y = \int_0^e \vec{j} dx$. La source élémentaire de courant s'écrit $\vec{i}_s dS = i_s \vec{e}_y dy dz$.

L'élément d'intensité correspondant à travers l'élément de largeur du plan s'écrit : $dI = i_s dz = \vec{i}_s \cdot d\vec{\ell} \vec{n}$ où \vec{n} est normal à l'élément de largeur $d\vec{\ell}$ (figure 1).

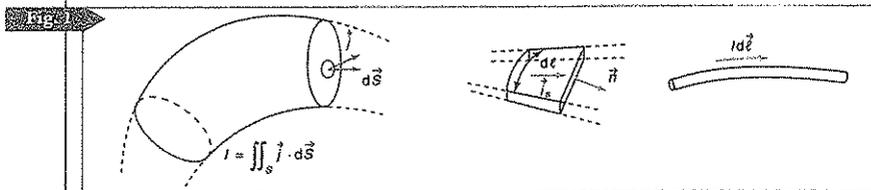
• Circuits filiformes

Si la répartition est localisée au voisinage d'une courbe $d\vec{\ell} = d\ell \vec{e}_y$, cas du circuit filiforme, on la modélise en faisant tendre la densité surfacique $\vec{i}_s = i_s \vec{e}_y$ vers l'infini sur une largeur e' suivant z tendant vers 0 en gardant constant $I = \int_0^{e'} i_s dz$.

La source élémentaire de courant pour un circuit filiforme s'écrit $I d\vec{\ell}$, où I est l'intensité du courant dans le fil, et $d\vec{\ell}$ l'élément de longueur du fil, puisque, dans ce cas, le mouvement d'ensemble des charges se fait suivant la longueur du fil (figure 1).

Remarques

1. La modélisation par une charge ponctuelle en mouvement ne convient pas, car la position de la charge n'est alors pas indépendante du temps.
2. Toute distribution de courants est décomposable en boucles de courants. On pourra donc indifféremment raisonner sur une distribution volumique ou sur un ensemble de circuits filiformes.



1.2. Les équations locales de la magnétostatique

La présence de charges en mouvement modifie les propriétés d'un milieu. Une charge-test placée en M et se déplaçant à la vitesse \vec{v} est soumise à la force de Lorentz :

$\vec{F} = q(\vec{E}(M) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M))$, où $\vec{B}(M)$ est le champ magnétique créé par la distribution de courants permanents.

$\vec{B}(M)$ est lié à la répartition de courants par les lois de la magnétostatique, lois pouvant s'exprimer indifféremment sous les formes suivantes.

1.2.1. Loi de Biot et Savart

- Répartition volumique : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(P) d\tau_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$.
- Nappe de courant : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \vec{i}_s(P) dS_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$.
- Circuit filiforme : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \text{Id} \vec{e}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$.

En Système International, par définition de l'ampère, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, B s'exprime en teslas. On utilise parfois le gauss : $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$, de l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre.

1.2.2. Équations locales

$\text{div} \vec{B} = 0$ et $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (équation de Maxwell-Ampère), avec \vec{B} tendant vers $\vec{0}$ au moins en $\frac{1}{r^2}$ en l'absence de courants à l'infini.

Ce qui équivaut à :

le champ \vec{B} est un champ de rotationnel. Il est à flux conservatif et il existe un potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ tel que $\vec{B}(M) = \text{rot} \vec{A}(M)$.

\vec{B} vérifie le théorème d'Ampère : $\oint_C \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$.

1.2.3. Calcul du champ à partir du potentiel vecteur

Déterminer \vec{B} revient à déterminer \vec{A} .

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}.$$

\vec{A} est défini à un gradient près, seule la valeur de son rotationnel ayant une signification physique. On peut donc choisir arbitrairement la valeur de sa divergence pour le déterminer de manière unique, en rajoutant les conditions habituelles à l'infini.

Si l'on choisit de prendre $\text{div} \vec{A} = 0$, on retrouve pour \vec{A} une équation de Poisson $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ dont la solution est :

• pour une densité volumique :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_P \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau_P$$

° pour une nappe de courant :
$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{j}_s(P)}{PM} dS_P$$

° pour un circuit filiforme :
$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{\ell}_P}{PM}$$

$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ redonne la loi de Biot et Savart.

1.2.4. Calcul du champ à partir du théorème d'Ampère

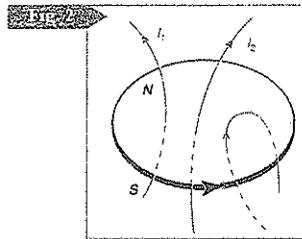
$$\oint_C \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

On reconnaît l'expression de l'intensité I du courant à travers la surface S s'appuyant sur le circuit C . $\text{div} \vec{j} = 0$, donc I est indépendante de la surface S s'appuyant sur C . On parle alors de l'intensité I du courant enlacé par le circuit C .

Ce courant est algébrique, et son signe dépend de l'orientation choisie sur la courbe C

$$\oint_C \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \text{ (figure 2).}$$

Lorsque la répartition des sources offre des propriétés de symétrie suffisantes, la connaissance de la circulation de \vec{B} sur un contour fermé bien choisi permet de le déterminer. \vec{B} a les propriétés d'invariance par translation et par rotation des sources, et est un vecteur axial, donc orthogonal aux plans de symétrie des sources, et dans leurs plans d'antisymétrie.



1.2.5. Discontinuité de \vec{B} à la traversée d'une répartition surfacique de courant

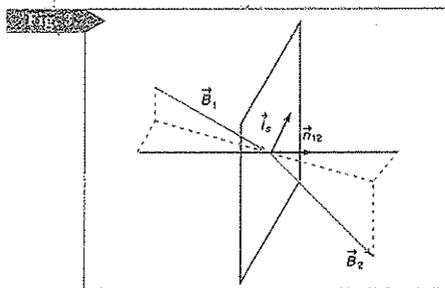
S'il y a distribution surfacique, cela implique que la densité volumique de courant \vec{j} , source du champ, est infinie à la surface.

\vec{B} présente donc une discontinuité à la traversée de cette surface :

$\text{div} \vec{B} = 0$ entraîne la continuité de la composante normale à la surface,

$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ entraîne une discontinuité de la composante tangente à la surface et orthogonale à \vec{j} .

$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$, où \vec{n}_{12} est la normale à la surface parcourue par la densité surfacique \vec{j}_s , orientée du milieu 1 vers le milieu 2 (figure 3).



2 Action du champ magnétique sur un conducteur

2.1. Effet Hall

Pour un conducteur ohmique, la loi d'Ohm locale s'écrit : $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \gamma\left(\vec{E} + \frac{\vec{j}}{nq} \wedge \vec{B}\right)$,

où γ est la conductivité ohmique, n la densité volumique des porteurs de charge mobiles, et q leur charge ($\rho = nq$). \vec{j} et \vec{E} ne sont alors plus parallèles entre eux (voir exercice 1 de « Savoir résoudre les exercices »).

Pour un bon conducteur ohmique, où γ est de l'ordre de $10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et n de l'ordre de $10^{29} \text{ moles} \cdot \text{m}^{-3}$, le deuxième terme est de l'ordre du millième du premier.

L'expression $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ reste alors valable avec une bonne approximation.

En régime permanent, $\text{div}\vec{j} = 0$. Donc $\text{div}\vec{E} = 0$, et comme $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\rho = 0$ et on considérera que :

► Pour un bon conducteur ohmique, le milieu est neutre.

Ce n'est plus le cas pour un semi-conducteur, dans lequel la densité volumique de charges est beaucoup plus faible. La direction de \vec{j} ou \vec{E} est alors imposée par la forme géométrique du conducteur.

Dans une géométrie longitudinale, où le conducteur est parcouru par un courant I permanent dans la direction imposée Ox et soumis à un champ magnétique \vec{B} , les charges mobiles se déplacent sous l'action de la force de Lorentz pour aboutir à un état d'équilibre où elles créent le champ électrostatique de Hall perpendiculaire à \vec{j} : $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -\frac{\vec{j}}{nq} \wedge \vec{B}$.

2.2. Force de Laplace

Si l'on considère un élément de volume $d\tau$ de conducteur, les charges intérieures, fixes et mobiles, sont soumises à la force de Lorentz. La résultante des forces électrostatiques est nulle à cause de la neutralité électrique du conducteur, et la résultante des forces électromagnétiques s'écrit donc :

$$\vec{dF} = \rho_{\text{mobile}} \vec{v} d\tau \wedge \vec{B} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}.$$

Les forces transverses au courant sont transmises au réseau fixe du conducteur qui est aussi soumis à la force de Laplace.

La force de Laplace s'applique au solide (ou au fluide) conducteur.

Pour un circuit filiforme : $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

Remarque : le champ considéré est le champ \vec{B} dû à toutes les sources extérieures à l'élément de conducteur considéré, y compris celles venant du reste du conducteur (champ propre). Mais si l'on s'intéresse à la résultante des forces de Laplace sur l'ensemble du conducteur, on n'a plus à tenir compte du champ propre, dont l'action est alors une force intérieure.

Remarque
Si le conducteur est mobile dans le référentiel d'étude, la force de Laplace garde la même expression, les courants de convection des charges positives et des charges négatives se compensant pour un milieu neutre.

3 Moment magnétique d'une distribution de courant

3.1. Moment d'une distribution de courants

Une distribution de courants est décomposable en boucles de courant C_i parcourues par une intensité dI_i .

On définit le moment magnétique de cette boucle de courant par $d\vec{M}_i = dI_i \vec{S}_i$, indépendamment du choix de la surface \vec{S}_i s'appuyant sur la boucle et orientée selon le sens du courant qui la parcourt.

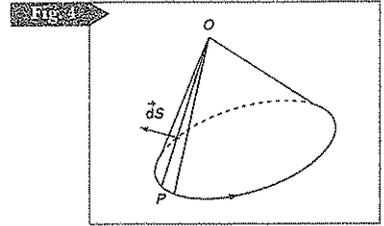
Le moment magnétique de la distribution totale est la somme des moments des boucles de courant ; M s'exprime en $A \cdot m^2$.

En choisissant une origine O quelconque et en prenant pour surface celle du cône de sommet O et s'appuyant sur les boucles de courant (figure 4) :

$$\begin{aligned} d\vec{M}_i &= dI_i \vec{S}_i = \frac{1}{2} \oint_{C_i} \vec{OP} \wedge dI_i d\vec{\ell}_P \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{dV_i} \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) d\tau_P, \end{aligned}$$

où dV_i est le volume de la boucle élémentaire

de courant et $\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint_{\text{distribution}} \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) d\tau_P$.



3.2. Champ magnétique créé par un moment magnétique

Comme pour le champ électrique créé par une distribution de charges d'étendue a , on cherche le champ créé par une distribution de courants en un point éloigné de la distribution, $r \gg a$, en faisant un développement limité en a/r .

Comme pour le développement multipolaire électrique, il faut résoudre $\text{div} \vec{B} = 0$, et $\text{rot} \vec{B} = \vec{0}$ partout sauf en O centre de la distribution.

3.2.1. Potentiel vecteur

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_P \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau_P.$$

En un point M loin de la distribution centrée autour d'un point O , on effectue un développement limité en $\frac{OP}{OM} = \frac{OP}{r}$.

$$\text{À l'ordre } 0, \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_P \vec{j}(P) d\tau_P = \vec{0}.$$

Pour le champ électrique, l'ordre 0 correspondait au champ à symétrie sphérique créé par la charge totale Q de la distribution, placée en O . L'équivalent n'existe pas pour le champ magnétique, ce qui est cohérent avec le fait qu'il n'existe pas de champ axial à symétrie sphérique.

À l'ordre 1,

Le potentiel vecteur créé en M par un moment magnétique \vec{M} vaut :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{OM}}{OM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

En coordonnées polaires d'axe Oz parallèle au moment :

$$\vec{M} = M \vec{e}_z \text{ et } \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^2}$$

3.2.2. Champ magnétique créé par un moment magnétique

$$\vec{B}(M) = \text{rot} \vec{A}(M) = -\text{grad} \frac{\mu_0 \vec{M} \cdot \vec{u}}{4\pi r^2} \text{ (voir la justification de ce résultat en annexe).}$$

On retrouve l'équivalent du champ dipolaire électrique, en coordonnées polaires d'axe Oz parallèle au moment :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta).$$

Le champ magnétique créé par un moment magnétique est formellement identique au champ électrique d'un dipôle électrique, en remplaçant $\frac{1}{\epsilon_0}$ par μ_0 , et le moment dipolaire électrique \vec{p} par le moment magnétique \vec{M} .

3.3. Action d'un champ magnétique extérieur sur une distribution de courants

3.3.1. Action d'un champ uniforme sur un conducteur

En décomposant le conducteur en boucles de courant, la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur chaque boucle s'écrit :

$$d\vec{F}_i = dI_i \left(\oint_C d\vec{\ell}_i \right) \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

Remarque

Ces résultats sont formellement identiques à ceux obtenus pour l'action d'un champ électrostatique uniforme sur une distribution de charges dipolaire.

- La résultante des forces de Laplace s'exerçant sur un conducteur soumis à un champ magnétique uniforme est nulle.
- L'action d'un champ magnétique uniforme sur une distribution de courant est un couple de moment : $\vec{\Gamma} = \iiint_P \vec{OP} \wedge (\vec{j}(P) d\tau_P \wedge \vec{B}) = \vec{M} \wedge \vec{B}$ (voir exercice 5 de « Savoir appliquer le cours »).

3.3.2. Action d'un champ quelconque

L'énergie potentielle d'interaction avec le champ a pour expression : $\varepsilon = -\vec{M} \cdot \vec{B}$.

Si le champ n'est pas uniforme, la résultante n'est pas nulle. Son expression est la même que celle obtenue pour le dipôle électrostatique :

$$\vec{F}(M) = \text{grad}(\vec{M} \cdot \vec{B}(M)) \text{ à } \vec{M} \text{ constant.}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\bullet F_x = M_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + M_z \frac{\partial B_z}{\partial x},$$

$$\bullet F_y = M_x \frac{\partial B_x}{\partial y} + M_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + M_z \frac{\partial B_z}{\partial y},$$

$$\bullet F_z = M_x \frac{\partial B_x}{\partial z} + M_y \frac{\partial B_y}{\partial z} + M_z \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Si \vec{B} varie peu sur le volume de la distribution, l'expression $\vec{M} \wedge \vec{B}$ représente alors le moment des forces de Laplace en O , centre de la distribution.

3.4. Exemples de moments magnétiques

- Un barreau aimanté d'axe Oz est équivalent vis-à-vis de l'extérieur à un moment suivant Oz proportionnel à son volume, orienté du pôle Sud vers le pôle Nord.
- Pour une spire circulaire de rayon a , d'axe de révolution Oz , orientée dans le sens de rotation positif autour de Oz , parcourue par le courant algébrique I : $\vec{M} = \pi a^2 I \vec{e}_z$.
- Du point de vue magnétique, la Terre peut être modélisée par un moment \vec{M} placé en son centre, orienté suivant l'axe géomagnétique qui fait un angle variable au cours du temps avec l'axe de rotation.
- Si l'on considère un électron en mouvement autour d'un noyau positif de charge Ze ; son moment magnétique s'écrit $\frac{1}{2} \vec{OP} \wedge -e\vec{v} = -\frac{e}{2m} \vec{L}_O$, où \vec{L}_O est le moment cinétique orbital de l'électron. $\gamma_e = -\frac{e}{2m}$ est le rapport gyromagnétique. La projection sur un axe du moment cinétique est quantifiée, il en est donc de même de la projection du moment magnétique orbital : le quantum de moment magnétique est le magnéton de Bohr $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$.
- Un électron isolé est caractérisé par son moment cinétique intrinsèque (spin) dont la projection sur un axe est $\pm \frac{\hbar}{2}$. Son moment magnétique en projection sur cet axe vaut alors $\mp \mu_B$.

Avant la colle

Tester ses connaissances

> Corrigés p. 85

1 Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

On peut toujours modéliser une distribution quelconque de courants par une spire circulaire ayant même moment magnétique :

- a. pour calculer son action sur un circuit quelconque.
- b. pour calculer son action sur un circuit loin de la distribution.
- c. pour calculer l'action qu'elle subit de la part d'un champ magnétique uniforme.
- d. pour calculer l'action qu'elle subit de la part d'une autre distribution de courants.
- e. pour calculer l'action qu'elle subit de la part d'une autre distribution de courants éloignée.

2 Parmi ces affirmations, lesquelles sont vraies ?

a. Deux distributions de courants symétriques par rapport à un plan ont leurs moments magnétiques \vec{M} symétriques par rapport à ce plan.

Vrai. Faux.

b. Le potentiel vecteur vérifiant $\text{div} \vec{A} = 0$ et tendant vers 0 à l'infini au moins en $\frac{1}{r^2}$ est

$$\text{unique, il vaut } \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_P \frac{\vec{j} d\tau_P}{MP}$$

et possède les mêmes symétries que la distribution de courants qui le crée.

Vrai. Faux.

c. $\vec{A}(M)$ est continu à la traversée d'une répartition surfacique de courants.

Vrai. Faux.

d. La force exercée par un champ magnétique sur une charge en mouvement ne travaille jamais.

Vrai. Faux.

e. Le travail de la force de Laplace est toujours nul.

Vrai. Faux.

3 a. Calculer le champ magnétique créé par une spire circulaire de rayon a en un point de son axe Oz

Calculer le champ créé par le moment magnétique $\vec{M} = M\vec{e}_z$ en un point de l'axe Oz

Retrouver l'expression du moment magnétique de la spire circulaire.

b. Calculer le moment $\vec{\Gamma}$ des forces de Laplace exercées par un champ magnétique uniforme quelconque sur une spire rectangulaire de côtés a et b , de normale \vec{e}_z , parcourue par le courant d'intensité I ; comparer à l'expression $\vec{M} \wedge \vec{B}$, et retrouver l'expression du moment magnétique de la spire rectangulaire.

4 On considère le champ uniforme $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$.

Vérifier que les potentiels vecteurs :

$$\vec{A}_1(M) = \frac{1}{2}\vec{B}_0 \wedge \vec{r}, \quad \vec{A}_2(M) = B_0 x \vec{e}_y, \quad \text{et}$$

$\vec{A}_2(M) = -B_0 y \vec{e}_x$, conviennent et sont à divergence nulle.

Pourquoi cela ne contrevient-il pas au théorème d'unicité ? Que faudrait-il rajouter pour choisir entre ces expressions ?

5 Si l'on place une aiguille aimantée de moment \vec{M} mobile autour d'un axe vertical (boussole) dans un champ magnétique, comment s'oriente-t-elle ? Quels sont la direction et le sens du moment magnétique de la Terre ? En quels points de la Terre le champ magnétique est-il le plus intense ?

6 Redémontrer les équations de continuité de \vec{B} à la traversée d'une nappe de courant.

1 On considère un conducteur ohmique de conductivité γ . À partir de l'équation locale de conservation de la charge, trouver l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge ρ dans le conducteur. En déduire le temps au bout duquel une perturbation $\delta\rho$ de la valeur de ρ à l'équilibre est réduite de moitié, et le calculer pour une conductivité de $\gamma = 6 \cdot 10^7 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$.

2 On considère un cylindre infiniment long, de rayon a , parcouru par un courant surfacique de norme constante i_s faisant l'angle α avec les génératrices.

1. Calculer le champ magnétique créé par cette répartition en tout point.

2. En déduire le potentiel vecteur de divergence nulle dont il dérive :

- a. à l'intérieur du cylindre,
- b. à l'extérieur.

3. Vérifier les relations de continuité de \vec{A} et \vec{B} .

3 1. Une sphère de centre O et de rayon R est remplie d'un matériau de densité volumique de moment magnétique uniforme $\vec{J} = J_0 \vec{e}_z$. Montrer que le potentiel vecteur du champ créé par cette distribution est de la forme $\vec{J} \wedge \vec{V}(M)$, où $\vec{V}(M)$ est une intégrale dont on donnera l'expression.

Pour calculer cette intégrale, reconnaître l'expression d'un champ électrostatique que l'on précisera, et donner sa valeur à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

2. En déduire le champ magnétique créé par la sphère à l'extérieur et à l'intérieur.

3. Si l'on place une sphère supraconductrice dans un champ magnétique uniforme

$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$, elle est le siège de courants qui annulent son champ à l'intérieur. Montrer que ces courants sont surfaciques.

En utilisant le calcul précédent, trouver le champ magnétique vérifiant les conditions aux limites, et en déduire la densité surfacique de courants sur la sphère supraconductrice.

4 1. Calculer le champ magnétique en M d'un moment \vec{M} uniquement en fonction des vecteurs \vec{M} , et $\vec{r} = \vec{OM}$.

2. Calculer l'énergie potentielle d'interaction entre deux aimants de moments \vec{M}_1 en O_1 et \vec{M}_2 en O_2 .



3. Sans calculs, trouver pour quelle(s) position(s) relatives des deux moments cette énergie est minimum, la distance d entre les aimants étant imposée.

4. Calculer l'énergie dans cette position pour deux magnétons de Bohr distants de $3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, et comparer à l'énergie d'agitation thermique kT . L'interaction magnétique peut-elle expliquer l'alignement des spins des électrons célibataires dans les ferromagnétiques à température ambiante ?

A.N. : $k = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$,

$h = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$,

charge et masse de l'électron :

$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

5 On rappelle la formule du gradient :

$$\oint U d\vec{\ell} = - \iint_S \text{grad } U \wedge d\vec{S}.$$

1. Faire le développement au premier ordre en $\frac{1}{OM}$ du potentiel vecteur créé en un point M par une boucle de courant autour de O dont l'élément en P est $I d\vec{\ell}_P$.

2. Transformer l'expression avec la formule du gradient, et retrouver le potentiel vecteur du moment magnétique de cette boucle.

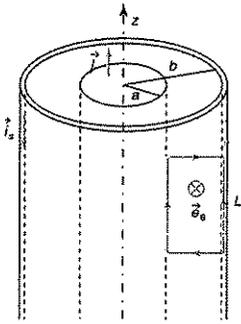
3. Écrire l'expression du moment en O des forces de Laplace exercées par un champ magnétique uniforme \vec{B}_0 sur la boucle de courant.

4. Transformer cette expression avec la formule du gradient pour retrouver $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0$.

§ On considère deux cylindres coaxiaux, d'axe Oz , de rayons a et b ($a < b$). Le cylindre intérieur est plein et parcouru par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j}_0 = j_0 \vec{e}_z$ et d'intensité I réparti uniformément sur son volume.

Le courant revient par le cylindre extérieur sous la forme d'un courant surfacique $\vec{i}_s = -i_s \vec{e}_z$.

On néglige les effets de bord (voir figure ci-dessous).



1. Quelles relations lient I , j_0 et i_s ?

2. Calculer en fonction de I le champ magnétique créé par la distribution de courant en tout point de l'espace.

3. Calculer le flux Φ de ce champ à travers un circuit rectangulaire de hauteur L dans un plan contenant Oz , entre une génératrice du cylindre intérieur et une génératrice du cylindre extérieur.

En déduire $\Lambda = \frac{\Phi}{LI}$, valeur approchée de l'inductance propre par unité de longueur du câble.

1 – Effet Hall (d'après Centrale)

- 1 On considère une plaque d'un matériau conducteur d'épaisseur faible et constante soumise à un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire à sa surface. On négligera le champ magnétique créé par les courants volumiques de la plaque.

La loi d'Ohm est alors remplacée par la relation $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} + R_H \vec{B} \wedge \vec{j}$, où \vec{j} est la densité volumique de courant, γ la conductivité du matériau et R_H la constante de Hall.

- a. Justifier cette relation et donner l'expression de R_H en fonction de la densité volumique n des porteurs de charge et de leur charge q .

Calculer l'ordre de grandeur de la constante de Hall R_H du cuivre connaissant :

masse molaire du cuivre : $A = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$,

masse volumique du cuivre : $\mu = 8,96 \cdot 10^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$,

nombre d'Avogadro : $N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$,

charge de l'électron : $-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

On supposera que chaque atome de cuivre met en jeu un électron libre.

- b. Montrer que les lignes de courant font un angle constant θ_H avec les lignes du champ. Calculer θ_H en fonction de R_H , γ et B .

- c. Application numérique : calculer θ_H dans un champ B de 1 T pour le cuivre de conductivité $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et pour un semi-conducteur comme l'arséniure d'indium pour lequel R_H est 10^{10} fois plus grande, et la conductivité de l'ordre de $\gamma \approx 1 \cdot \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$.

- 2 La répartition des lignes de courant est supposée plane et uniforme sur l'épaisseur de la plaque et le régime est permanent. On rappelle que \vec{B} est uniforme et perpendiculaire à la plaque.

- a. À partir des lois de l'électromagnétisme en régime permanent, donner les valeurs de $\text{div} \vec{j}$ et de $\text{rot} \vec{E}$.

- b. Calculer $\text{div}(\vec{B} \wedge \vec{j})$ en fonction de \vec{B} et $\text{rot} \vec{j}$, et $\text{rot}(\vec{B} \wedge \vec{j})$ en fonction de \vec{B} et $\text{div} \vec{j}$. En déduire les valeurs de $\text{div} \vec{E}$ et de $\text{rot} \vec{j}$.

- c. En déduire l'équation satisfaite par le potentiel V et calculer $\Delta \vec{j}$.

- 3 Montrer d'après ce qui précède que si l'on impose les conditions aux limites pour le potentiel électrique, les lignes de champ ne sont pas modifiées en présence de \vec{B} . En revanche les lignes de courant sont modifiées. Si par contre, les conditions aux limites concernent les lignes de courant, elles sont inchangées en présence de \vec{B} et ce sont les lignes de champ électrique qui sont modifiées.

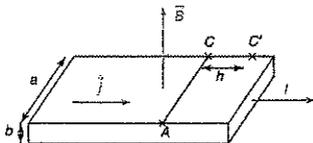
4 Applications

- a. Le matériau a la forme d'une couronne d'épaisseur très faible b . Cette couronne est comprise entre les cercles de rayon R_1 et R_2 . \vec{B} est parallèle à l'axe. On impose les potentiels V_1 et V_2 sur les cercles de rayons R_1 et R_2 .

Donner la nature géométrique des lignes de courant.

Calculer la résistance de cette couronne en présence de \vec{B} et l'exprimer en fonction de R_0 , résistance en l'absence de \vec{B} . Évaluer le facteur correctif pour le cuivre, puis pour l'arséniure d'indium pour un champ de 1 T.

b. Le matériau a la forme d'un ruban plat conducteur long et de très faible épaisseur h , parcouru par des lignes de courant parallèles aux bords en l'absence de champ magnétique.



Montrer que le vecteur \vec{j} reste tangent aux bords du ruban et que les conditions aux limites sont donc identiques pour \vec{j} en présence et en l'absence de \vec{B} .

En déduire la forme des lignes de champ. Trouver l'expression de la différence de potentiel qui apparaît entre les points A et C d'un segment perpendiculaire à l'axe du ruban. La calculer pour un courant de 1 A, un champ B de 1 T et une épaisseur h de 0,1 mm, pour le cuivre et pour l'arséniure d'indium.

Dans la pratique, on n'arrive pas à prendre deux points sur une perpendiculaire au ruban. On mesure, en fait, la tension entre deux points A et C'. Montrer qu'il existe une tension de repos $V_C - V_{C'}$ que l'on calculera en fonction de I , γ , h , a et b et qui est indépendante de B . Cette tension doit être compensée lors des mesures de champ magnétique.

- 5 Pour certains matériaux, à très basse température et avec des champs magnétiques très intenses, on a observé un « effet Hall quantique », la résistance de Hall $\frac{V_A - V_C}{I}$ présentant des paliers de valeur $\frac{f}{k}$, avec k entier et f une fonction monôme ne faisant intervenir que des constantes fondamentales. Trouver la forme de f et en donner un ordre de grandeur ($h = 6 \cdot 62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$).

résolution méthodique

1

Justifier n'est pas démontrer, mais nécessite de donner les arguments pertinents qui permettraient de faire la démonstration. Il ne faut ni perdre de temps à réciter le cours, ni paraphraser l'énoncé. La formule donnée au départ dans l'énoncé permet d'éviter toute ambiguïté lors de la résolution du problème.

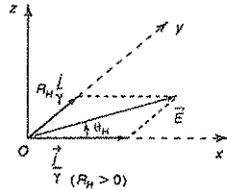
a. La loi d'Ohm s'applique à des matériaux pour lesquels il y a proportionnalité entre la vitesse de déplacement des porteurs de charge et la force qui s'exerce sur eux. En présence d'un champ magnétique, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ devient donc $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, avec

$$\vec{j} = nq\vec{v}, \text{ soit } \vec{j} = \gamma\left(\vec{E} + \frac{\vec{j}}{nq} \wedge \vec{B}\right), \text{ ou } \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \frac{\vec{j}}{nq} \wedge \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\gamma} + \frac{1}{nq} \vec{B} \wedge \vec{j} \text{ et donc } R_H = \frac{1}{nq}$$

A.N. : $n = \frac{N\mu}{A} = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$ et $R_H = -7,4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$.

b. \vec{E} a une composante $\frac{\vec{l}}{\gamma}$ parallèle à \vec{j} et une composante qui lui est perpendiculaire $R_H \vec{B} \wedge \vec{j}$.

Les deux vecteurs font donc entre eux un angle θ_H de cosinus positif, et de tangente : $\tan \theta = \gamma R_H B$ correspondant à une rotation de \vec{j} vers \vec{E} d'un angle de module inférieur à $\frac{\pi}{2}$ positive autour de \vec{B} si R_H est positif, et négative sinon.



c. A.N. : * pour le cuivre $\theta_H = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 15'$ par tesla, ce qui est négligeable ;
* pour l'arséniure d'indium : $\theta_H \approx 37^\circ$ par tesla.

L'effet Hall est négligeable dans les conducteurs, mais il faut en tenir compte dans les semi-conducteurs.

2

L'énoncé donne un modèle limitatif dans le cadre duquel les calculs peuvent s'effectuer. Il faut donc être très soigneux et bien interpréter et utiliser les indications données. Ici, les termes importants sont : « \vec{B} uniforme », « perpendiculaire à la plaque », on néglige le champ créé par les courants de la plaque, et la répartition de courant est supposée plane et uniforme sur l'épaisseur de la plaque, c'est-à-dire à deux dimensions seulement.

a. On note Oz la normale à la plaque. Donc $\vec{B} = B\vec{e}_z$, et les courants volumiques sont de la forme $\vec{j} = j_x(x, y)\vec{e}_x + j_y(x, y)\vec{e}_y$.

Le régime est permanent, l'équation de conservation de la charge se ramène donc à

$\text{div} \vec{j} = 0$.

$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ d'après les équations locales du champ électrostatique.

b. $\text{div}(\vec{B} \wedge \vec{j}) = \text{div}(Bj_x \vec{e}_y - Bj_y \vec{e}_x) = B\left(\frac{\partial j_x}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial x}\right) = -\vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{j}$

$\vec{\text{rot}}(\vec{B} \wedge \vec{j}) = \vec{\text{rot}}(Bj_x \vec{e}_y - Bj_y \vec{e}_x) = B\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y}\right)\vec{e}_z = \vec{B} \text{div} \vec{j}$

Donc, d'après la relation $\vec{E} = \frac{\vec{l}}{\gamma} + R_H \vec{B} \wedge \vec{j}$,

$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} = \frac{1}{\gamma} \vec{\text{rot}} \vec{j} + R_H \vec{B} \text{div} \vec{j}$, donc $\vec{\text{rot}} \vec{j} = \vec{0}$ et

$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \text{div} \vec{j} + R_H \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{j}$, donc : $\text{div} \vec{E} = 0$

c. On est ramené au problème connu : rechercher des champs de vecteurs de divergence et de rotationnel nul : $\Delta V = 0$, et $\text{rot}(\text{rot} \vec{j}) = \text{grad}(\text{div} \vec{j}) - \Delta \vec{j}$, donc $\Delta \vec{j} = \vec{0}$.

3 La solution est unique si l'on connaît les conditions aux limites. Si celles que satisfait V ne dépendent pas de la présence du champ magnétique, V et donc \vec{E} ne seront pas modifiés par la présence du champ magnétique. Si par contre ce sont celles pour \vec{j} qui ne dépendent pas de la présence du champ magnétique, c'est la distribution de courant \vec{j} qui ne sera pas modifiée par la présence du champ \vec{B} .

4 a. Les équipotentielles sont des cercles de rayon r , les lignes de champ sont donc radiales. Les lignes de courant font l'angle constant θ_H avec les lignes de champ, et se décomposent donc en une composante radiale j_r , et une composante orthoradiale j_θ . L'intensité du courant traversant la couronne s'écrit $I = 2\pi r b j_r$.

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} + R_H \vec{B} \wedge \vec{j} = \left(\frac{j_r}{\gamma} - R_H B j_\theta \right) \vec{e}_r + \left(\frac{j_\theta}{\gamma} + R_H B j_r \right) \vec{e}_\theta,$$

la présence de \vec{B} ne modifie pas \vec{E} , donc $E \vec{e}_r$ est inchangé.

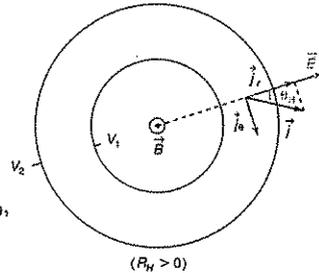
$j_\theta = -\gamma R_H B j_r$, et $E = \frac{j_r}{\gamma} - R_H B j_\theta = \frac{j_r}{\gamma} (1 + (\gamma R_H B)^2)$. L'intensité est donc divisée par le facteur $1 + (\gamma R_H B)^2 = 1 + \tan^2 \theta_H = \frac{1}{\cos^2 \theta_H}$ en présence du champ magnétique :

$$R = R_0 (1 + (\gamma R_H B)^2)$$

Pour le cuivre, le facteur correctif $\frac{R - R_0}{R_0}$ est de $2 \cdot 10^{-5}$ pour un tesla, ce qui est non décelable. Pour l'arséniure d'indium il est de 0,55 pour un tesla, et la mesure de la résistance peut donc servir à mesurer B (phénomène de magnétorésistance).

b. Les lignes de courant sont toujours tangentes à la surface des conducteurs, les porteurs de charge ne pouvant pas sortir du conducteur. Les lignes de courant \vec{j} sont donc inchangées en présence de \vec{B} . Les lignes de champ de \vec{E} sont donc des segments de droite qui font l'angle θ_H constant avec la direction de \vec{j} . La circulation de la composante longitudinale de \vec{E} étant imposée par la différence de potentiel aux bornes de la plaque, \vec{j} est inchangé. Il existe une composante transverse de \vec{E} suivant la largeur, $R_H \vec{B} \wedge \vec{j}$, dont la circulation entre deux points appartenant à une même perpendiculaire sera $R_H B \frac{I}{b} a = R_H B \frac{I}{b}$.

$\frac{R_H}{b} B$ est une résistance que l'on peut appeler résistance de Hall.



A.N. : $V_A - V_C = 7,4 \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$ pour le cuivre, mais $7\,400 \text{ V} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$ pour l'arséniure d'indium.

La mesure de la différence de potentiel est utilisée pour la mesure des champs magnétiques dans les sondes à effet Hall.

Entre C et C' , il existe une différence de potentiel $V_C - V_{C'}$ due à la composante longitudinale de \vec{E} :

$$\frac{j}{\gamma} = \frac{I}{\gamma_{ab}} h.$$

On retrouve l'expression de la chute de tension dans la résistance $\frac{1}{\gamma_{ab}} h$ de la portion CC' .

5

Il s'agit ici de raisonner sur les équations aux dimensions des constantes fondamentales. S'agissant de grandeurs électriques, on peut mettre e en évidence. S'agissant de quantification, la constante de Planck h intervient probablement.

D'après la relation $\varepsilon = h\nu$, h est une énergie que multiplie un temps. $\left[\frac{V}{I}\right] = \left[\frac{qV}{qI}\right] = \frac{[\mathcal{E}][T]}{[q^2]}$.

f sera donc de la forme $\frac{h}{e^2} \approx 26 \text{ k}\Omega$, le quantum de conductance de Hall sera donc de l'ordre de $4 \cdot 10^{-5} \text{ S}$ (siemens). Cette quantification ne peut donc pas apparaître si la conductance est grande devant cette valeur, ou la résistance petite devant $26 \text{ k}\Omega$.

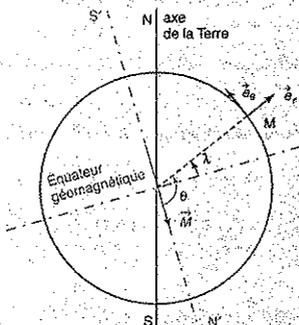
en conclusion

- ° L'effet Hall est toujours négligeable dans un bon conducteur, et n'intervient que dans les semi-conducteurs.
- ° Ce sont les conditions expérimentales qui permettent de déterminer les conditions aux limites. Il est donc important de bien les définir dans le modèle proposé.
- ° L'utilisation des équations aux dimensions permet souvent de déterminer les ordres de grandeur des variables physiques que l'on cherche à déterminer et le type de relation qui peut exister entre ces variables et les paramètres expérimentaux.

2 – Mouvement d'une particule chargée dans le champ magnétique terrestre (d'après TPE)

Partie A – Étude du champ magnétique terrestre

La Terre possède un champ magnétique intrinsèque, appelé champ géomagnétique, provenant du mouvement des particules chargées dans son noyau fluide. En première approximation, ce champ est celui d'un dipôle placé au centre O de la terre, de moment dipolaire tel que $\frac{\mu_0 M}{4\pi} = 8,3 \cdot 10^{15} \cdot \text{T} \cdot \text{m}^3$, présentant une inclinaison $\alpha = 11^\circ$ par rapport à l'axe de rotation de la Terre. Son axe Sud-Nord, inversé par rapport à l'axe géographique Sud-Nord, est appelé axe géomagnétique. Le grand cercle de la surface terrestre de centre O , perpendiculaire à l'axe géomagnétique, est appelé équateur géomagnétique.



On appelle R le rayon de la Terre, supposée sphérique. Un point M à la surface terrestre est repéré par sa latitude géomagnétique λ , égale à l'angle entre le plan de l'équateur géomagnétique et le vecteur \vec{OM} .

- 1 Déterminer à la surface de la Terre l'intensité B du champ magnétique et son inclinaison $I = (\vec{B}, \vec{z}_0)$ par rapport à l'horizontale en fonction de λ .
Donner l'expression numérique de $B(\lambda)$ sachant que $R = 6378 \text{ km}$.
Représenter graphiquement $B(\lambda)$ et $I(\lambda)$. Où l'intensité du champ est-elle maximale ?
Pour Paris, on adopte la valeur $\lambda = 52^\circ$, et les valeurs expérimentales sont $B = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ et $I = -64,5^\circ$. Conclure.
- 2 Donner l'équation différentielle des lignes de champ en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et montrer que la solution est de la forme $r = r_0 \sin^2 \theta$ où r_0 est une constante dont on donnera la signification physique.
Pour une ligne de champ de distance équatoriale r_0 , on définit le paramètre de McIlwain : $L = \frac{r_0}{R}$. Donner l'expression de B sur une ligne de champ en fonction de L et λ . Quelles sont les deux latitudes $\pm \lambda_m$ où la ligne de champ traverse la surface terrestre et les valeurs de B et de l'inclinaison I en ces points ?

Partie B – Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Une particule de masse m et de charge q se déplace à la vitesse \vec{v}_0 dans un repère galiléen.

À l'instant $t = 0$, elle pénètre dans un champ magnétique uniforme et constant \vec{B} . On suppose que la particule n'est soumise qu'à la force de Lorentz.

1 On définit le repère $Oxyz$ tel que Oz soit colinéaire à \vec{B} , que \vec{v}_0 soit orthogonal à Ox et que la particule se trouve sur Ox en x_0 à l'instant $t = 0$. Projeter le principe fondamental de la dynamique sur les trois axes. Montrer que la projection de la trajectoire dans le plan Oxy est un cercle. Donner sa période de rotation τ et son rayon ρ qu'on appellera rayon de giration, en fonction de $\omega = \frac{qB}{m}$, $\alpha_0 = (\vec{B}, \vec{v}_0)$ et v_0 .

Quelle valeur donner à x_0 pour que le centre de ce cercle soit en O ? (On adopte cette valeur pour la suite.)

2 Déterminer la trajectoire de la particule dans l'espace. Montrer que c'est une hélice dont on déterminera le pas p en fonction de ω , θ_0 et v_0 .
On dit que la particule s'enroule autour de la ligne de champ passant par O .

3 Calculer l'énergie cinétique E_c de la particule. Dépend-elle du champ magnétique? Était-ce prévisible?

4 Montrer que le vecteur $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$ peut-être considéré comme potentiel vecteur du champ magnétique.

On appelle invariant adiabatique l'intégrale $S = \oint_{\Gamma} (m\vec{v} + q\vec{A}) \cdot d\vec{\ell}$, où le contour Γ représente la projection de la trajectoire de la particule dans le plan perpendiculaire à \vec{B} .

Montrer que $S = \pi q B \rho^2$.

Partie C – Mouvement dans le champ magnétique terrestre

On admet que pour un champ magnétique non uniforme mais à variation spatiale suffisamment faible pour pouvoir être considéré comme uniforme sur une distance de l'ordre du rayon de giration, la trajectoire est toujours une hélice qui s'enroule le long d'une ligne de champ, celle-ci n'étant plus nécessairement rectiligne, et le rayon de giration devenant un paramètre local, variant avec B .

1 Nous admettons sans démonstration que l'invariant adiabatique $S = \pi q B \rho^2$ est une constante du mouvement. Quelle est la seconde constante du mouvement?

2 Soit v_L la composante de la vitesse parallèle à la ligne de champ et ω la valeur locale de $\frac{qB}{m}$. Écrire l'énergie cinétique E_c de la particule en fonction de v_L , ρ et ω . En déduire l'expression de v_L en fonction de q , m , B , S et E_c .

En déduire que la particule ne peut pas pénétrer dans les régions où le champ magnétique a une intensité supérieure à la limite $B_{\max} = \frac{2\pi m E_c}{qS}$.

- 3 On considère des particules dans le champ magnétique terrestre. On suppose que lorsque ces particules traversent le plan de l'équateur géomagnétique, les composantes v_T et v_L de leur vitesse sont égales et valent v . Décrire qualitativement leur mouvement. On appelle B_{\max} la valeur du champ magnétique au point de plus grande latitude géomagnétique que peut atteindre une particule s'enroulant sur une ligne de champ Γ . Montrer que si l'on appelle B_{\min} la valeur minimum de l'intensité du champ magnétique sur Γ , on a la relation simple $B_{\max} = 2B_{\min}$. En déduire la valeur numérique λ_{\max} de la latitude géomagnétique maximale que peuvent atteindre les particules.

résolution méthodique

Pour appliquer les résultats du cours à des systèmes de coordonnées différents, il faut projeter sur les nouveaux axes. Il est indispensable de faire une figure claire, et préférable d'utiliser des angles entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, pour lesquels le sens de la projection correspond au signe à mettre devant le sinus ou le cosinus. On peut aussi vérifier la validité de l'expression pour les valeurs limites 0 et $\frac{\pi}{2}$. Pour déterminer un angle, il suffit de donner la valeur de sa tangente et le signe de son cosinus.

Partie A

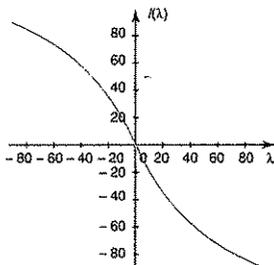
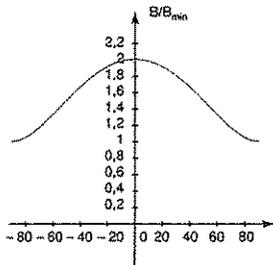
1 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \cos \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{z}_r + \sin \theta \vec{z}_\theta)$, avec $\theta = \lambda + \frac{\pi}{2}$.

Donc : $\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (-2 \sin \lambda \vec{z}_r + \cos \lambda \vec{z}_\theta)$ de module $B = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}$ maximum

aux pôles géomagnétiques $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$. $\tan I = \frac{B_r}{B_\theta} = -2 \tan \lambda$ avec $\cos I > 0$ (orienté vers

le Nord géomagnétique). I , compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, sera positif aux latitudes négatives, et négatif aux latitudes positives.

On obtient les courbes suivantes :



A.N. : À Paris, $\lambda = 52^\circ$. On trouve donc $I = -68,6^\circ$ au lieu de $-64,5^\circ$, et $B = 5,40 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ au lieu de $4,7 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Le modèle du champ dipolaire est donc valable pour cette latitude qui ne correspond cependant pas à la position géographique réelle.

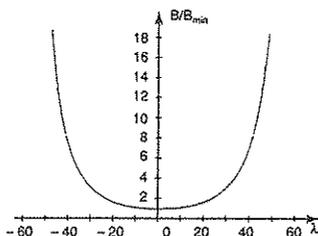
» 2 Une ligne de champ est définie par $\vec{B} \wedge d\vec{r} = \vec{0}$, avec $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta$, soit

$$2\cos\theta dr - \sin\theta r d\theta = 0; \text{ en séparant les variables } \frac{dr}{r} = 2 \frac{\sin\theta}{\cos\theta} d\theta : \ln\left(\frac{r}{\sin^2\theta}\right) = \text{Cte},$$

soit $r = r_s \sin^2\theta$, où r_s représente la distance à O de la ligne de champ lorsqu'elle traverse le plan équatorial.

En fonction de λ : $r = LR \cos^2\lambda$, et donc, sur la ligne de champ caractérisée par L ,

$$B = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \frac{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}}{L^3 \cos^6\lambda} = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \frac{\sqrt{4-3\cos^2\lambda}}{L^3 \cos^6\lambda}$$



La ligne de champ traverse la surface terrestre pour $r = R$, soit $\cos\lambda_m = \sqrt{\frac{1}{L}}$, la latitude étant définie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. En ces points, $\tan I = \mp 2 \tan\lambda_m = \mp 2\sqrt{L-1}$. $L \gg 1$

et $B = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \sqrt{4 - \frac{3}{L}}$ $\frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} < B < 2 \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}$.

Partie B

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme doit pouvoir être retrouvé très rapidement. On le décompose toujours en mouvement uniforme parallèlement au champ et en mouvement circulaire uniforme dans le plan perpendiculaire au champ.

» 1 $m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, soit $\ddot{z} = 0$, $\ddot{x} = \omega\dot{y}$, $\ddot{y} = -\omega\dot{x}$. En tenant compte des conditions initiales, une première intégration donne $\dot{x} = \omega y$ et donc $\ddot{y} = -\omega^2 y$.

À $t = 0$, $y = 0$ et $\dot{y} = v_0 \sin\alpha_0$, donc $y = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{\omega} \sin\omega t$, $x - x_0 = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{\omega} (1 - \cos\omega t)$:

la projection de la trajectoire sur le plan xOy est un cercle de rayon de giration $\rho = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{\omega}$,

et de période de rotation $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$. Pour que le centre de la trajectoire soit en O , il faut

$$x = -\frac{v_0 \sin \alpha_0}{\omega} \cos \omega t, \text{ donc } x_0 = -\frac{v_0 \sin \alpha_0}{\omega}.$$

Ce résultat s'obtient sans calculs, en remarquant que la projection du mouvement sur le plan perpendiculaire est un mouvement à vitesse constante $v_0 \sin \alpha_0$, d'accélération normale

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{\rho} = \omega v_0 \sin \alpha_0 \text{ constante : le rayon de courbure de la trajectoire plane étant constant,}$$

$$\text{c'est un cercle de rayon } \rho = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{\omega}, \text{ parcouru avec la période } \tau = \frac{2\pi \rho}{v_0 \sin \alpha_0} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

➤ **2** Dans l'espace, c'est la composée d'un mouvement circulaire uniforme perpendiculairement à \vec{B} , et d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $v_0 \cos \alpha_0$ suivant Oz .

La trajectoire est donc une hélice, de pas $p = v_0 \cos \alpha_0 \tau = \frac{2\pi v_0 \cos \alpha_0}{\omega}$.

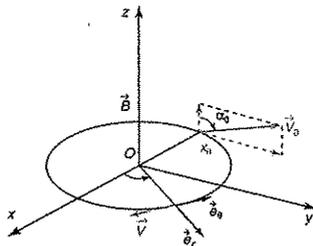
➤ **3** Les deux mouvements se faisant à vitesse constante, l'énergie cinétique est constante et vaut $E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$, prévisible puisque le travail de la force magnétique est nul.

➤ **4** $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r} = \frac{1}{2} B(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x)$. Donc $\text{rot } \vec{A} = \text{rot} \left(\frac{1}{2} B(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x) \right) = B\vec{e}_z$. (On peut remarquer que $\text{div } \vec{A} = 0$.) \vec{A} est donc un potentiel vecteur du champ magnétique.

Pour évaluer une circulation, il faut choisir un sens de parcours sur la courbe.

Si l'on oriente Γ dans le sens du déplacement :

$$\vec{v} = v_0 \sin \alpha_0 (\sin \omega t \vec{e}_x + \cos \omega t \vec{e}_y) = -v_0 \sin \alpha_0 \vec{e}_\theta = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = -\rho \omega \vec{e}_\theta.$$



$$S = \oint_{\Gamma} (m\vec{v} + q\vec{A}) \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \left(-m\omega\rho\vec{e}_\theta + \frac{1}{2}qB\rho\vec{e}_\theta \right) \cdot (-\rho d\theta \vec{e}_\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}qB\rho^2 d\theta = \pi qB\rho^2.$$

Partie C

1

La conservation de l'invariant adiabatique peut s'exprimer comme la conservation du flux de B à travers la trajectoire.

Le travail de la force magnétique étant nul, il y a conservation de l'énergie cinétique E_c .

2 La composante de la vitesse perpendiculaire au champ s'écrit $\omega \rho$, donc :

$$E_c = \frac{1}{2} m (v_L^2 + \omega^2 \rho^2). \quad v_L^2 = \frac{2E_c}{m} - \omega^2 \rho^2 = \frac{2E_c}{m} - \frac{\omega^2 S}{\pi q B} = \frac{2E_c}{m} - \frac{qBS}{\pi m^2}$$

On peut ainsi déterminer v_L en fonction des conditions initiales qui permettent de déterminer E_c et S et du champ local. v_L^2 étant positif, la particule ne peut pas pénétrer dans les régions où $\frac{2E_c}{m} - \frac{qBS}{\pi m^2} < 0$.

La vitesse longitudinale s'annule si B atteint la valeur $B_{\max} = \frac{2\pi m E_c}{qS}$, et rebrousse chemin autour de la ligne de champ. Il y a effet de rebond, ou de « miroir magnétique ».

Ce rebond peut s'interpréter ainsi : la vitesse transversale varie comme le produit ρB , et donc comme \sqrt{BS} . L'énergie cinétique étant constante, cette augmentation de la vitesse de rotation se fait aux dépens de la vitesse de translation le long de la ligne de champ.

Pour appliquer les résultats précédents, il faut déterminer les constantes du mouvement à partir des conditions initiales précisées dans le texte, et reprendre la variation de B le long d'une ligne de champ vue dans la première partie.

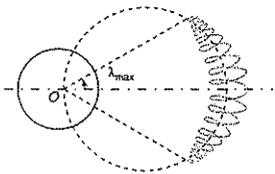
3 Le champ étant une fonction décroissante de $\cos \lambda$, et donc croissante de λ , d'intensité symétrique autour de $\lambda = 0$, les particules feront des oscillations autour de $\lambda = 0$ jusqu'au point où le champ atteindra la valeur limite B_{\max} .

À l'équateur géomagnétique,

$$B = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3} \frac{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \lambda}}{L^3 \cos^6 \lambda} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3 L^3} = B_{\min}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m (v_L^2 + v_T^2) = m v_c^2. \quad S = \pi q B_{\min} \rho^2 = \pi q B_{\min} \frac{v_L^2}{\omega^2} = \pi \frac{m^2}{q B_{\min}} v_c^2.$$

$$B_{\max} = \frac{2\pi m E_c}{qS} = \frac{2\pi m^2 v_c^2}{q\pi m^2 v_c^2} B_{\min} = 2B_{\min}$$



La latitude maximale atteinte est donc telle que $\frac{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \lambda}}{\cos^6 \lambda} = 2$, soit, en posant

$x = \cos^2 \lambda : x^6 + \frac{3}{4}x^2 - 1 = 0$, avec une solution comprise entre 0 et 1.

A.N. : $x = 0,846$, soit $\cos \lambda = 0,920$, et $\lambda_{\max} = 23^\circ, 10'$. $r_{\min} = xLR = 0,846LR$.

C'est ainsi que l'on explique la formation de ceintures de Van Allen, région s'étendant jusqu'à environ six rayons terrestres, peuplée d'ions et d'électrons d'origine solaire, piégés par le champ magnétique terrestre, mais dangereux pour les satellites artificiels.



20 min

> Corrigé p. 90

Champ d'une couche parcourue par un courant

On considère une plaque supposée infinie, d'épaisseur e , perpendiculaire à l'axe Oz définie par $-\frac{e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2}$ et parcourue par une densité volumique de courant uniforme $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$.

1. Calculer le champ magnétique créé par cette plaque en tout point M de l'espace.
2. Calculer la densité volumique en M des forces de Laplace s'exerçant sur cette plaque. Que peut-on dire de leur résultante pour l'ensemble de la plaque ?
3. On fait tendre l'épaisseur vers 0 en gardant constant le produit $i_s = j_0 e$. Retrouver la discontinuité du champ à la traversée d'une couche chargée.
4. On superpose un champ magnétique uniforme qui annule le champ magnétique dans la région $z < 0$.

Calculer la force de Laplace qui s'exerce sur l'unité de surface de la plaque supposée infiniment mince et montrer qu'elle a les caractéristiques d'une pression P dont on donnera l'expression. Comparer avec la force de pression électrostatique définie au chapitre précédent.



20 min

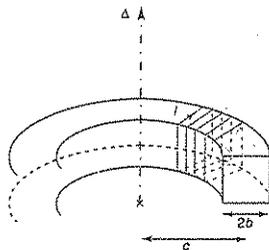
> Corrigé p. 91

Calculs d'inductance (d'après concours DEUG)

Un cylindre conducteur (C), infiniment long, de section droite $s = \pi a^2$ et d'axe $z'z$, est constitué d'un matériau de conductivité γ . Il est le siège d'un courant électrique continu d'intensité I , de densité volumique uniforme \vec{j} parallèle à $z'z$.

1. Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M situé à la distance ρ de l'axe $z'z$ et tracer l'allure du graphe $|\vec{B}(M)|$.

2. Une surface torique, de section carrée, est engendrée par un carré de côté $2b$ tournant autour d'un axe (D) de son plan, parallèle à deux de ses côtés. On réalise un solénoïde torique (S) en enroulant un fil conducteur sur la surface précédente, de manière à constituer une seule couche de N spires jointives supposées planes. Soit c le rayon moyen de ces spires. Un courant d'intensité I' circule dans les spires.



a. Calculer le champ magnétique $\vec{B}'(M)$ en tout point M situé à la distance ρ' de l'axe D , à l'intérieur et à l'extérieur de (S).

- b. Calculer le flux Φ' de ce champ à travers (S). En déduire son inductance propre $L' = \frac{\Phi'}{I'}$. Donner la valeur numérique de L' avec $N = 1000$, $c = 6$ cm, $b = 1$ cm.

3. On considère le système formé par le cylindre conducteur (C) de longueur infinie, parcouru par un courant d'intensité I , et le solénoïde (S) dont on réunit maintenant les extrémités entre elles ($I' = 0$) de manière à constituer un circuit fermé. Les axes $z'z$ et (Δ) sont confondus, et $a < c - b$.

Calculer le flux Φ du champ \vec{B} à travers (S) et en déduire l'inductance mutuelle $\mathcal{M} = \frac{\Phi}{I}$.

4. L'inductance mutuelle peut être calculée indifféremment en considérant le flux envoyé par (C) à travers (S) ou par (S) à travers (C). Retrouver ce résultat, bien que le champ créé par le solénoïde soit nul en tout point du cylindre.



20 min

> Corrigé p. 91

Champ d'un onduleur (d'après ENSET)

On voudrait réaliser dans une région de l'espace vide, sans charges ni courants, un champ magnéti-

que indépendant du temps de la forme $\vec{B} = B_0 \sin k_0 x \vec{z}$, (1) repéré dans un système d'axes orthonormé $Oxyz$ de vecteurs de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Pour tenter de réaliser de façon approchée un tel champ, on dispose périodiquement un système d'aimants permanents, la période spatiale étant $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$ (voir figure ci-après). Les plans Oxy et Oxz

sont des plans de symétrie géométrique du système. En outre les aimants sont très allongés dans la direction Oz , de sorte que le champ peut être considéré comme indépendant de z .

On adopte dans la suite les valeurs numériques suivantes : $B_0 = 0,4 \text{ T}$ et $\lambda_0 = 8 \text{ cm}$. La longueur totale est de $1,6 \text{ m}$, soit un nombre de périodes spatiales $N = 20$ pour l'onduleur.

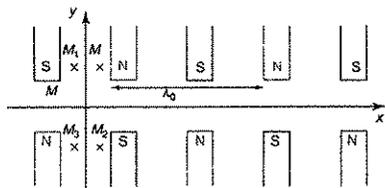
1. Montrer que l'expression (1) proposée pour le champ magnétique ne satisfait pas les équations de Maxwell.

2. On introduit une constante d'appareil

$K = \frac{1}{2\pi} \frac{e B_0 \lambda_0}{m_e c}$. Montrer que cette constante est sans dimension, et calculer sa valeur.

Données : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

3. On isole par la pensée uniquement deux paires d'aimants. Sans effectuer de calculs, dessiner l'allure des lignes de champ dans le plan Oxy . Que se passe-t-il au point O ?



En considérant le vecteur \vec{B} au point $M(x, y, 0)$ représenté sur la figure ci-dessus, dessiner le vecteur \vec{B} correspondant aux points $M_1(-x, y, 0)$, $M_2(x, -y, 0)$ et $M_3(-x, -y, 0)$.

Justifier un des cas à partir de considérations de symétrie.

4. On cherche alors pour \vec{B} une solution de la forme $\vec{B} = f(x, y) \vec{e}_x + B_0 g(y) \sin k_0 x \vec{e}_y$, où

$f(x, y)$ et $g(y)$ sont des fonctions de classe C^∞ , avec $f(x, 0) = 0$ et $g(0) = 1$.

À partir des symétries du système, montrer que l'on peut prévoir les propriétés des fonctions $f(x, y)$ et $g(y)$ (parité, périodicité). Justifier que $g'(0) = 0$.

5. À partir des équations de Maxwell, établir les expressions des fonctions $f(x, y)$ et $g(y)$ et écrire l'expression complète correspondante de \vec{B} . Sachant que le champ n'est destiné à agir que dans le domaine $|y| < 0,2 \text{ mm}$, montrer que, dans ces conditions, l'expression (1) est une bonne approximation de \vec{B} .



30 min.

> Corrigé p. 92

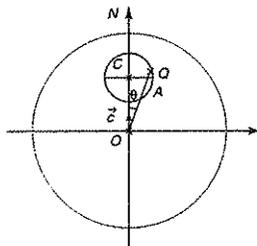
Voyage au centre de la Terre

(d'après concours commun des Mines)

Dans le récit de Jules Verne, le professeur Lidenbrok et son neveu Axel partent sur les traces de l'explorateur Arne Saknussemm. Ils s'enfoncent dans un ancien volcan en Islande... La Terre est assimilable à une sphère solide de centre O , de rayon R_T et de masse volumique uniforme μ . On suppose qu'elle contient une cavité sphérique de rayon R_C et de centre C placé à une distance a du point O . L'axe OC , portant le vecteur unitaire \vec{z} , correspond à l'axe des pôles de la Terre. On admettra que l'expédition part du pôle nord N et s'achemine par un tunnel de dimensions négligeables jusqu'au point A de la cavité tel que CA soit perpendiculaire à OC (figure ci-dessous).

Données : $OC = a = 3\,900 \text{ km}$. $R_T = 6\,400 \text{ km}$.

$R_C = 1\,500 \text{ km}$.



La cavité est à moitié remplie d'eau liquide, et baptisée, mer Lidenbrok. L'expédition arrive en A et part sur un radeau à la découverte de la rive opposée.

Pour naviguer sur la mer Lidenbrok, le professeur utilise une boussole, c'est-à-dire une aiguille aimantée pouvant tourner librement autour d'un axe de direction fixe confondue avec la verticale locale, dont on peut montrer qu'elle coïncide avec l'axe OC en tout point de la cavité.

Rappel : le potentiel vecteur en un point Q dû à un moment magnétique \vec{M} , de module M , placé en un point $Q(PQ = d)$ est : $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \wedge \frac{\vec{PQ}}{d^3}$.

1. La partie solide de la Terre possède un moment magnétique par unité de volume $\vec{J} = \frac{d\vec{M}}{d\tau}$. On pose, dans un premier modèle, que cette densité est uniforme et dirigée selon \vec{z} .

a. En utilisant le principe de superposition, écrire l'expression du potentiel vecteur en un point Q de la cavité sous la forme de deux intégrales portant respectivement sur les sphères centrées en O et C .

b. Donner le résultat explicite du calcul, en utilisant une analogie électrostatique.

c. En déduire le champ magnétique dans l'atmosphère interne de la cavité. Dans le cadre de ce modèle, la boussole est-elle utile à la navigation ?

2. Un modèle plus élaboré consiste à supposer que la Terre possède toujours une densité volumique de moment magnétique uniforme \vec{J} , dirigé suivant \vec{z} , mais uniquement à l'intérieur d'un noyau sphérique de centre O et de rayon $R_N = 2\,000$ km.

a. Déterminer le nouveau potentiel vecteur en un point Q de l'atmosphère interne. Montrer que la Terre se comporte magnétiquement comme un moment magnétique \vec{M} placé en O , que l'on exprimera en fonction de \vec{J} et de R_N . Déterminer alors le champ \vec{B} qui oriente la boussole en un point Q de AC , trajectoire du radeau.

b. Le point Q étant repéré par l'angle θ entre \vec{OC} et \vec{OQ} , exprimer la projection de \vec{B} sur \vec{AC} .

La boussole est-elle utile pour aller de A à C ? Que se passe-t-il au centre C de la mer ?



40 min

» Corrigé p. 23

Expérience de l'aimant flottant

Partie A

Certains métaux ou alliages, à température suffisamment basse, deviennent supraconducteurs. C'est le cas du plomb par exemple. Nous admettrons d'une part qu'un tel corps est un conducteur parfait (il ne peut porter aucune charge interne et le champ électrique interne y est strictement nul) et que, d'autre part la densité de courant \vec{j} y est reliée au potentiel vecteur \vec{A} choisi de divergence nulle par la relation fondamentale : $\vec{j} = -\frac{2\pi q^2}{m} \vec{A}$.

q et m sont respectivement la charge et la masse de l'électron ($q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg), n est le nombre d'électrons de conduction par unité de volume ($3 \cdot 10^{28}$ m⁻³ pour le plomb.)

1. Calculer, dans le cas du plomb, la quantité

$$\delta = \sqrt{\frac{m}{2nq^2\mu_0}}$$

et préciser sa dimension. Dans une expérience d'électrodynamique courante de laboratoire, peut-elle être considérée comme très petite ou très grande ?

2. À l'intérieur d'un supraconducteur, montrer que le champ magnétique vérifie une équation de la forme : $\Delta \vec{B} - \lambda^2 \vec{B} = \vec{0}$, et exprimer λ en fonction de δ .

3. Soit un supraconducteur dont la surface est le plan $x = 0$ et qui remplit la région $x > 0$. On suppose que, dans le vide extérieur règne un champ magnétique statique qui en $x = 0$ est indépendant de y et z , et perpendiculaire à Oy . Quelle est l'expression des composantes du champ \vec{B} à l'intérieur du supraconducteur ? Outre la composante B_y , l'une des composantes B_x et B_z est nulle, laquelle et pourquoi ? Quelle condition cela impose-t-il pour le champ externe à la frontière ?

4. Déduire des équations de Maxwell la densité de courant à l'intérieur du supraconducteur.

5. Montrer qu'il s'exerce une certaine force électromagnétique par unité de surface du supraconducteur. Quelle est sa direction ? Quelle pression exerce-t-elle ?

Partie B

1. En s'appuyant sur l'étude précédente, justifier les règles suivantes utilisées pour modéliser le supraconducteur à l'échelle macroscopique.

a. Le champ magnétique interne y est nul.

b. L'une des composantes du champ magnétique externe (on précisera s'il s'agit de la composante normale ou tangentielle) s'annule à la frontière.

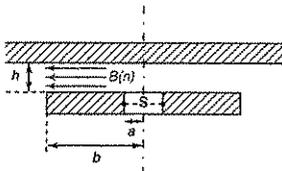
c. Il y a une densité surfacique de courant :

$\vec{g} = K \vec{n} \wedge \vec{B}_e + K' \vec{B}_e$, où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface du supraconducteur et dirigé vers

l'extérieur, et \vec{B}_e le champ externe à la frontière.

d. La force par unité de surface est une force de pression P . On précisera les valeurs de K , K' et de P , et la raison de ces approximations.

2. On considère un supraconducteur en forme d'anneau plat (voir ci-dessous) et l'on appelle S l'aire du disque médian s'appuyant sur le bord interne de l'anneau. On admet que le flux magnétique Φ à travers S est une constante indépendante du temps, et donc du mouvement des dispositifs physiques extérieurs à l'anneau, quels qu'ils soient.



Au-dessus de l'anneau, supposé horizontal, est placé un autre supraconducteur de masse M dont la surface plane et horizontale est située à la distance h de l'anneau. On fait l'hypothèse simplificatrice que dans la zone située entre les deux supraconducteurs, à une distance r de l'axe de l'anneau comprise entre le rayon interne a et externe b , le champ \vec{B} est radial et son intensité ne dépend que de r .

Calculer cette intensité $B(r)$, en fonction de Φ , h et r .

Calculer la force exercée par l'anneau sur le supraconducteur qui le surmonte. On ne tiendra compte que de la force exercée à l'aplomb de l'anneau (c'est-à-dire dans la zone située à une distance de l'axe comprise entre a et b). Dans quelles conditions les approximations faites paraissent-elles justifiées ?

3. On prend $\Phi = 2,8 \cdot 10^{-5}$ Weber, $\frac{b}{a} = e^2$ (e étant

la base des logarithmes népériens), $M = 0,1$ kg.

Calculer la valeur d'équilibre h_0 de h , en supposant le supraconducteur supérieur en lévitation. Montrer que cet équilibre est stable et calculer la période des oscillations autour de h_0 .



20 min

» Corrigé p. 94

Striction d'une colonne de plasma

(d'après CCP)

Un plasma est un gaz ionisé, c'est-à-dire un gaz constitué d'atomes neutres de densité volumique n_a , d'ions positifs de densité volumique n_i , et d'électrons de densité volumique n_e , électriquement neutre. (Si les ions positifs portent une seule charge élémentaire positive, $n_e = n_i$). On peut obtenir le confinement d'une colonne de plasma en utilisant, au lieu de champs magnétiques externes, le champ magnétique créé par un courant intense traversant le plasma.

On se propose d'étudier l'équilibre d'une colonne de plasma de symétrie cylindrique d'axe Oz et de rayon R . Le plasma est traversé par un courant I dirigé suivant Oz et uniformément réparti dans la section de la colonne. Le plasma est en équilibre thermodynamique à la température T . On désigne par $n(r) = n_a(r) + n_i(r) + n_e(r)$ la densité totale de particules à la distance r de l'axe et par $P(r)$ la pression en ce point. À l'équilibre, $P(r) = n(r)kT$ où k est la constante de Boltzmann.

1. Calculer le champ magnétique créé par le courant I en un point de la colonne de plasma situé à la distance r de l'axe ($r < R$).

2. Calculer la force de Laplace $d\vec{F}_m$ qui agit sur un élément de volume en coordonnées cylindriques d'axe Oz , $d\tau = r dr d\theta dz$ de plasma.

Montrer que cette force tend à s'opposer à l'expansion radiale de la colonne de plasma.

3. Rappeler l'expression générale de la résultante des forces de pression $d\vec{F}_p$ qui agit sur le même élément de volume. Dédurre de la condition d'équilibre de l'élément de volume l'expression de $P(r)$.

4. On désigne par N le nombre total de particules par unité de longueur de la colonne de plasma. Écrire la condition entre N et I qui traduit la condition d'équilibre du plasma (condition de Bennett).

5. Application numérique : calculer le courant I nécessaire pour confiner une colonne de plasma de 10 cm de rayon, l'énergie cinétique moyenne des particules étant de 100 keV et la densité moyenne de particules dans la colonne de 10^{15} cm^{-3} .



30 min.

> Coexigé p. 93

Corde de Dirac (d'après Mines)

On bobine n tours de fil par unité de longueur d'un solénoïde de longueur L et de rayon R . Le champ d'induction magnétique en un point M de l'axe du solénoïde situé à l'abscisse z du centre O de la face la plus proche est :

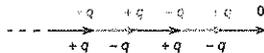
$\vec{B} = k\mu_0 n i (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_z$, où i est l'intensité, constante, du courant dans le fil.



En se référant à un cas particulier, déterminer la valeur de la constante k .

1. Montrer que, lorsque $R \ll z \ll L$, le champ s'exprime par : $\vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi z^2} \vec{e}_z$, et préciser la valeur de la constante q_m .

2. On considère une suite de dipôles électriques jointifs placés sur la partie négative de l'axe Oz et orientés parallèlement à cet axe ; chaque dipôle, de moment dipolaire \vec{p} , est constitué de deux charges ponctuelles $-q$ et $+q$ séparées par une distance a telle que $p = qa$.



Exprimer le champ électrique au point M sur la partie positive de l'axe Oz . Que peut-on dire de la charge q par rapport au moment dipolaire par unité de longueur ?

3. Quelle est l'expression du moment magnétique associé à une spire du solénoïde ? Montrer, en utilisant l'analogie avec la suite de dipôles électriques que tout se passe comme si le champ au point M était celui d'une « charge magnétique » isolée placée en O .

En déduire l'expression du champ magnétique dans la région autour de la partie positive de l'axe Oz .

4. On s'intéresse au mouvement d'une particule chargée dans ce champ.

Donner l'expression du théorème du moment cinétique en O , \vec{L}_O dans le référentiel galiléen \mathcal{R} , appliqué au mouvement d'une particule dans ce champ de force.

5. Montrer que le moment $\vec{OM} \wedge \vec{F}$ en O de la force \vec{F} exercée par le champ s'écrit $-\frac{d\vec{S}}{dt}$, où \vec{S} est un vecteur ne dépendant que de la position et de la vitesse de la particule.

En déduire que le vecteur $\vec{L}_g = \vec{L}_O + \vec{S}$, dont on donnera l'expression, est une intégrale première du mouvement.

6. Montrer que le mouvement de la particule s'effectue sur un cône que l'on caractérisera.

Tester ses connaissances

1 a. Faux et b. Vrai. Près de la distribution, le champ magnétique est sensible à la géométrie de la répartition de courants. La distance r du point où l'on calcule le champ à la distribution doit être grande devant la dimension caractéristique de la distribution. On peut par exemple calculer le champ au centre de deux spires circulaires de rayons a_1 et a_2 , parcourues par des courants I_1 et $I_2 = I_1 \frac{a_1^2}{a_2^2}$, ayant donc le même moment magnétique : $\pi a_1^2 I_1$,

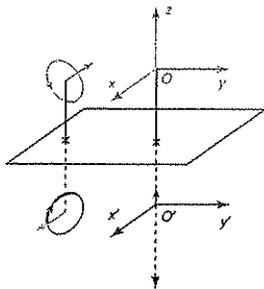
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2a_1}, \text{ et } B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2a_2} = B_1 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^3.$$

c. Vrai. L'action est un couple $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$, qui ne dépend donc que du moment magnétique.

d. Faux et e. Faux. Le résultat reste vrai pour le calcul du moment des forces de Laplace au point O où se trouve le moment, si le champ peut être considéré comme uniforme sur la distribution : donc si la variation relative de B sur l'étendue a de la répartition est petite devant 1 : B varie en $\frac{1}{r^3}$, il faut donc $\frac{a}{r} \ll 1$.

On n'oublie pas cependant que la résultante même faible n'est pas nulle et dépend de la géométrie de la distribution, et que l'action ne se réduit donc pas à un couple.

2 a. Faux. Les moments magnétiques sont des vecteurs axiaux puisqu'ils font intervenir le vecteur surface. Deux distributions symétriques par rapport à un plan ont donc des moments magnétiques antisymétriques :



b. Vrai. La relation qui lie \vec{A} à \vec{j} ne fait pas intervenir l'orientation de l'espace : ce sont deux vecteurs polaires.

c. Vrai. \vec{B} est discontinu, mais \vec{A} est continu : certaines de ses dérivées sont discontinues, mais pour qu'il y ait discontinuité, il faudrait qu'elles ne soient pas définies : \vec{B} infini.

d. Vrai. La force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire au déplacement de la charge.

e. Faux. Il s'agit d'une force transmise au réseau métallique par les porteurs mobiles, perpendiculaire aux lignes de courant. Si le conducteur ne se déplace pas perpendiculairement aux lignes de courant, le travail de la force de Laplace n'est pas nul.

3 a. On oriente la spire dans le sens de rotation positif autour de l'axe Oz , et on note I l'intensité algébrique du courant qui la

parcourt : $I d\vec{\ell} = I a d\theta \vec{e}_\theta$.

Tout plan passant par l'axe Oz étant plan d'antisymétrie pour la distribution de courant, le champ magnétique en un point M de cet axe est porté par l'axe. Il suffit donc de calculer la composante B_z du champ par la loi de Biot et Savart :

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{PM} \wedge \vec{e}_z}{PM^3} \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{PM^2} a d\theta, \text{ soit, pour toute la spire :}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2a} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 \vec{e}_z.$$

Pour $a \ll z$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \vec{e}_z$.

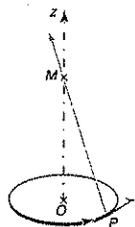
Le champ d'un moment magnétique $M \vec{e}_z$ en un point de son axe ($\theta = 0$) à la distance z s'écrit :

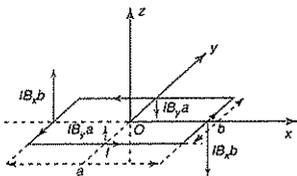
$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi z^3} \vec{e}_z$. L'identification des deux expressions redonne l'expression du moment magnétique de la

$$\text{spire : } \vec{M} = \pi a^2 I \vec{e}_z = I \vec{S}.$$

b. $\vec{\Gamma}$ étant indépendant du point où on le calcule, on choisit de le calculer en O centre de la spire. On oriente la spire dans le sens de rotation positif autour de Oz (voir ci-après). On note Ox et Oy les axes parallèles aux côtés de longueurs a et b .

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z.$$





Les éléments de force de Laplace $I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ dus à la composante B_x sont nuls sur les côtés parallèles à Ox , et valent $-I dy B_x \vec{e}_z$ sur les côtés parallèles à Oy .

Leur moment $\vec{OM} \wedge d\vec{F}$ en O vaut :

pour le côté $x = \frac{a}{2}$:

$$d\vec{\Gamma}_O = \left(\frac{a}{2} \vec{e}_x + y \vec{e}_y \right) \wedge -I dy B_x \vec{e}_z$$

$$= I \frac{a}{2} B_x dy \vec{e}_z - I B_x y dy \vec{e}_x,$$

et sur le côté $x = -\frac{a}{2}$:

$$d\vec{\Gamma}_O = \left(-\frac{a}{2} \vec{e}_x + y \vec{e}_y \right) \wedge -I dy B_x \vec{e}_z$$

$$= -I \frac{a}{2} B_x dy \vec{e}_z - I B_x y dy \vec{e}_x, \text{ soit :}$$

$$\vec{\Gamma}_O = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{a}{2} I B_x dy \vec{e}_z + \int_{-b/2}^{b/2} -\frac{a}{2} I B_x dy \vec{e}_y = I ab B_x \vec{e}_z,$$

La contribution au moment en O de cette composante est donc $I B_x ab \vec{e}_z$. De même la contribution de la composante B_y est $-I B_y ab \vec{e}_x$.

Les éléments de force de Laplace dus à la composante B_z sont symétriques par rapport à O_x ou O_y dans le plan xOy et ont donc un moment résultant nul en O .

$$\vec{\Gamma} = I ab (+B_x \vec{e}_z - B_y \vec{e}_x) = I ab \vec{e}_z \wedge \vec{B}.$$

On retrouve bien l'expression $\vec{M} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{M} = I ab \vec{e}_z = I \vec{S}$.

4 $\frac{1}{2} \vec{B}_0 \wedge \vec{r} = \frac{1}{2} (B_0 x \vec{e}_y - B_0 y \vec{e}_x)$, donc

$$\text{rot} \left(\frac{1}{2} \vec{B}_0 \wedge \vec{r} \right) = \left(\frac{\partial B_0 y}{\partial x} - \frac{\partial B_0 x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = B_0 \vec{e}_z.$$

$$\text{De même } \text{rot}(B_0 x \vec{e}_y) = \left(\frac{\partial B_0 x}{\partial x} \right) \vec{e}_z = B_0 \vec{e}_z,$$

$$\text{e. } \text{rot}(-B_0 y \vec{e}_x) = \left(-\frac{\partial (-B_0 y)}{\partial y} \right) \vec{e}_z = B_0 \vec{e}_z.$$

Le théorème d'unicité n'est valable qu'avec des conditions aux limites définies. Un champ n'est uniforme que sur une région limitée de l'espace, et l'expression la plus adaptée tiendra compte de la symétrie des sources. Par exemple, $\frac{1}{2} \vec{B}_0 \wedge \vec{r}$ a la symétrie de révolution autour de l'axe Oz , et sera adapté au champ uniforme à l'intérieur d'un solénoïde infini. Cependant, il faut se rappeler que seul le rotationnel de \vec{A} a une signification physique.

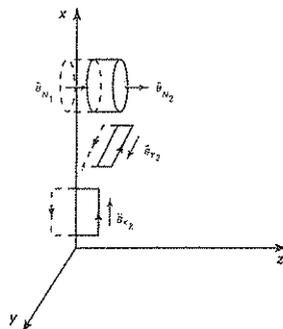
5 Le moment magnétique de l'aiguille tend à s'aligner sur le champ magnétique terrestre. Ne pouvant tourner que dans un plan horizontal, elle s'alignera sur la composante horizontale de ce champ. Son pôle Nord étant par définition dirigé vers le pôle Nord magnétique, il s'ensuit que le moment magnétique de la Terre est dirigé du Nord magnétique vers le Sud magnétique. Le module du champ magnétique créé par un moment \vec{M} s'écrit :

$$\sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}.$$

Ce module est donc maximum, à r constant, en $\theta = 0$, donc aux pôles où il vaut $\frac{\mu_0 M}{2\pi r^3}$, et minimum à l'équateur magnétique où il vaut deux fois moins.

6 Soit \vec{e}_z la normale à la surface, et $\vec{i}_z = i_s \vec{e}_z$ le vecteur densité surfacique de courant local, évidemment perpendiculaire à Oz .



Si l'on utilise le fait que \vec{B} est à flux conservatif pour le flux sortant d'une surface fermée cylindrique de géné-

ratrices parallèles à Oz (voir figure ci-avant), dont la hauteur tend vers 0, $B_{N_2} = B_{N_1}$.

Si l'on applique le théorème d'Ampère à un circuit rectangulaire de côtés parallèles à Oz et Ox traversant la surface, l'intensité du courant à travers cette surface est nulle, et $B_{x_2} = B_{x_1}$.

Si l'on applique le théorème d'Ampère à un circuit rectangulaire de côtés parallèles à Oz et Oy , de lon-

gueur $d\ell$ suivant Oy , orienté positivement autour de Ox et traversant la surface, la circulation tend vers $(-B_{y_2} + B_{y_1})d\ell$ quand la hauteur tend vers 0, et l'intensité du courant à travers cette surface vaut $i_x d\ell$, et donc :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = -\mu_0 i_x \vec{e}_y = \mu_0 i_x \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = \mu_0 \vec{e}_x \wedge \vec{e}_{12}$$

Savoir appliquer le cours

1 L'équation locale de conservation de la charge s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$.

Pour un conducteur ohmique, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Si γ est uniforme, on obtient $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div} \vec{E} = 0$, soit d'après l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$$

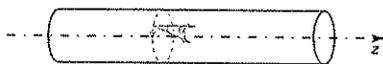
On reconnaît une équation de relaxation caractérisée par le temps $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$, de solution :

$\delta \rho(t) = \delta \rho(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. La valeur de la perturbation sera réduite de moitié au bout du temps $t = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \ln 2$.

A.N. : $1,0 \cdot 10^{-19}$ s.

Le phénomène est instantané.

2 1. On décompose la répartition surfacique en deux répartitions : $\vec{i}_s = i_s \cos \alpha \vec{e}_z + i_s \sin \alpha \vec{e}_\theta$, et on calcule les contributions au champ et au potentiel vecteur des deux composantes :



• **Composante suivant Oz** : tout plan passant par Oz est plan de symétrie pour la distribution, donc en un point M le champ est perpendiculaire à ce plan et donc orthoradial. Il y a invariance par translation suivant Oz et par rotation autour de Oz , donc $\vec{B}_1 = B_1(r) \vec{e}_\theta$.

On applique le théorème d'Ampère à un cercle de rayon r centré sur l'axe Oz orienté suivant \vec{e}_θ :

$r < a$: $2\pi r B_1(r) = 0$, et donc $B_1(r) = 0$,

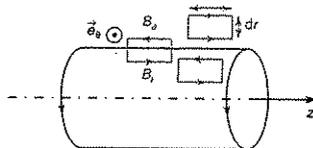
$r > a$: $2\pi r B_1(r) = \mu_0 2\pi a i_s \cos \alpha$,

$$\vec{B}_1(r) = \mu_0 \frac{i_s a \cos \alpha}{r} \vec{e}_\theta$$

• **Composante suivant \vec{e}_θ** : le raisonnement est le même que pour un solénoïde infini : le cylindre étant infini, tout plan perpendiculaire à Oz est plan de symétrie pour la répartition, et donc en tout point, le champ est suivant Oz . Les invariances sont les mêmes que précédemment : $\vec{B}_2 = B_2(r) \vec{e}_z$.

On applique le théorème d'Ampère à un rectangle dans un plan contenant Oz de longueur L parallèle à Oz et de largeur dr , orienté pour que son vecteur surface soit suivant \vec{e}_θ : si le rectangle ne traverse pas la surface du cylindre : $B_2(r) = \text{Cte}$.

À l'intérieur, $\vec{B}_2 = B_{2i} \vec{e}_z$, à l'extérieur $\vec{B}_2 = B_{2e} \vec{e}_z$.



À la traversée de la surface : $(B_{2i} - B_{2e})L = \mu_0 i_s \sin \alpha L$.

Il reste à déterminer l'une des deux constantes : on peut soit calculer le champ sur l'axe, et on trouve $\vec{B}_{2i} = \mu_0 i_s \sin \alpha \vec{e}_z$, soit considérer que le cylindre infini peut être considéré comme un tore de rayon infini, et que le champ à l'extérieur est nul :

$r < a$: $\vec{B}_2 = \mu_0 i_s \sin \alpha \vec{e}_z$,

$r > a$: $\vec{B}_2 = \vec{0}$.

Donc,

$$r < a : \vec{B}(r) = \mu_0 i_s \sin \alpha \vec{e}_z$$

$$r > a : \vec{B}(r) = \mu_0 \frac{i_s a \cos \alpha}{r} \vec{e}_\theta$$

2. a et b. Les relations de définition du potentiel vecteur \vec{A} de divergence nulle à partir du champ \vec{B} sont les mêmes que les relations de définition de \vec{B} à partir de $\mu_0 \vec{j}$. On décompose \vec{A} en \vec{A}_1 dû au champ \vec{B}_1 et en \vec{A}_2 dû au champ \vec{B}_2 .

• Calcul de \vec{A}_1 : \vec{A}_1 a les mêmes symétries que la répartition de courant qui le crée : $\vec{A}_1 = A_1(r) \vec{e}_z$. La circulation sur un rectangle dans un plan contenant Oz de longueur L parallèle à Oz et de largeur dr orienté comme précédemment s'écrit :

$$r < a : \vec{A}_1 = A_1(r) \vec{e}_z \text{ uniforme.}$$

$$r > a : (-A_1(r+dr) + A_1(r))L = \mu_0 \frac{i_r a \cos \alpha}{r} L dr,$$

$$\text{soit } \frac{dA_1}{dr} = -\mu_0 \frac{i_r a \cos \alpha}{r}.$$

(On le trouve immédiatement en exprimant la composante suivant z du rotationnel en coordonnées cylindriques.)

$$\text{Donc } \vec{A}_1 = -\mu_0 i_r a \cos \alpha \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \vec{e}_z. \text{ On ne peut pas}$$

choisir A_1 nul à l'infini puisque dans cette modélisation, i_r n'est pas nul à l'infini. Le plus simple est de choisir A_1 nul à la surface du cylindre, et donc A_{1i} nul par continuité.

$$r < a : \vec{A}_1 = \vec{0}, \quad r > a : \vec{A}_1 = \mu_0 i_r a \cos \alpha \ln\left(\frac{a}{r}\right) \vec{e}_z.$$

• Calcul de A_2 : \vec{A}_2 a les mêmes symétries que la répartition de courant qui le crée, $\vec{A}_2 = A_2(r) \vec{e}_\theta$. On utilise la circulation sur un cercle de rayon r , orienté suivant \vec{e}_θ :

$$r < a : 2\pi r A_2 = \mu_0 i_r \sin \alpha \pi r^2, \text{ donc}$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0 i_r \sin \alpha r}{2} \vec{e}_\theta;$$

$$r > a : 2\pi r A_2 = \mu_0 i_r \sin \alpha \pi a^2, \text{ donc}$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0 i_r \sin \alpha a^2}{2r} \vec{e}_\theta.$$

$$r < a : \vec{A} = \frac{\mu_0 i_r \sin \alpha r}{2} \vec{e}_\theta$$

$$r > a : \vec{A} = \mu_0 i_r a \cos \alpha \ln\left(\frac{a}{r}\right) \vec{e}_z + \frac{\mu_0 i_r \sin \alpha a^2}{2r} \vec{e}_\theta$$

Remarque : cette détermination n'est pas unique, car les conditions aux limites ne sont pas imposées par l'énoncé. Sur le cylindre, il a été choisi de prendre un potentiel vecteur orthoradial de module $\frac{\mu_0 i_r \sin \alpha a}{2}$.

En $r = a$,

$$\vec{B}_{r=a^+} - \vec{B}_{r=a^-} = \mu_0 i_r (\cos \alpha \vec{e}_\theta - \sin \alpha \vec{e}_z)$$

$$= \mu_0 i_r (\cos \alpha \vec{e}_z + \sin \alpha \vec{e}_\theta) \wedge \vec{e}_r.$$

On retrouve bien $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 i_r \wedge \vec{n}_{12}$.

De même, en $r = a$,

$$\vec{A}_{r=a^+} = \frac{\mu_0 i_r \sin \alpha a}{2} \vec{e}_\theta, \text{ et } \vec{A}_{r=a^-} = \frac{\mu_0 i_r \sin \alpha a^2}{2a} \vec{e}_\theta.$$

La continuité est donc bien vérifiée.

3 1. Chaque élément de volume $d\tau_p$ de la sphère possède un moment magnétique $d\vec{M} = \vec{j} d\tau_p$ et est source en tout point M d'un potentiel vecteur

$$d\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j} d\tau_p \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}.$$

Pour l'ensemble de la sphère :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{sphère}} \vec{j} d\tau_p \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j} \wedge \iiint_{\text{sphère}} \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau_p$$

$$\vec{V}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{sphère}} \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau_p. \text{ On reconnaît, au fac-}$$

teur $\epsilon_0 \mu_0$ près, l'expression du champ électrostatique créé par une répartition volumique uniforme unitaire sur la sphère, qui se calcule avec le théorème

de Gauss : on pose $\vec{r} = \vec{OM} = r \vec{e}_r$.

$$r < R : 4\pi r^2 V = \frac{4\pi \mu_0}{3} r^3 \text{ et } \vec{V}(r) = \mu_0 \frac{\vec{r}}{3},$$

$$r > R : 4\pi r^2 V = \frac{4\pi \mu_0}{3} R^3 \text{ et } \vec{V}(M) = \mu_0 \frac{R^3 \vec{r}}{3r^3}.$$

$$\text{Donc, } r < R : \vec{A}(r) = \mu_0 \vec{j} \wedge \frac{\vec{r}}{3},$$

$$r > R : \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} 4\pi R^3 \vec{j} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

2. Pour $r < R$:

$$\vec{B}(M) = \text{rot} \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{3} \text{rot}(J_0 x \vec{e}_y - J_0 y \vec{e}_x) = \frac{2\mu_0}{3} \vec{j}$$

Remarque : ce champ est uniforme.

Pour $r > R$: On reconnaît le potentiel vecteur d'un moment magnétique $\vec{M} = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{j}$, égal au moment magnétique total de la sphère, placé en O .

En coordonnées sphériques de centre O et d'axe Oz :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 R^3 J_0}{3r^3} (2\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

3. Si l'on superpose à ce champ un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0(M) = -\frac{2\mu_0}{3}\vec{j}$, on obtiendra un champ magnétique uniformément nul à l'intérieur de la sphère. La superposition de \vec{B}_0 et du champ créé

par la densité $\vec{j} = \frac{3\vec{B}_0}{2\mu_0}$ sur le volume de la sphère est un champ uniformément nul dans la sphère, et uniforme égal à \vec{B}_0 à l'infini.

Le champ étant uniforme à l'intérieur de la sphère, son rotationnel est nul, et donc la densité volumique de courants est nulle dans la sphère. Les sources de champ ne peuvent donc être que des courants surfaciques.

Pour les obtenir, il suffit de calculer la discontinuité de \vec{B} à la traversée de la surface $r = R$:

Le champ dû au moment magnétique

$$\vec{M} = \frac{4\pi}{3}R^3\vec{j} = \frac{2\pi R^3\vec{B}_0}{\mu_0} \text{ en un point } M \text{ au voisinage de la surface de la sphère s'écrit, en coordonnées sphériques d'origine } O \text{ et d'axe } Oz :$$

$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}(2\cos\theta\vec{z}_r + \sin\theta\vec{z}_\theta)$

$$= -\frac{B_0}{2}(2\cos\theta\vec{z}_r + \sin\theta\vec{z}_\theta).$$

Le champ total s'écrit :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 = B_0(\cos\theta\vec{z}_r - \sin\theta\vec{z}_\theta) - \frac{B_0}{2}(2\cos\theta\vec{z}_r + \sin\theta\vec{z}_\theta)$$

$$\vec{B} = -\frac{3B_0}{2}\sin\theta\vec{z}_\theta$$

Les courants surfaciques n'ont de composante que suivant \vec{z}_θ et \vec{z}_ϕ . À la traversée de la répartition surfacique \vec{j}_s sur la sphère, $\vec{B} = -\frac{3B_0}{2}\sin\theta\vec{z}_\theta = \mu_0\vec{j}_s \wedge \vec{z}_r$,

$$\text{donc } \vec{j}_s = -\frac{3B_0\sin\theta}{2\mu_0}\vec{z}_\phi.$$

$$4. 1. \vec{B}(M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{M} \cdot \vec{r}) \text{grad} \frac{1}{r^3} - \left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \text{grad} \vec{M} \cdot \vec{r} \right).$$

$$\text{grad} \vec{M} \cdot \vec{r} = \text{grad}(M_x x + M_y y + M_z z) = \vec{M}$$

$$\text{grad} \frac{1}{r^3} = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

$$\text{Donc } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\frac{3\vec{r}}{r^2} \vec{M} \cdot \vec{r} - \vec{M} \right).$$

2. L'énergie potentielle d'interaction est l'énergie potentielle du moment \vec{M}_2 en O_2 dans le champ créé par le moment \vec{M}_1 en O_1 . En posant $\vec{r} = \vec{O}_1 O_2$:

$$\epsilon_p = -\vec{M}_2 \cdot \vec{B}_1(O_2) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2 - \frac{3\vec{M}_1 \cdot \vec{r} \vec{M}_2 \cdot \vec{r}}{r^2} \right).$$

On remarque que l'expression est inchangée si l'on permute les indices 1 et 2.

3. Le minimum de l'énergie potentielle est obtenu si \vec{M}_2 s'aligne sur le champ créé en O_2 par \vec{M}_1 , là où, à r constant, ce champ est le plus intense, donc si $\vec{r} = \vec{O}_1 O_2$ est aligné avec \vec{M}_1 .

Les deux moments doivent donc être alignés sur la droite qui les joint.

$$4. \text{ Dans cette configuration, } \epsilon_p = -\frac{\mu_0}{2\pi r^3} \mu_B^2.$$

$$\text{A.N. : } \mu_B = \frac{eh}{2m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

$$\epsilon_p = -6,37 \cdot 10^{-25} \text{ J} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ eV. Pour } T = 293 \text{ K, } kT = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ eV.}$$

L'interaction magnétique est donc trop faible pour pouvoir expliquer à température ambiante l'alignement des spins dans les ferromagnétiques. (L'interaction responsable ne s'explique qu'en faisant intervenir la mécanique quantique).

$$5. 1. \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\ell}_P}{PM} \\ \frac{1}{PM} = \frac{1}{\|\vec{OM} - \vec{OP}\|^{-1}} \\ = \frac{1}{OM} \left(1 - \frac{2\vec{OP} \cdot \vec{OM}}{OM^2} + \frac{OP^2}{OM^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{À l'ordre 0 en } \frac{1}{OM}, \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi OM} \oint_{\Gamma} I d\vec{\ell}_P = \vec{0}.$$

$$\text{À l'ordre 1, } \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi OM^3} \oint_{\Gamma} (\vec{OP} \cdot \vec{OM}) I d\vec{\ell}_P.$$

En utilisant la formule du gradient :

$$2. \vec{A}(M) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi OM^3} \iint_S \text{grad}(\vec{OM} \cdot \vec{OP}) \wedge d\vec{S}.$$

Dans cette intégrale, M est fixe et la variable est la position de P sur la boucle de courant.

$\text{grad}(\vec{OM} \cdot \vec{OP}) = \vec{OM}$, et l'on retrouve bien l'expression du cours :

$$\vec{A}(M) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi OM^3} \iint_{S_P} \vec{OM} \wedge d\vec{S}_P \\ = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\iint_{S_P} I d\vec{S}_P \right) \wedge \frac{\vec{OM}}{OM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \wedge \frac{\vec{OM}}{OM^3}$$

3. La distribution de courants est décomposable en boucles de courant. Il suffit donc d'étudier l'action d'un champ \vec{B} sur une de ces boucles. Si le champ est uniforme, la résultante des forces de Laplace s'écrit :

$$\vec{F} = \oint_{\text{boucle } C_i} (I_i d\vec{\ell}_i \wedge \vec{B}_0) = \left(\oint_{\text{boucle } C_i} I_i d\vec{\ell}_i \right) \wedge \vec{B}_0 = \vec{0}.$$

L'action des forces de Laplace est donc celle d'un couple dont on peut calculer le moment en n'importe quel point :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \oint_{\text{boucle } C_i} (\vec{OP} \wedge (I_i d\vec{\ell}_P \wedge \vec{B}_0)) \\ &= \oint_{\text{boucle } C_i} I_i d\vec{\ell}_P (\vec{OP} \cdot \vec{B}_0) - \vec{B}_0 \oint_{\text{boucle } C_i} (I_i \vec{OP} \cdot d\vec{\ell}_P) \\ &\oint_{\text{boucle } C_i} (I_i \vec{OP} \cdot d\vec{\ell}_P) = I_i \oint_{\text{boucle } C_i} \frac{dOP^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

4. Le premier terme se calcule à partir de la formule du gradient dérivée du théorème de Stokes, et en remarquant que $\vec{\text{grad}} \vec{OP} \cdot \vec{B}_0 = \vec{B}_0$:

$$\oint_C U d\vec{\ell} = - \iint_S \vec{\text{grad}} U \wedge d\vec{S}, \text{ donc :}$$

$$\vec{\Gamma} = \oint_{\text{boucle } C_i} I_i d\vec{\ell}_P (\vec{OP} \cdot \vec{B}_0) = -I_i \iint_{S_i} \vec{B}_0 \wedge d\vec{S}_i = \vec{M} \wedge \vec{B}_0$$

où \vec{M} est le moment magnétique de la boucle de courant, défini par $I_i \vec{S}_i$. La valeur du vecteur surface étant indépendante du choix de la surface s'appuyant sur le circuit, il convient de choisir une géométrie la plus simple possible.

6 1. L'intensité qui parcourt le cylindre plein est le flux de \vec{j}_0 à travers une section du cylindre, soit :

$$I = \pi a^2 j_0$$

L'intensité du courant de retour sera la même, et s'exprime en fonction du courant surfacique sous la forme :

$$I = 2\pi b i_S$$

2. La répartition de courant est invariante par translation suivant Oz par rotation autour de Oz et admet tout plan passant par Oz comme plan de symétrie. Donc, en un point M quelconque de coordonnées

cylindriques (r, θ, z) , $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.

On le calcule à l'aide du théorème d'Ampère appliqué à la circulation sur un cercle de rayon r centré sur l'axe Oz orienté suivant \vec{e}_θ :

$$\bullet r < a : 2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 j_0, \text{ soit } \vec{B} = \mu_0 \frac{rI}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta$$

$$\bullet a < r < b : 2\pi r B = \mu_0 I, \text{ soit } \vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

$$\bullet r > b : 2\pi r B = 0, \text{ soit } \vec{B} = \vec{0}$$

$$3. \Phi = L \int_a^b \mu_0 \frac{I}{2\pi r} dr = LI \frac{\mu_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi}$$

Le coefficient d'auto-induction par unité de longueur

$$\text{vaut donc } \Lambda = \frac{\mu_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi}$$

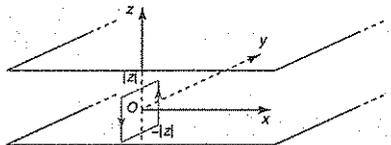
S'entraîner

1 1. La répartition de courants \vec{j} est invariante par translation suivant Ox et suivant Oy , et admet tout plan parallèle à xOz comme plan de symétrie. Donc en un point M quelconque de coordonnées (x, y, z) :

$$\vec{B} = B(z)\vec{e}_y.$$

De plus, le plan xOy est plan de symétrie pour \vec{j} , donc $B(-z) = -B(z)$.

On applique le théorème d'Ampère à un circuit rectangulaire dans le plan yOz , symétrique par rapport au plan xOy (voir ci-dessous), de longueur L et de hauteur $2|z|$, orienté dans le sens positif autour de Ox .



$$\bullet \text{ Si } |z| < \frac{e}{2} : 2B(|z|)L = -2\mu_0 j_0 L |z|, \vec{B} = -\mu_0 j_0 z \vec{e}_y$$

$$\bullet \text{ Si } |z| > \frac{e}{2} : 2B(|z|)L = -\mu_0 j_0 L e, \vec{B} = -\mu_0 j_0 \frac{e}{2|z|} \vec{e}_y$$

Le champ est uniforme au-dessus et au-dessous de la plaque.

Remarque : on choisirait dans ce cas un potentiel vecteur de la forme $A(z)\vec{e}_z$.

2. La densité volumique de force de Laplace s'écrit $\vec{j} \wedge \vec{B}$ à l'intérieur de la plaque, et a donc pour

$$\text{expression : } \frac{d\vec{F}}{d\tau} = j_0 \vec{e}_x \wedge -\mu_0 j_0 z \vec{e}_z = -\mu_0 j_0^2 z \vec{e}_z.$$

Deux volumes symétriques par rapport au plan xOy sont soumis à des forces égales et opposées, donc la résultante des forces de Laplace sur l'ensemble de la plaque est nulle.

3. La valeur du champ passe de $\mu_0 j_0 \frac{c}{2} \vec{e}_z$, à $-\mu_0 j_0 \frac{c}{2} \vec{e}_z$, quand on traverse la plaque dans le sens des z croissants.

Il y a donc une discontinuité $[-\mu_0 j_0 c \vec{e}_z = \mu_0 i_s \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z]$

conformément à l'expression générale $\mu_0 \vec{i}_s \wedge \vec{n}$.

4. Seul contribue à la force de Laplace le champ uniforme $-\mu_0 \frac{i_s}{2} \vec{e}_z$, qui crée une densité surfacique de force de Laplace : $\frac{d\vec{F}}{dS} = i_s \vec{e}_x \wedge -\mu_0 \frac{i_s}{2} \vec{e}_z = -\mu_0 \frac{i_s^2}{2} \vec{e}_z$.

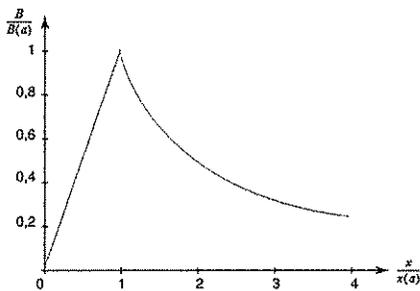
Cela correspond donc à une pression magnétique $\mu_0 \frac{i_s^2}{2}$, dirigée vers la région où le champ est nul, contrairement à la pression électrostatique (dirigée vers la région où le champ est non nul).

2. 1. On reprend le calcul déjà fait dans l'exercice 6, de « Savoir appliquer le cours » :

$$\bullet r < a : 2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 j, \text{ soit } \vec{B} = \mu_0 \frac{\rho I}{2\pi a^2} \vec{e}_0$$

$$\bullet r > a : 2\pi r B = \mu_0 I, \text{ soit } \vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_0$$

$B(r)$ est tracé sur la figure ci-dessous :



2. a. La distribution de courants est invariante par rotation autour de l'axe (D) et admet tout plan passant par cet axe comme plan de symétrie. \vec{B} est donc de la forme $\vec{B} = B(r, z)\vec{e}_0$ en coordonnées cylindriques d'axe $Oz = (D)$.

L'application du théorème d'Ampère à un cercle de rayon ρ' orienté dans le sens de \vec{e}_0 , à l'intérieur du tore ($-b < z < b$ et $c-b < r' < c+b$) fournit l'expression :

$$2\pi \rho' B(\rho', z) = \mu_0 N I', \text{ soit } \vec{B} = \mu_0 \frac{N I'}{2\pi \rho'} \vec{e}_0.$$

Si le point M est à l'extérieur du tore, $2\pi \rho' B(\rho', z) = 0$, et le champ est donc nul partout à l'extérieur du tore.

b. La surface s'appuyant sur les spires s'appuie sur une hélice de pas très faible. Le flux à travers la surface correspondant à une spire est le flux à travers la projection de l'hélice perpendiculairement à \vec{e}_0 , donc à travers la section carrée du tore pour les N spires :

$$\Phi' = N \mu_0 \frac{N I'}{2\pi} \int_{c-b}^{c+b} 2b \frac{d\rho'}{\rho'} = \mu_0 \frac{N^2 I'}{\pi} b \ln \frac{c+b}{c-b}$$

$$\text{et } L' = \mu_0 \frac{N^2}{\pi} b \ln \frac{c+b}{c-b}$$

A.N. : $L' = 1,35 \text{ mH}$.

3. De la même manière :

$$\Phi = N \mu_0 \frac{I}{2\pi} \int_{c-b}^{c+b} 2b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 N I}{\pi} b \ln \frac{c+b}{c-b}$$

$$\text{et } M = \frac{\mu_0 N}{\pi} b \ln \frac{c+b}{c-b} = \frac{L'}{N}$$

4. Il faut observer que le cylindre infini n'est qu'un modèle, valable loin des extrémités. Il y a forcément un courant de retour, mais à une distance de l'axe (D) très supérieure à $c+b$. (On peut reprendre le cas de l'exercice 6, de « Savoir appliquer le cours »). Le champ du tore étant nul à l'extérieur du tore, le flux du champ B' à travers la surface s'appuyant sur le cylindre et le courant de retour se réduit au flux de B' à travers une section du tore :

$$\Phi'' = \mu_0 \frac{N I'}{2\pi} \int_{c-b}^{c+b} 2b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 N I'}{\pi} b \ln \frac{c+b}{c-b}$$

$$\text{On retrouve bien } M = \frac{\mu_0 N}{\pi} b \ln \frac{c+b}{c-b} = \frac{L'}{N}$$

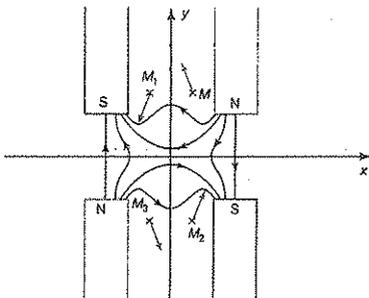
3 1. Si $\vec{B} = B_0 \sin k_0 x \vec{e}_y$, sa divergence est bien nulle, mais son rotationnel vaut $k_0 B_0 \cos k_0 x \vec{e}_z$, non nul alors qu'il n'y a localement aucun courant.

2. On reconnaît dans $\frac{eB}{m}$ la pulsation cyclotron, et $\frac{\lambda}{c}$ a la dimension d'un temps. Le produit des deux est donc sans dimension. Sa valeur est :

$$K = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,4 \times 8 \cdot 10^{-2}}{2\pi \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 3 \cdot 10^8} = 2,98.$$

3. Les symétries des moments magnétiques et du champ sont les mêmes : donc yOz et xOz sont des plans d'antisymétrie pour \vec{B} . O appartient à deux plans d'antisymétrie, donc le champ y est nul.

En $M(x, y, 0)$ et en $M(-x, y, 0)$, symétriques par rapport à yOz les vecteurs sont alors antisymétriques par rapport à ce même plan. Par des considérations analogues, on peut représenter le vecteur B aux points M_1, M_2 et M_3 .



4. On en déduit que $f(-x, y) = +f(x, y)$, et $f(x, -y) = -f(x, y)$; de même : $g(y) = g(-y)$. De plus $f(x, y)$ doit être périodique en x de période λ_0 . La fonction $g(y)$ étant paire, $g'(y)$ est impaire et s'annule donc en $y = 0$.

5. $\text{div} \vec{B} = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x} + B_0 g'(y) \sin k_0 x = 0$.

Soit $f(x, y) = B_0 g'(y) \frac{\cos k_0 x}{k_0} + h(y)$. $\text{rot} \vec{B} = \vec{0}$, donc

$$k_0 B_0 g(y) \cos k_0 x = \frac{\partial f}{\partial y} = B_0 g''(y) \frac{\cos k_0 x}{k_0} + h'(y) :$$

$$g''(y) = k_0^2 g(y) \text{ et } h'(y) = 0.$$

On en déduit $h(y) = \text{Cte} = 0$ puisque $f(x, 0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

$g(y) = \cosh k_0 y$ puisque $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$ et $f(x, y) = B_0 \sin h k_0 y \cos k_0 x$.

$$\vec{B} = B_0 (\sin h k_0 y_0 \cos k_0 x \vec{e}_x + \cos h k_0 y \sin k_0 x \vec{e}_y)$$

Dans le domaine $|y| < 0,2 \text{ mm}$, $|\sin h k_0 y_0 \cos k_0 x|$ reste inférieure à $|\sin h k_0 y_{\text{max}}| = k_0 y_{\text{max}} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ et $\cosh k_0 y \sin k_0 x = \sin k_0 x$ au deuxième ordre près en $k_0 y$. L'expression est donc une bonne approximation, avec une erreur relative de $2,5 \cdot 10^{-4}$.

4. a. On peut décomposer la répartition de moments en une sphère S_0 correspondant à la Terre, de rayon R_T centrée en O , de densité volumique de moment magnétique $\vec{J} = -J \vec{e}_z$ et une sphère S_N correspondant à la cavité, de rayon R_C , centrée en C , de

densité volumique de moment magnétique $-\vec{J} = J \vec{e}_z$. (Rappel : le moment magnétique de la Terre est orienté en sens inverse de l'axe Sud-Nord.)

Le potentiel vecteur en un point Q s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \vec{A}(Q) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\iiint_{S_0} -J \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{PQ}}{PQ^3} d\tau_P + \iiint_{S_C} J \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{PQ}}{PQ^3} d\tau_P \right) \\ &= -\frac{\mu_0 J \vec{e}_z}{4\pi} \left(\iiint_{S_0} \frac{\vec{PQ}}{PQ^3} d\tau_P - \iiint_{S_C} \frac{\vec{PQ}}{PQ^3} d\tau_P \right). \end{aligned}$$

b. On reconnaît un calcul analogue à celui d'un champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée en volume, qui se traite par le théorème de Gauss (voir exercice 3 de « Savoir appliquer le cours ») :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{S_0} \frac{\vec{PQ}}{PQ^3} d\tau_P = \mu_0 \frac{\vec{OQ}}{3} \text{ si } Q \text{ est à l'intérieur de la sphère } S_0.$$

De même $\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{S_C} \frac{\vec{PQ}}{PQ^3} d\tau_P = \mu_0 \frac{\vec{CQ}}{3}$ si Q est à l'intérieur de la sphère S_C .

Si Q est à l'intérieur de la cavité, il est à la fois à l'intérieur des deux sphères, et le potentiel vecteur s'écrit

$$\text{donc : } \vec{A}(Q) = -\mu_0 J \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{OQ}}{3} = \vec{0}.$$

c. Le champ à l'intérieur de la cavité vaut donc

$$\vec{B}(Q) = \text{rot} \vec{A}(Q) = \vec{0} \text{ en tout point de la cavité. La boussole est bien inutile.}$$

2. a. Les points Q de la cavité sont à une distance minimum du centre :

$a - R_C = 3900 - 1500 = 2400 \text{ km} > R_N = 2000 \text{ km}$, donc en dehors de la sphère S_N de centre O et de rayon R_N .

Le potentiel vecteur en un point Q de la cavité s'écrit :

$$\vec{A}(Q) = -\frac{\mu_0 J \vec{e}_z}{4\pi} \wedge \iiint_{S_N} \frac{\vec{PQ}}{PQ^3} d\tau_P.$$

Le calcul de l'intégrale se fait encore avec le théorème de Gauss :

$$\vec{A}(Q) = -\mu_0 J \vec{e}_z \wedge \frac{R_N^3 \vec{OQ}}{3OQ^3},$$

où l'on reconnaît le potentiel vecteur d'un moment magnétique $\vec{M} = -\frac{4\pi}{3} R_N^3 J \vec{e}_z = -M \vec{e}_z$ placé en O . Le

champ magnétique \vec{B} dû à ce champ s'écrit donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \left(\frac{2 \cos \theta \vec{z}_r + \sin \theta \vec{z}_\theta}{r^3} \right)$$

$$\vec{AC} = -R_c (\sin \theta \vec{z}_r + \cos \theta \vec{z}_\theta)$$

b. La projection de \vec{B} sur \vec{AC} s'écrit :

$$3 \frac{\mu_0 M}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{r^3} \right) \text{ avec } r = \frac{a}{\cos \theta},$$

$$\text{soit } 3 \frac{\mu_0 M}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta \cos^4 \theta}{a^3} \right).$$

Dans la première partie du trajet, de A à C, $\theta < 0$, le « Nord » de la boussole indiquera la direction de la rive opposée, mais en C elle ne donnera plus aucune indication. Ensuite, il faudra se diriger vers le « Sud » de la boussole.

5 Partie A

$$1. \delta = \sqrt{\frac{m}{2\pi q^2 \mu_0}} \text{ a la dimension d'une longueur}$$

On peut par exemple remarquer que, d'après le théorème d'Ampère $[\mu_0] = \frac{[B][L]}{[I]}$,

$$\text{donc } [\delta]^2 = \frac{[m][L]}{[L]^{-3}[q]^2[B][L]} = \frac{[m] \left[\frac{q}{T} \right] [L]^2}{[q][qB]}$$

À partir de la force de Lorentz :

$$[qB] = \frac{[F]}{[v]} = [m][T]^{-1} \quad [\delta]^2 = \frac{[m] \left[\frac{q}{T} \right]}{[q] \left[\frac{m}{T} \right]} [L]^2 = [L]^2.$$

A.N. : $\delta = 2,17 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ de l'ordre de grandeur des dimensions atomiques.

2. D'après le théorème d'Ampère,

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = -\frac{\vec{A}}{\delta^2}, \text{ soit :}$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\frac{\vec{B}}{\delta^2}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \text{ donc } \Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\delta^2} = \vec{0}, \text{ et } \lambda = \frac{1}{\delta}.$$

3. Les trois composantes de \vec{B} vérifient $\Delta B_x = \frac{B_x}{\delta^2}$,

$\Delta B_y = \frac{B_y}{\delta^2}$ et $\Delta B_z = \frac{B_z}{\delta^2}$. La solution est unique si les conditions aux limites sont imposées. À la surface du conducteur les conditions sont les mêmes quels que soient y et z, donc la solution ne dépendra ni de y, ni de z.

$\text{div} \vec{B} = 0$, donc $\frac{dB_x}{dx} = 0$, et B_x est une constante.

$$\Delta B_x = \frac{d^2 B_x}{dx^2} = 0 = \frac{B_x}{\delta^2}, \text{ donc } B_x \text{ est nul.}$$

Pour les deux autres composantes, les solutions sont de la forme $B_1 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + B_2 \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right)$. Le champ devant rester fini, les solutions sont de la forme

$$B_{y,z} = B_{y,z}(0) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right), \text{ soit } \vec{B} = B_z(0) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \vec{z}_z$$

puisque $B_y(0)$ est nul d'après l'énoncé.

$$4. \text{rot} \vec{B} = -\frac{dB_z}{dx} \vec{z}_y = \mu_0 \vec{j}, \text{ soit } \vec{j} = \frac{B_z(0)}{\mu_0 \delta} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \vec{z}_y$$

5. La force de Laplace sur ces courants a une densité volumique $\vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{B_z^2(0)}{\mu_0 \delta} \exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right) \vec{z}_x$, soit, par unité de surface, en sommant sur x de 0 à l'infini :

$$\int_0^\infty \frac{B_z^2(0)}{\mu_0 \delta} \exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right) dx \vec{z}_x = \frac{B_z^2(0)}{2\mu_0} \vec{z}_x.$$

Le champ extérieur exerce donc une pression $P = \frac{B_z^2(0)}{2\mu_0}$ dirigée vers l'intérieur du supraconducteur.

Partie B. 1. les résultats précédents seront valables à l'échelle macroscopique, si, à l'échelle de la distance caractéristique δ on peut considérer la surface comme plane, l'épaisseur comme infinie, et le champ extérieur uniforme :

a. le champ magnétique est nul dans le supraconducteur ;

b. la composante de \vec{B} perpendiculaire à la surface s'annule à la frontière ;

c. il y a une densité surfacique de courant :

$$\vec{j} = \int_0^\infty \vec{j} dx = \int_0^\infty \frac{B_z(0)}{\mu_0 \delta} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \vec{z}_y = \frac{B_z(0)}{\mu_0} \vec{z}_y \wedge \vec{z}_x.$$

\vec{z}_x est dirigé vers l'intérieur du supraconducteur, donc

$$\vec{z}_x = -\vec{n}, \text{ et } \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{n} \wedge \vec{B}_z(0);$$

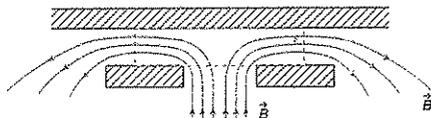
d. le champ magnétique exerce une pression $P = \frac{B_z^2}{2\mu_0}$ vers l'intérieur du conducteur (force répulsive).

2. Le flux de \vec{B} est conservatif : en prenant une surface limitée par un cylindre de rayon r, la surface S et la surface du supraconducteur, il n'y a pas de flux à travers la surface du supraconducteur, donc $2\pi r h B_r = \Phi$, soit

$$\vec{B}(r) = \frac{\Phi}{2\pi h r} \vec{z}_r$$

La pression sur le supraconducteur dépend de r et vaut

$$P = \frac{B_r^2}{2\mu_0} = \frac{\Phi^2}{8\pi^2 r^2 h^2 \mu_0}$$



La force répulsive exercée à l'aplomb de l'anneau vaut donc :

$$\vec{F} = \int_a^b \frac{\Phi^2}{8\pi^2 h^2 r^2 \mu_0} 2\pi r dr \vec{e}_z = \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 h^2} \ln \frac{b}{a} \vec{e}_z$$

Le calcul sera valable si h est suffisamment petit pour que l'on puisse négliger l'action du champ magnétique dans les zones où les lignes de champ ne sont pas « resserrées » entre les deux supraconducteurs : $h \ll a$.

3. À l'équilibre,

$$\frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 h^2} \ln \frac{b}{a} = Mg, \text{ soit :}$$

$$h_0 = \Phi \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{4\pi\mu_0 Mg}} = \frac{\Phi \sqrt{2}}{\sqrt{4\pi\mu_0 Mg}}$$

A.N. : $h_0 = 1,0 \text{ cm}$.

Si h augmente, la pression diminue, et le matériau redescend. L'équilibre est donc stable.

Au voisinage de l'équilibre, la force de pression peut s'écrire

$$\frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 h^2} \ln \frac{b}{a} = Mg \frac{h_0^2}{h^2} = Mg \left(1 - 2 \frac{h-h_0}{h_0}\right)$$

L'équation mécanique s'écrit donc

$$M \frac{d^2(h-h_0)}{dt^2} = -2Mg \frac{h-h_0}{h_0}, \text{ ce qui donne une période}$$

des oscillations :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h_0}{2g}} = 0,14 \text{ s}$$

6. 1. On retrouve le calcul déjà fait précédemment : la densité volumique est uniforme et vaut $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z$,

donc d'après le théorème d'Ampère, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta$.

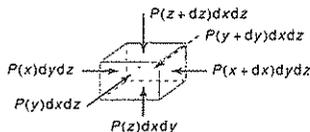
2. D'après l'expression de la densité volumique de force de Laplace $\vec{j} \wedge \vec{B}$:

$$d\vec{F}_n = \frac{I}{\pi R^2} dr \vec{e}_z \wedge \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta = -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} r dr d\theta dz \vec{e}_r$$

Cette force est dirigée suivant $-\vec{e}_r$, et tend donc à s'opposer à l'expansion radiale de la colonne.

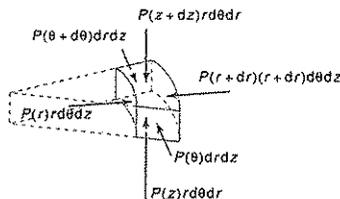
$$3. \frac{d\vec{F}_p}{d\tau} = -\vec{\text{grad}} P \text{ (voir ci-dessous)}$$

$$\text{soit } d\vec{F}_p = -\vec{\text{grad}} P r dr d\theta dz.$$



$$d\vec{F}_p = -\vec{\text{grad}} P dx dy dz = -\vec{\text{grad}} P d\tau$$

Conseil : si l'on fait le raisonnement en coordonnées cylindriques, il ne faut pas oublier la composante suivant \vec{e}_r , de la force pressante qui s'exerce sur les faces orthogonales à \vec{e}_θ , et qui vaut $P dr d\theta dz$.



$$d\vec{F}_p = \left[-\frac{d}{dr}(rP) \frac{1}{r} r d\theta dz + P dr d\theta dz \right] \vec{e}_r - \frac{dP}{dz} (r d\theta dr dx) \vec{e}_z - \frac{dP}{d\theta} \frac{1}{r} r d\theta dr dz \vec{e}_\theta$$

$$d\vec{F}_p = \vec{e}_r \left[-\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r P}{\partial r} \right) r d\theta dz + P dr d\theta dz \right] - \vec{e}_z \frac{\partial P}{\partial z} r d\theta dr dz - \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} r dr d\theta dz = -\vec{\text{grad}} P (r dr d\theta dz)$$

L'équilibre de l'élément de volume s'écrit donc :

$$\vec{\text{grad}} P = -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} \vec{e}_r, \text{ soit } \frac{dP}{dr} = -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4}, \text{ et}$$

$$P(r) = \frac{\mu_0 I^2 (R^2 - r^2)}{4\pi^2 R^4} \text{ puisque la pression s'annule à l'extérieur de la colonne de plasma.}$$

4. D'après la condition d'équilibre thermodynamique à

la température T , $n(r) = \frac{\mu_0 I^2 (R^2 - r^2)}{4\pi^2 R^4 k T}$, et N vaut

$$N = \int_0^R n(r) 2\pi r dr = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 (R^2 - r^2)}{2\pi R^4 k T} r dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R^4 k T} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi k T}$$

5. Si l'énergie cinétique moyenne est de 100 keV, et que l'on peut négliger l'énergie cinétique due au mouvement d'ensemble devant l'énergie cinétique d'agitation thermique : $\frac{3}{2} k T = 100 \cdot 10^3 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Si la densité

volumique moyenne est $n = 1,0 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$,
 $N = \pi R^2 n = \pi 10^{-2} \times 10^{21} = 3,14 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-1}$

$$I = \sqrt{\frac{8\pi k T N}{\mu_0}} = \sqrt{2 \cdot 10^7 \times \frac{2}{3} 100 \times 1,6 \cdot 10^{-16} \times 3,14 \cdot 10^{19}} \\ = 2,04 \cdot 10^6 \text{ A.}$$

Remarque : cela correspond à une vitesse de déplacement d'environ $v = \frac{I}{ne} = \frac{I}{\pi R^2 ne} = 3,75 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à une énergie cinétique de translation de l'ordre de $\frac{1}{2} n v^2 = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \times (3,75 \cdot 10^5)^2}{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,4 \text{ eV}$ pour les électrons, et de l'ordre du keV pour les ions. L'énergie cinétique des particules est donc essentiellement sous forme d'agitation thermique.

7. 1. Pour un solénoïde infini, $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$, avec

$$\cos \alpha_1 = 1 \text{ et } \cos \alpha_2 = -1, \text{ donc } k = \frac{1}{2}.$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{2} \left(\frac{z+L}{\sqrt{(L+z)^2 + R^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \vec{e}_z \\ = \frac{\mu_0 n i}{2} \left(\left(1 + \frac{R^2}{(z+L)^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \vec{e}_z = \frac{\mu_0 n i}{2} \left(\frac{R^2}{2z^2} \right) \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{4\pi} \left(\frac{\pi R^2}{z^2} \right) \vec{e}_z, \text{ soit } q_m = n\pi R^2 i.$$

2. En un point M sur la partie positive de l'axe Oz les $d\zeta$ moments dipolaires placés sur la longueur $d\zeta$ de l'axe contribuent au champ $\vec{E}(M)$ par :

$$d\vec{E}(M) = \frac{2p d\zeta}{4\pi\epsilon_0 d(z-\zeta)^3} \vec{e}_z,$$

et donc le champ total s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \int_{-\infty}^0 \frac{2p d\zeta}{4\pi\epsilon_0 a(z-\zeta)^3} \vec{e}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a z^2} \vec{e}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z^2} \vec{e}_z.$$

La distribution de charges est équivalente à une charge unique $+q$ placée en O , et une charge $-q$ située infiniment loin sur la partie négative de l'axe Oz , et dont l'influence est donc négligeable en M .
 q représente le moment dipolaire par unité de longueur.

3. Le moment magnétique associé à une spire s'écrit $\vec{M} = \pi R^2 I \vec{e}_z$. L'ensemble du solénoïde est donc équivalent à une suite de moments magnétiques répartis sur la partie négative de l'axe Oz , $n\pi R^2 I \vec{e}_z$, représentant le moment magnétique par unité de longueur. L'analogie avec la distribution électrostatique précédente permet d'écrire que le champ au point M est le même que celui d'une « charge magnétique » q_m placée en O , et que, donc :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi OM^3} \vec{OM} = \frac{\mu_0 n\pi R^2 I}{4\pi OM^3} \vec{OM}$$

4. Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge m\vec{v}) = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} \\ = q\vec{OM} \wedge \left(\vec{v} \wedge \frac{\mu_0 q_m}{4\pi OM^3} \vec{OM} \right).$$

5. $\vec{OM} = r\vec{e}_r$, et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$, soit :

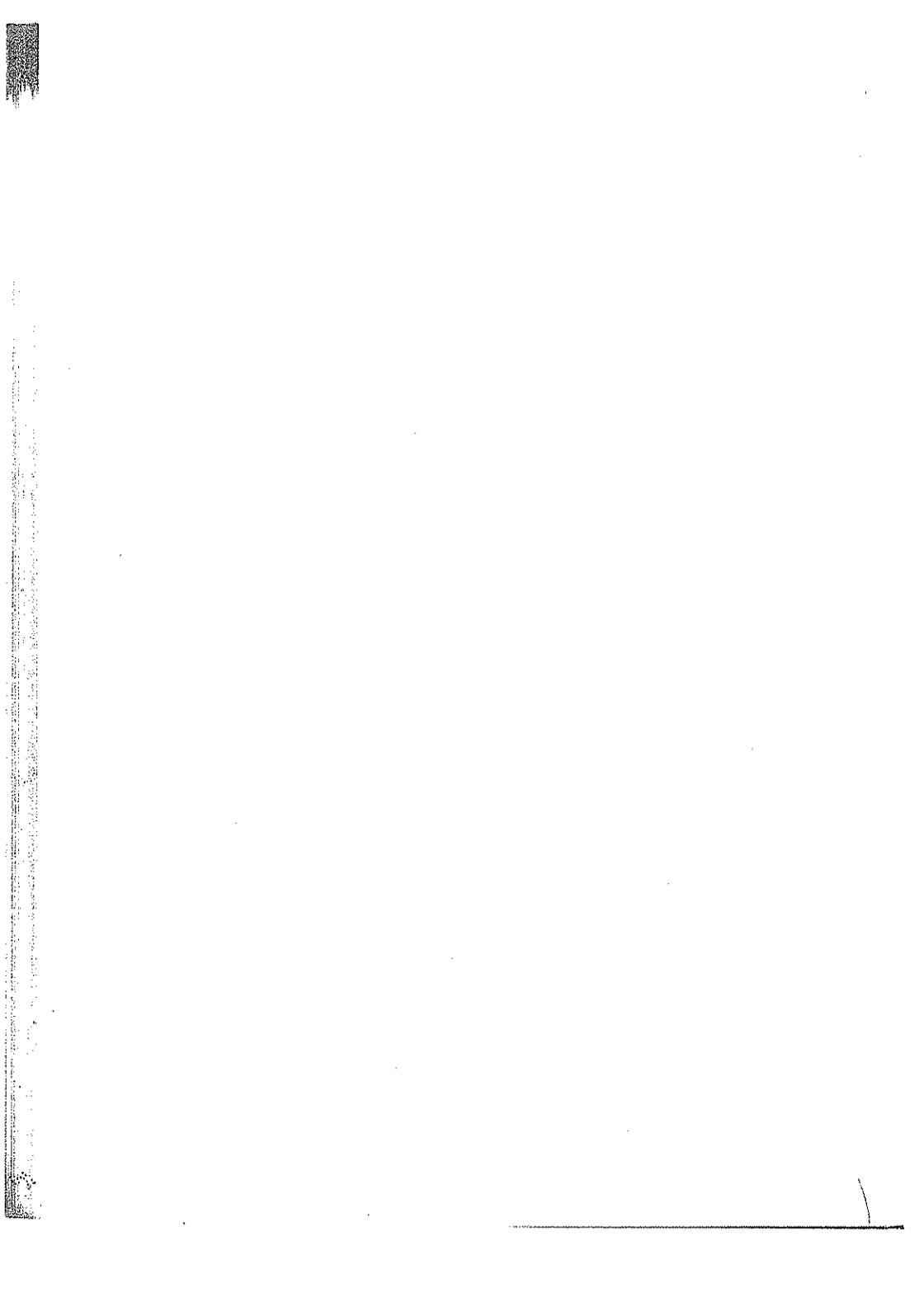
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = qr\vec{e}_r \wedge \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \wedge \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \vec{e}_r \right) \\ = \frac{\mu_0}{4\pi} qq_m \left(\vec{e}_r \wedge \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \wedge \vec{e}_r \right) \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} qq_m \frac{d\vec{e}_r}{dt}.$$

En posant $\vec{S} = -\frac{\mu_0}{4\pi} qq_m \vec{e}_r$, $\frac{d(\vec{L}_O + \vec{S})}{dt} = \frac{d\vec{L}_g}{dt} = \vec{0}$

$\vec{L}_g = \vec{L}_O - \frac{\mu_0}{4\pi} qq_m \vec{e}_r = m\vec{r} \wedge \vec{v} - \frac{\mu_0}{4\pi} qq_m \vec{e}_r$ est une intégrale première du mouvement puisque c'est un vecteur constant ne dépendant que de \vec{r} et \vec{v} .

6. La projection de \vec{e}_r sur le vecteur constant \vec{L}_g vaut $-\frac{\mu_0}{4\pi} qq_m$, et est donc constante. L'angle α entre les deux vecteurs est tel que $\cos \alpha = \frac{-\frac{\mu_0}{4\pi} qq_m}{\|\vec{L}_g\|}$; indépendant du

temps. Le mouvement s'effectue sur un cône de sommet O , centré sur la valeur de \vec{L}_g calculée à partir des conditions initiales, et d'angle au sommet α , angle que font à l'instant initial le rayon vecteur et \vec{L}_g .



Les équations de Maxwell

1 Équations de Maxwell

1.1. Forme locale des équations de Maxwell dans le vide

Les équations de Maxwell sont les équations qui permettent de déterminer les champs magnétiques et électriques en régime quelconque, à partir des distributions de charges et de courants. Elles sont valables à chaque instant et en tout point. On peut montrer que ces équations s'appliquent de même aux grandeurs macroscopiques, en prenant pour sources les grandeurs « nivelées » définies dans les chapitres précédents, correspondant à des moyennes sur des temps courts à l'échelle macroscopique, mais longs par rapport aux évolutions désordonnées de l'agitation thermique, et sur des distances grandes devant le libre parcours moyen, mais petites à l'échelle macroscopique.

- Équation de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- Équation de conservation du flux magnétique : $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
- Équation de Maxwell-Faraday : $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- Équation de Maxwell-Ampère : $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Comme on l'a vu précédemment, ces équations, avec \vec{E} et \vec{B} qui tendent vers 0 à l'infini au moins en $\frac{1}{r^2}$, suffisent à déterminer entièrement les champs électriques et magnétiques.

On voit que, sauf en régime permanent, les champs \vec{E} et \vec{B} sont couplés : on parle alors du champ électromagnétique.

1.2. Forme intégrale des équations de Maxwell

Équation de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$: le théorème de Gauss est valable à chaque instant.

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$, \vec{B} est toujours à flux conservatif : $\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$.

Équation de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} : \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Ici Φ est le flux de \vec{B} à travers le circuit Γ , indépendant du choix de la surface S choisie pour le calculer puisque \vec{B} est à flux conservatif.

Équation de Maxwell-Ampère : $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$. Quelle que soit la

courbe fermée Γ : $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$, c'est la nouvelle expression du théorème d'Ampère.

Si l'on écrit l'équation de conservation de la charge : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$,

on en déduit $\operatorname{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$.

$\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est un champ de rotationnel. Il faut donc ajouter $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ à la densité volumique de courant pour que l'équation de Maxwell-Ampère soit compatible avec la conservation de la charge.

$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est appelé *courant de déplacement*.

2 Équations de Maxwell dans les milieux

2.1. Forme générale des équations de Maxwell

Lorsque les sources de champ ρ et \vec{j} sont des données macroscopiques directement accessibles, charges d'un condensateur, courants de conduction dans un métal, etc., aussi appelés *charges et courants « libres »*, les équations de Maxwell précédentes sont appelées équations de Maxwell dans le vide.

En présence de milieux matériels, diélectrique, milieux magnétiques, il faut tenir compte des inhomogénéités de charges et des mouvements de charge provoqués par les déplacements des charges non accessibles directement : *charges et courants « liés »*.

Les équations de Maxwell sont encore valables dans les milieux, mais à condition de tenir compte de ces sources « liées ».

• Équation de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho_{\text{lié}}}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$

• Équation de conservation du flux magnétique : $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

• Équation de Maxwell-Faraday : $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

• Équation de Maxwell-Ampère : $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left[(\vec{J} + \vec{J}_{\text{lié}}) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$

Il faut alors connaître en plus les relations constitutives du milieu, liant les sources « liées » aux champs.

PC

2.2. Application aux milieux diélectriques

2.2.1. Modélisation d'un diélectrique parfait

Un diélectrique est un isolant. On considère qu'il ne possède pas de charges libres, et donc pas de courant de conduction. Ses propriétés électriques sont alors dues aux charges liées et à leur déplacement, elles sont décrites à l'aide du vecteur polarisation. Ces charges « liées » sont les noyaux des atomes et les nuages électroniques qui les entourent.

Sous l'action d'un champ électrique, les noyaux et les électrons se déplacent en sens contraire, et, à l'échelle mésoscopique, chaque élément de volume $d\tau$ de matière acquiert un moment dipolaire $\vec{P} d\tau$, où \vec{P} est appelée **polarisation** du milieu. La relation constitutive du milieu sera alors la relation $\vec{P}(\vec{E})$.

2.2.2. Charges et courants de polarisation

$\vec{P} d\tau = (\rho_+ \vec{r}_+ + \rho_- \vec{r}_-) d\tau$, où ρ_+ et ρ_- sont les densités volumiques des charges liées positives et négatives du volume $d\tau$ en l'absence d'excitation ($\rho_+ = -\rho_-$) et \vec{r}_+ et \vec{r}_- le déplacement de leur barycentre sous l'action du champ électrique.

Si le champ électrique varie, il y aura une densité volumique de courant, dit **courant de polarisation**,

$$\vec{J}_p = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_- = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

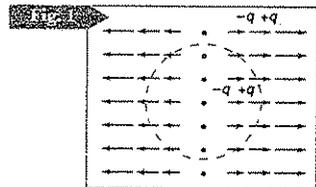
Le déplacement des charges $\rho_+ d\tau$ et $\rho_- d\tau$ fait que certaines charges entrent dans le volume $d\tau$ et que d'autres en sortent (figure 1) : la charge intérieure au volume $d\tau$ devient alors $\rho_p d\tau$, où ρ_p est la densité volumique de **charges de polarisation**.

L'équation de la conservation de la charge s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J}_p = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{P}$$

$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_p + \operatorname{div} \vec{P}) = 0$. En l'absence de polarisation $\rho_p = 0$: $\rho_p + \operatorname{div} \vec{P} = 0$, soit $\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}$.

La neutralité globale du diélectrique est évidemment conservée. D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, $\iiint_V -\operatorname{div} \vec{P} d\tau = -\iint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS$.



La charge de polarisation d'un volume est compensée par une distribution surfacique de charges de polarisation $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$.

Dans un diélectrique de polarisation \vec{P} , $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, $\rho_p = -\text{div} \vec{P}$ et $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$.

Les propriétés électriques d'un milieu diélectrique peuvent être décrites de manière équivalente à partir d'une répartition de moments dipolaires de densité volumique \vec{P} ou d'une répartition de charges de densité volumique $\rho_p = -\text{div} \vec{P}$ et de densité surfacique $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$.

2.2.3. Équations de Maxwell dans un diélectrique

On pose $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. $\text{div} \vec{D} = \rho + \rho_p + \text{div} \vec{P} = \rho$.

$$\bullet \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \text{div} \vec{D} = \rho \quad \bullet \text{div} \vec{B} = 0$$

$$\bullet \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \bullet \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \right] = \mu_0 \left[\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right]$$

L'étude de la réaction des charges au champ local permet d'obtenir, pour chaque type de diélectrique, la relation entre \vec{P} et \vec{E} .

2.2.4. Équations de Maxwell dans un diélectrique homogène, linéaire et isotrope (HLI)

Dans un diélectrique HLI, la polarisation est proportionnelle au champ électrique : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, où χ est la susceptibilité diélectrique du milieu, sans dimension.

On obtient alors les mêmes équations que dans le vide à condition de remplacer partout $\epsilon_0 \vec{E}$ par $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$, où ϵ_r est la permittivité relative du milieu.

Remarque : en l'absence de charges libres, $\text{div} \vec{D} = 0$, et donc $\text{div} \vec{E} = 0$: il n'y a pas de charges de polarisation dans le volume d'un diélectrique HLI. Il n'y aura que des charges surfaciques, à l'interface entre le diélectrique et un autre milieu.

Remarque

C'est vrai aussi en régime permanent, ce qui explique que dans un diélectrique, pour une même répartition de charges libres, le champ \vec{E} soit divisé par ϵ_r et que la capacité d'un condensateur avec diélectrique soit multipliée par ϵ_r .

3 Conséquences des équations de Maxwell

3.1. Relations de passage à travers une interface

3.1.1. Discontinuité de \vec{E} à la traversée d'une répartition superficielle de charges σ

$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ est fini, donc le résultat établi en régime permanent

reste valable en régime quelconque : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$.

3.1.2. Discontinuité de \vec{B} à la traversée d'une répartition superficielle de courants \vec{j}_s

$\text{div} \vec{B} = 0$ et $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est fini, donc le résultat établi en régime permanent reste valable en régime quelconque : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$.

3.1.3. Cas particulier du conducteur parfait

En électromagnétisme, un conducteur est dit « parfait » si sa conductivité γ est considérée comme infinie.

La puissance volumique cédée par effet Joule aux charges mobiles s'écrivant $P = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma E^2$ ne peut être infinie sur un volume non nul. Donc \vec{E} est nul dans un conducteur parfait.

$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$, donc le champ \vec{B} est constant.

Les relations de définition du champ électromagnétique étant linéaires, on peut le décomposer en une partie statique et une partie dépendante du temps, pour laquelle \vec{E} et \vec{B} seront nuls dans le conducteur.

Au voisinage d'un conducteur parfait, $\vec{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{n}$ et $\vec{B}(t) = \mu_0 \vec{j}_s(t) \wedge \vec{n}$ où \vec{n} est la normale au conducteur dirigée vers l'extérieur.

3.1.4. Traversée d'une interface entre deux diélectriques

Si les diélectriques sont supposés parfaits, il n'y a pas de charge libre à l'interface. Les discontinuités proviennent des charges liées.

$\text{div} \vec{D} = \rho$ et $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: il y a donc continuité de la composante normale de $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, et de la composante tangentielle de \vec{E} .

$\text{div} \vec{B} = 0$ et $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right]$: \vec{B} est continu à la traversée de l'interface entre les deux diélectriques.

À la traversée d'une interface entre deux diélectriques parfaits, \vec{B} est continu, et

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \left[\frac{(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)}{\epsilon_0} \cdot \vec{n}_{12} \right] \vec{n}_{12}$$

Remarque: on retrouve qu'à la surface d'un diélectrique de polarisation \vec{P} il y a une densité surfacique de charges liées $\sigma_{\text{lie}} = -\vec{P} \cdot \vec{n}$ où \vec{n} est la normale au diélectrique dirigée vers l'extérieur.

À la traversée d'une interface entre deux diélectriques HLI :

$$\vec{E}_{2T} - \vec{E}_{1T} = \vec{0}, \quad \epsilon_{r2} \vec{E}_{2N} - \epsilon_{r1} \vec{E}_{1N} = \vec{0}$$

3.2. Potentiels vecteur et scalaire

3.2.1. Définition du potentiel vecteur

$\text{div} \vec{B} = 0$, donc \vec{B} est un champ de rotationnel. Il dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Ce potentiel est défini à un gradient près, puisque le rotationnel d'un gradient est nul.

3.2.2. Définition du potentiel scalaire

$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Avec $\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$, $\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$.

$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ dérive donc d'un potentiel scalaire V : $\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{r}, t) = -\text{grad} V(\vec{r}, t)$.

3.2.3. Choix de la jauge

$\vec{A}(\vec{r}, t)$ est défini à un gradient près. Le potentiel V dépend du choix fait pour \vec{A} .

Si l'on choisit $\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \text{grad} \Psi(\vec{r}, t)$, il faudra prendre comme potentiel scalaire V' , tel que :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{r}, t) + \text{grad} \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ &= -\text{grad} V + \text{grad} \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\text{grad} V'(\vec{r}, t), \end{aligned}$$

$$\text{soit } \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \text{grad} \Psi(\vec{r}, t) \quad V'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}, t) - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Faire le choix d'un couple (\vec{A}, V) s'appelle « choisir une jauge ». Le choix de la jauge revient à faire un choix pour $\text{div} \vec{A}$. On la choisit compatible avec le choix habituel $\text{div} \vec{A} = 0$ en régime permanent.

- Jauge de Coulomb : $\text{div} \vec{A} = 0$.
- Jauge de Lorentz : $\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

3.3. Équations des potentiels

3.3.1. Expression avec la jauge de Lorentz

En remplaçant \vec{E} et \vec{B} par leurs expressions en fonction des potentiels, on obtient :

$$\bullet \text{div} \left(-\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\bullet \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

Remarque

L'opérateur
 $\square = \Delta - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$
 $= \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

appelé d'Alembertien peut être considéré comme la généralisation à quatre dimensions du Laplacien, la variable temporelle s'exprimant sous la forme ict.

Remarque

Les solutions en $t + \frac{PM}{c}$, correspondant à des potentiels avancés, existent mathématiquement mais ne vérifient pas le principe de causalité : un événement donné ne peut être la conséquence d'événements qui lui sont antérieurs.

Avec la jauge de Lorentz :

$$\Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \square V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \vec{\Delta} \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}.$$

On pose $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, où c est une vitesse qui sera interprétée comme la célérité de la lumière dans le vide, ou vitesse maximum de transmission des informations.

3.3.2. Solution des potentiels retardés

La solution générale de ces équations de potentiels s'écrit :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}\left(t - \frac{PM}{c}\right) d\tau_P}{PM}, \quad \text{et} \quad V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(t - \frac{PM}{c}\right) d\tau_P}{PM}.$$

Ces solutions sont appelées potentiels retardés, car elles correspondent aux expressions trouvées en régime permanent, mais en faisant intervenir les sources à l'instant antérieur $t - \frac{PM}{c}$, où $\frac{PM}{c}$ représente le temps mis par l'information dans le vide pour parcourir la distance PM . La valeur du champ en M ne fait donc intervenir que l'état des sources en P à l'instant $t - \frac{PM}{c}$, ce qui est conforme au principe que la propagation des informations ne peut pas se faire à une vitesse supérieure à c .

4 Approximation des régimes quasi-stationnaires

4.1. Approximation des régimes quasi-stationnaires : A.R.Q.S.

Dans le cadre de cette approximation, on considère que le temps caractéristique de l'évolution des sources du champ électromagnétique est suffisamment grand devant $\frac{PM}{c}$ pour que l'expression des potentiels soit la même qu'en régime permanent. On pourra faire cette approximation dans des régimes lentement variables, ou des circuits de petite taille : circuits classiques typiquement jusqu'à des fréquences de l'ordre du MHz (générateurs BF). Au-delà, il faudra tenir compte des phénomènes de propagation (ondes radio).

4.2. Équations de l'électromagnétisme dans le cadre de P.A.R.Q.S

• \vec{A} a la même expression qu'en régime permanent : à chaque instant, le champ magnétique \vec{B} se calcule comme en régime permanent, mais il est maintenant variable au cours du temps.

L'équation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ devient donc $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

Écrire le théorème d'Ampère comme en régime permanent revient à négliger le courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant \vec{j} . Dans un conducteur de conductivité γ , cela revient à négliger $\frac{\epsilon_0 \partial \vec{E}}{\gamma \partial t}$ devant \vec{E} , vérifié si le temps caractéristique des variations du champ est grand devant le temps de relaxation $\frac{\epsilon_0}{\gamma}$ du conducteur (de l'ordre de 10^{-15} s).

◦ Le potentiel électrostatique a la même expression qu'en régime permanent, mais le champ électrique s'écrit maintenant :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Ce terme supplémentaire est à la base des phénomènes d'induction traités dans le chapitre suivant.

◦ $\text{div}(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$: les lignes de courant sont encore fermées à condition de remplacer le courant de conduction, là où il est nul, par le courant de déplacement : entre les armatures d'un condensateur par exemple.

▶ Ailleurs, le courant de déplacement sera négligeable : $\text{div} \vec{j} = 0$ presque partout.

4.3. Application à l'effet de peau dans un conducteur ohmique

On considère un conducteur ohmique immobile de conductivité γ , parcouru par une densité volumique de courant à variation sinusoïdale au cours du temps :

$$\vec{j} = \vec{j}(x, y, z) \cos \omega t, \text{ et donc } \vec{E} = \vec{E}(x, y, z) \cos \omega t.$$

Pour déterminer le champ électrique en régime forcé à l'intérieur du conducteur, on élimine le champ magnétique entre les équations de Maxwell. Il suffit pour cela de prendre le rotationnel du rotationnel de \vec{E} :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}{\partial t}$$

Le milieu est ohmique, et on se place dans l'A.R.Q.S. : $\vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

La loi de conservation de la charge dans un conducteur ohmique s'écrit : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma \rho}{\epsilon_0} = 0$.

En régime forcé, les solutions cherchées sont sinusoïdales à la pulsation ω , incompatibles avec une équation de relaxation. La seule solution est $\rho = 0$.

• En régime forcé, $\rho = 0$, et donc $\text{div} \vec{E} = 0$: les charges sont surfaciques.

• L'équation du champ dans le conducteur est donc : $\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

On reconnaît une équation de diffusion : on cherche des solutions sous la forme $\vec{E} = \underline{\vec{E}}(x, y, z)e^{i\omega t}$: $\Delta \vec{E} = j\omega\mu_0\gamma \vec{E}$.

En posant $\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}} = \frac{1}{\delta}$, $\Delta \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\delta^2}(1+j)^2$.

Si \vec{E} est de la forme $\vec{E} = \underline{E}(z)e^{i\omega t} \vec{e}_x$, $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{e}_x$.

$\delta = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}$ est appelée *épaisseur de peau*. C'est la distance caractéristique de pénétration du champ à l'intérieur du volume du conducteur.

Exemple : pour le cuivre de conductivité $5,98 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, $\delta = 9,2 \text{ mm}$ pour 50 Hz, 2 mm pour 1 kHz, $65 \mu\text{m}$ pour 1 MHz.

En remarquant que $\delta \rightarrow 0$ quand la conductivité tend vers l'infini, on retrouve que pour un conducteur parfait, le champ électrique est nul dans le conducteur.

Les courants de conduction de densité volumique $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ n'existeront également que sur cette épaisseur. Pour un conducteur parfait, ils seront surfaciques.

5 Bilan d'énergie électromagnétique

5.1. Puissance cédée aux charges libres par le champ électromagnétique

5.1.1. Expression générale

La force électromagnétique $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ s'exerçant sur une charge q de vitesse \vec{v} fournit à cette charge la puissance $q\vec{E} \cdot \vec{v}$. À l'échelle macroscopique, $q\vec{v} \rightarrow \vec{j}d\tau$, il y a donc une puissance volumique $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ cédée par le champ aux charges mobiles.

5.1.2. Cas des conducteurs ohmiques

$\vec{j} = \gamma \vec{E}$, la densité volumique de puissance cédée aux charges s'écrit donc :

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma E^2.$$

Les charges ayant atteint une vitesse limite, cette énergie fournie aux charges est transmise au réseau qui la dissipe sous forme de chaleur : c'est la densité volumique d'effet Joule.

5.2. Identité de Poynting

On transforme l'expression précédente en utilisant les équations de Maxwell :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \left(\frac{\text{rot} \vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E}.$$

$$\cdot \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B},$$

$$\text{donc } \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = -\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) + \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) - \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

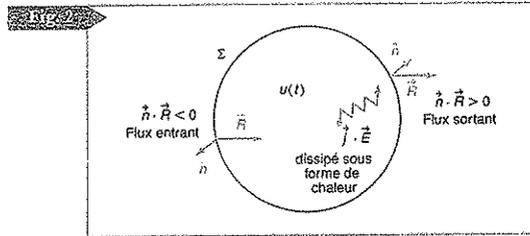
$$\text{Soit : } \vec{j} \cdot \vec{E} + \operatorname{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0$$

5.3. Interprétation de l'identité de Poynting

5.3.1. Équation bilan d'énergie

Si l'on appelle $u(P, t)$ la densité volumique d'énergie au point P à l'instant t , l'énergie comprise dans un volume V limité par la surface fermée Σ à l'instant t (figure 2) s'écrit :

$$\mathcal{E}(t) = \iiint_V u(P, t) d\tau_P, \text{ et à l'instant } t + dt, \mathcal{E}(t + dt) = \iiint_V u(P, t + dt) d\tau_P.$$



Cette énergie est égale à $\mathcal{E}(t)$ diminuée de l'énergie qui, pendant le temps dt , est sortie du volume en traversant la surface Σ (que l'on peut représenter comme le flux d'un vecteur densité de courant énergétique \vec{R} (que l'on note aussi souvent $\vec{\Pi}$) à travers la surface Σ) et de l'énergie perdue dans le milieu :

$$\iiint_V u(P, t + dt) d\tau_P = \iiint_V u(P, t) d\tau_P - \oint_{\Sigma} \vec{R} \cdot d\vec{S} dt - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau_P dt.$$

En transformant avec la formule de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau_P = -\iiint_V \operatorname{div} \vec{R} d\tau_P - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau_P,$$

$$\text{soit l'équation locale de bilan : } \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{R} = -\vec{j} \cdot \vec{E}.$$

5.3.2. Équation de conservation

$$\text{L'identité de Poynting s'écrit } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \operatorname{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\vec{j} \cdot \vec{E}.$$

En comparant avec l'équation locale de conservation précédente, on reconnaît une équation de bilan local d'énergie électromagnétique :

- $u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ s'interprète comme la densité volumique d'énergie électromagnétique.

- Le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ s'interprète comme le vecteur densité volumique de courant énergétique.

- L'équation bilan s'écrit : $\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{R} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$.

5.3.3. Forme intégrale de l'équation de Poynting

Si l'on intègre sur un volume V entouré par une surface fixe Σ , on obtient en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau + \iint_{\Sigma} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S} = -\iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Le flux du vecteur de Poynting sortant d'une surface fermée représente la puissance électromagnétique qui traverse cette surface de l'intérieur vers l'extérieur.

Avant la colle

Tester ses connaissances

> Corrigés p. 124

- 1 Vérifier l'homogénéité de la jauge de Lorentz :

$$\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

- 2 Dans une région de l'espace où il n'y a pas de sources de champ, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{0}$ et $\Delta V = 0$.

Les solutions pour \vec{A} et V sont indépendantes entre elles et ne dépendent que des conditions aux limites.

a. Vrai. b. Faux.

- 3 Soit un conducteur ohmique, de conductivité γ .

a. À partir de l'équation de conservation de la charge, établir l'équation différentielle vérifiée par la densité de charge ρ .

b. En déduire le temps de relaxation du cuivre sachant que sa conductivité vaut $58 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Comparer à la valeur expérimentale $4 \cdot 10^{-15} \text{ s}$. Pourquoi ces résultats sont-ils discordants ?

c. Montrer que si le conducteur est soumis à un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω , la densité volumique de charge ρ à cette fréquence (régime forcé) y est nulle.

- 4 À quelle condition peut-on intervertir la dérivation par rapport au temps et les opérateurs différentiels ?

- 5 Si le vecteur de Poynting est considéré comme la densité volumique de courant d'énergie électromagnétique, on interprète son flux à travers une surface ouverte S comme la puissance électromagnétique traversant cette surface de la face Sud vers la face Nord.

Pourrait-on envisager d'autres expressions pour le vecteur densité de courant énergétique, *a priori* tout aussi valables ? Qu'est-ce qui permet de trancher en faveur de $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$?

Savoir appliquer le cours

> Corrigés p. 124

- 1 Rappel : $\operatorname{div} U \vec{V} = U \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} U$.

Donner l'expression du potentiel $V(M)$ créé en M par un diélectrique de volume D , de polarisation $\vec{P}(P)$. Montrer que l'on obtient la même expression à partir d'une répartition de charges de densité volumique $\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}$ et de densité surfacique $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$.

- 2 Donner l'équation différentielle vérifiée par les potentiels \vec{A} et V en utilisant la jauge de Coulomb.
En déduire l'expression de K .

- 3 On donne $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arccosh} x$, et, en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div}(A(r) \vec{e}_z) = \vec{e}_r \cdot \frac{dA(r)}{dr}$$

$$\operatorname{rot}(A(r) \vec{e}_z) = \vec{e}_r \wedge \left(\frac{dA(r)}{dr} \vec{e}_z \right).$$

Soit un fil rectiligne infini parcouru par un courant uniforme $I(t)$, tel que :
si $t < 0$, $I = 0$, si $t \geq 0$, $I > 0$.

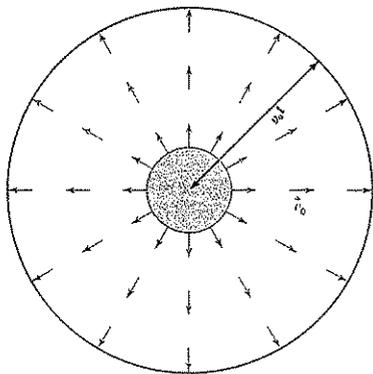
a. Déterminer $\vec{A}(\vec{r}, t)$, $V(\vec{r}, t)$.

b. En déduire les champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

c. Calculer le vecteur de Poynting et en déduire la puissance rayonnée à chaque instant par l'unité de longueur du fil.

d. Ce modèle est-il pertinent ? Pourquoi ?

- 4 Soit une sphère radioactive initialement neutre, de centre O , de rayon a . Elle émet des charges électriques de façon isotrope, avec une vitesse initiale v_0 (on négligera toute action sur les charges émises). On choisira l'origine des temps de sorte qu'une particule émise à l'instant initial se trouve, à l'instant t , à la distance $v_0 t$ du point O (si $t < \frac{a}{v_0}$, aucune particule n'est sortie de la sphère).



a. Déterminer à chaque instant la valeur du champ magnétique.

b. Déterminer la valeur du champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ en fonction de la charge $Q(\vec{r}, t)$ contenue dans la sphère de centre r .

c. Calculer la densité volumique de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$ en fonction de $Q(\vec{r}, t)$. La comparer au courant de déplacement.

d. On suppose que la sphère initialement neutre émet à partir de $t = \frac{a}{v_0}$ une charge

$$I = \frac{Q_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t - \frac{a}{v_0}}{\tau}\right) \text{ par unité de temps.}$$

Calculer explicitement $Q(\vec{r}, t)$, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

- 5 Soit un fil conducteur rectiligne de conductivité γ , de rayon a , parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti sur sa section.

a. Que vaut le champ électrique \vec{E} dans le fil ?

b. Que vaut le champ magnétique \vec{B} à la surface du fil ?

c. En déduire le vecteur de Poynting à la surface du fil, et la puissance électromagnétique qui traverse l'élément de longueur du fil. Interpréter.

1 - Charges en mouvement lent et calculs du rayon classique de l'électron

On rappelle les formules d'analyse vectorielle suivantes :

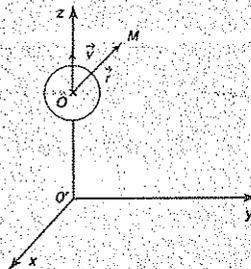
- $\text{div}(f\vec{A}) = f \text{div}\vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}f$; • $\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A}) = f\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}f \wedge \vec{A}$;
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\text{div}\vec{B})\vec{A} - (\text{div}\vec{A})\vec{B} + \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\vec{B}$;
- $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$.

Partie A

L'espace est rapporté au trièdre orthonormé (Ox_0, y_0, z_0) . Soit une distribution de charges électriques au repos, de densité volumique ρ_0 , placée dans le vide. On suppose que ρ_0 est uniforme à l'intérieur de la sphère S de centre O et de rayon R , et nulle à l'extérieur de cette sphère.

1 Calculer le potentiel électrostatique $V_0(r)$ et le champ électrostatique $\vec{E}_0(r)$ créés par cette distribution en un point quelconque $M(\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{e}_r)$. On distinguera $r < R$ et $r > R$.

2 La distribution de charges précédentes est maintenant animée d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse \vec{v} relativement au référentiel $O'xyz$ (voir figure ci-contre). \vec{v} est parallèle à Oz et $|\vec{v}| = v \ll c$, avec c célérité de la lumière dans le vide. On continuera à désigner par \vec{r} le vecteur \overrightarrow{OM} , qui dépend désormais du temps, de sorte qu'à un instant donné les inégalités $r < R$ et $r > R$ caractérisent respectivement l'intérieur et l'extérieur de S . La distribution mobile crée dans le référentiel $(O'xyz)$ un champ



électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) auxquels sont associés les potentiels V et \vec{A} .

a. Montrer, sans calcul explicite, mais en précisant les hypothèses, que le potentiel vecteur \vec{A} et le potentiel scalaire V sont liés par la relation : $\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2} V$ (1).

b. La relation (1) suppose-t-elle que $v \ll c$?

On indique que les potentiels V et \vec{A} sont donnés en tout point M , à l'instant t , quel que soit v , par les expressions :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(P, t - \frac{PM}{c}\right)}{PM} d\tau_P, \quad \text{et} \quad \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right)}{PM} d\tau_P,$$

ρ et \vec{j} sont respectivement les densités de charge et de courant dans le référentiel $(O'xyz)$.

c. On admettra que les expressions des potentiels données ci-dessous satisfont la « condition de jauge de Lorentz » : $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

Exprimer en fonction de V , \vec{v} , et c le champ électrique \vec{E} créé par la distribution mobile, et en déduire l'expression du champ magnétique \vec{B} en fonction de V , \vec{v} , et c , puis de \vec{E} , \vec{v} et c .

Ces expressions supposent-elles que $v \ll c$?

3 On suppose $v \ll c$.

a. En considérant la force s'exerçant sur une particule chargée en mouvement à la vitesse \vec{v} relativement à $O'xyz$, établir qu'à chaque instant, au second ordre près en $\frac{v}{c}$, $\vec{E} = \vec{E}_0$ défini à la question 1.

Comparer, avec le même ordre d'approximation, les densités volumiques ρ et ρ_0 .

b. En déduire, à la même approximation, les expressions explicites de \vec{B} pour $r > R$, puis pour $r < R$.

c. Calculer pour $r < R$ le vecteur densité de courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, et vérifier que \vec{j}_D se déduit simplement du vecteur densité de courant \vec{j} .

d. Calculer \vec{j}_D pour $r > R$ et vérifier qu'il a l'expression d'un champ dipolaire (c'est-à-dire qu'il est proportionnel à $\frac{Q \vec{v} \cdot \vec{r}}{r^3}$, où Q désigne la charge de la sphère en mouvement).

4 Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers une sphère de rayon $r > R$, concentrique à la sphère de centre O . Interpréter le résultat.

Partie B

On applique les résultats précédents au calcul du rayon classique de l'électron.

On suppose que l'électron est assimilable à une sphère de rayon R , de masse m , de charge q répartie uniformément en volume.

1 L'électron est au repos.

a. Calculer son énergie électrostatique totale W_E .

b. En déduire une expression de R , que l'on notera R_1 , en assimilant W_E à l'énergie au repos de l'électron.

2 L'électron est animé d'une vitesse de translation faible devant c .

a. Calculer son énergie magnétique totale W_M .

b. En déduire une expression de R , que l'on notera R_2 , en assimilant W_M à l'énergie cinétique de l'électron.

Application numérique : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C,

$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$ F · m⁻¹ et $c = 3 \cdot 10^8$ m · s⁻¹.

résolution méthodique

Partie A

1

La seule difficulté est dans le calcul du potentiel : la distribution ayant la symétrie sphérique, il faut utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ, puis en déduire le potentiel. Il n'y a pas de charges à l'infini, donc on conviendra de le prendre nul à l'infini. Il faudra ensuite utiliser la continuité du potentiel en $r = R$ pour calculer la constante d'intégration de la solution pour $r < R$.

Dans le référentiel lié à $Ox_0y_0z_0$, la répartition a la symétrie sphérique, $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$, et on applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r :

$$\bullet r < R : 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0, \quad \vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

$$\bullet r > R : 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0, \quad \vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

On en déduit le potentiel :

$$\bullet r > R : \frac{dV_0}{dr} = -\frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}, \quad V_0(r) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ où } Q \text{ est la charge totale de la sphère.}$$

$$\bullet r < R : \frac{dV_0}{dr} = -\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}, \quad V_0(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + C.$$

La continuité en $r = R$ s'écrit $C = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}$. Donc $V_0(r) = \frac{\rho_0(3R^2 - r^2)}{6\epsilon_0}$.

2

Dans le changement de référentiel galiléen envisagé, tant que l'on ne suppose pas qu'on néglige les termes du deuxième ordre en $\frac{v}{c}$, il ne faut pas utiliser les lois de transformation galiléenne. En particulier, $\rho \neq \rho_0$. On peut seulement assurer que la nouvelle distribution a la symétrie de révolution autour de Oz . Plus précisément, la charge en un point est indépendante du référentiel dans lequel on l'observe, mais en relativité, les longueurs ne sont pas conservées, et la masse volumique ne le sera donc pas non plus.

a. Dans le référentiel lié à $O'xyz$, il y a un courant de convection de densité volumique $\vec{j}(P, t) = \rho(P, t)\vec{v} = \rho(P, t)v\vec{e}_z$.

D'après les équations de Maxwell, en utilisant la jauge de Lorentz, les équations des potentiels s'écrivent : $\vec{\square} \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$, et $\square V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

L'axe Oz est axe de symétrie de révolution pour les répartitions de charges et de courants. \vec{A} défini avec la jauge de Lorentz possède les mêmes symétries que \vec{j} , donc $\vec{A} = A(M, t)\vec{e}_z$.

Les deux équations sont donc $\square A(M, t) = -\mu_0 \rho(M, t) v$ et $\square V(M, t) = -\frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$, avec la même condition aux limites à l'infini.

Les solutions uniques sont donc proportionnelles :

$$A(M, t) = \mu_0 \epsilon_0 V(M, t) v, \text{ soit } \vec{A}(M, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} V(M, t), \text{ puisque par définition } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1.$$

b. La relation précédente est valable quelle que soit la vitesse v , les équations de Maxwell étant compatibles avec la relativité.

c. La relation liant le champ \vec{E} aux potentiels s'écrit

$$\vec{E}(M, t) = -\vec{\text{grad}} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t}.$$

En éliminant \vec{A} avec la relation (1) :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \frac{\vec{v}}{c^2} V(M, t)}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial V(M, t)}{\partial t}, \text{ puisque } \vec{v} \text{ est indépendant du temps.}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \text{rot} \left(\frac{v \vec{e}_z}{c^2} V(M, t) \right). \text{ On utilise la formule donnant } \text{rot}(f \vec{A}) :$$

$$\vec{B} = \vec{\text{grad}} V(M, t) \wedge \frac{v \vec{e}_z}{c^2}, \text{ puisque } \vec{e}_z \text{ est un vecteur fixe. } \vec{\text{grad}} V = -\vec{E} - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial V(M, t)}{\partial t}, \text{ et}$$

$$\vec{B} = \left(-\vec{E} - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial V(M, t)}{\partial t} \right) \wedge \frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}.$$

Ces expressions sont valables quelle que soit la vitesse.

3 a. Si l'on néglige les termes du second ordre en $\frac{v}{c}$, on peut traiter les changements de référentiels en mécanique galiléenne : la force est alors invariante dans un changement de référentiel galiléen.

Dans le référentiel lié à $Oxyz$, une charge q immobile placée en M est soumise à la force électrostatique $q \vec{E}_0(M)$.

Dans le référentiel lié à $O'xyz$, elle est en mouvement à la vitesse \vec{v} et est soumise à la force électromagnétique :

$$q(\vec{E}(M, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M, t)) = q \left(\vec{E}(M, t) + \vec{v} \wedge \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}(M, t) \right) \right).$$

Au deuxième ordre en $\frac{v}{c}$, cette expression se simplifie en $q \vec{E}(M, t)$. En identifiant avec l'expression de la force dans le référentiel $Oxyz$: $\vec{E}(M, t) \approx \vec{E}_0(M, t)$.

Un point M fixe dans le référentiel $O'xyz$ est à une distance au centre O de la sphère chargée variable au cours du temps. La valeur du champ \vec{E}_0 en ce point M variera donc au cours du temps. Les dérivées partielles par rapport à x, y , ou z se feront à t constant, et seront donc les mêmes que pour le champ statique, mais il y aura aussi une variation temporelle due au déplacement de sources du champ.

Pour calculer les densités volumiques, on utilise l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \rho(M, t).$$

$\vec{E}(M, t) \approx \vec{E}_0(M, t)$, donc $\rho(M, t) \approx \rho_0(M, t)$ au deuxième ordre en $\frac{v}{c}$ (cela correspond à la conservation des longueurs en mécanique newtonienne).

b. $\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}$, avec $\vec{E}(M, t) \approx \vec{E}_0(M, t)$.

En utilisant les coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe Oz :

$$\bullet r < R: \quad \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_0 v r \sin \theta}{3\epsilon_0 c^2} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 \rho_0 v r \sin \theta}{3c^2} \vec{e}_\varphi$$

$$\bullet r > R: \quad \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \frac{\rho_0 R^3 \vec{r}}{3r^3 \epsilon_0} = \frac{\rho_0 v R^3 \sin \theta}{3r^3 \epsilon_0 c^2} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} Q v \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

Il y a deux manières de s'y prendre : prendre la dérivée partielle de $\vec{E}(M, t) \approx \vec{E}_0(M, t)$, en se rappelant que le point M est fixe, et que la variation temporelle n'est due qu'au déplacement du point O , ou utiliser le théorème de Maxwell-Ampère puisque l'on connaît la valeur du champ \vec{B} . Les deux méthodes sont données ci-dessous.

Première méthode : calcul direct

$$\bullet r < R: \quad \vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \rho_0 \vec{OM}}{\partial t} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \rho_0 \vec{v} = -\frac{\vec{j}}{3}$$

$$\bullet r > R: \quad \vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \rho_0 R^3 \vec{OM}}{\partial t} \frac{1}{3OM^3} = \frac{Q}{4\pi} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t OM^3}$$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t OM^3} = \frac{1}{OM^3} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} + \vec{OM} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{OM^3}$$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} = -\vec{v}, \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{OM^3} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{OM^3} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{OM^3}$$

Pour vérifier que deux expressions sont identiques, le plus simple est souvent de développer indépendamment les deux expressions pour les comparer.

$$\vec{j}_D = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{-\vec{v}}{r^3} + \vec{r} \left(-\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{r^3} \right) \right]$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{Q \vec{v} \cdot \vec{r}}{r^3} = Q \left[\frac{1}{r^3} \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\vec{v} \cdot \vec{r}) + \vec{v} \cdot \vec{r} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{r^3} \right] = Q \left[\frac{1}{r^3} \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{r} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{r^3} \right]$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5} \text{ donc } \vec{r} \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{r^3} \right) = -\vec{r} \left(\vec{v} \cdot \frac{3\vec{r}}{r^5} \right), \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{r} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{r^3} = -\frac{3\vec{r}}{r^5} \vec{v} \cdot \vec{r}$$

Les deux expressions sont identiques.

$$\vec{j}_D = -\frac{1}{4\pi} \left[\overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{Q \vec{v} \cdot \vec{r}}{r^3} \right]$$

Deuxième méthode : utilisation du théorème de Maxwell-Ampère

$$\bullet r < R: \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_0(\rho_0 \vec{v} + \vec{j}_D).$$

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \vec{\text{rot}} \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_0 v}{3\epsilon_0 c^2} \vec{\text{rot}}(\vec{e}_z \wedge (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)) \\ &= \frac{\rho_0 v}{3\epsilon_0 c^2} \vec{\text{rot}}(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x) = \frac{2\rho_0 \vec{v}}{3\epsilon_0 c^2}. \end{aligned}$$

On peut aussi reconnaître directement l'expression $\vec{\text{rot}}(\vec{V} \wedge \vec{r}) = 2\vec{V}$ déjà rencontrée au chapitre précédent.

$$\mu_0(\rho_0 \vec{v} + \vec{j}_D) = \frac{2\rho_0 \vec{v}}{3\epsilon_0 c^2}, \text{ soit } \vec{j}_D = -\frac{\rho_0 \vec{v}}{3} = -\frac{\vec{j}}{3}.$$

$$\bullet r > R: \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_D = \vec{\text{rot}} \frac{\mu_0 Q \vec{v}}{4\pi} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

On reconnaît l'expression du rotationnel du potentiel vecteur d'un moment magnétique

$$Q \vec{v}. \text{ C'est donc aussi } -\text{grad} \frac{\mu_0 Q \vec{v} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}.$$

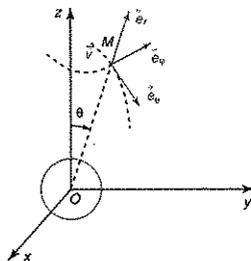
$$\vec{j}_D = -\frac{1}{4\pi} \text{grad} \frac{Q \vec{v} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

► 4 Le vecteur de Poynting s'écrit $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$.

Pour $r > R$:

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} \vec{r} \wedge \frac{R^3 \rho_0 v}{3r^3} \sin \theta \vec{e}_\phi, \text{ et est donc dirigé}$$

suivant $-\vec{e}_\theta$, tangent à la sphère (voir figure). Le flux du vecteur de Poynting à travers la sphère est nul : le résultat était prévisible, puisqu'il en est ainsi dans le référentiel lié à $Oxyz$ où le champ magnétique est nul.



Partie B

► 1 a. La densité volumique d'énergie électrostatique est $\epsilon_0 \frac{E^2}{2}$.

Pour avoir W_E , il faut intégrer cette expression sur tout l'espace :

$$W_E = \int_0^R \frac{\rho_0^2 r^2}{18\epsilon_0} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\rho_0 R^6}{18\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr.$$

$$W_E = \frac{4\pi \rho_0^2}{18\epsilon_0} \left[\frac{R^5}{5} + R^5 \right]. \rho_0 = \frac{3q}{4\pi R^3}, \text{ donc } W_E = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

b. L'énergie au repos de l'électron est mc^2 .

$$\text{On en déduit } R_1 = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 mc^2} = 1,69 \cdot 10^{-15} \text{ m.}$$

2 a. La densité d'énergie magnétique est $\frac{B^2}{2\mu_0}$. En intégrant cette expression sur tout l'espace :

$$W_M = \int_0^R \int_0^\pi \frac{\mu_0 q^2 v^2 r^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 R^6} 2\pi r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta + \int_R^\infty \int_0^\pi \frac{\mu_0}{32\pi^2 r^4} q^2 v^2 \sin^2 \theta 2\pi r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta,$$

$$\text{soit } W_M = \frac{\mu_0 q^2 v^2}{16\pi R^6} \left[\int_0^R \int_0^\pi r^4 \sin^3 \theta \, dr \, d\theta + R^6 \int_0^R \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \sin^3 \theta \, dr \, d\theta \right].$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{4}{3}$$

$$W_M = \frac{\mu_0 q^2 v^2}{12\pi R^6} \left[\frac{R^5}{5} + R^5 \right] = \frac{\mu_0 q^2 v^2}{10\pi R}$$

b. L'énergie cinétique s'écrit $\frac{1}{2}mv^2$.

On en déduit $R_2 = \frac{\mu_0 q^2}{5\pi m} = \frac{q^2}{5\pi \epsilon_0 m c^2} = \frac{4}{3} R_1 = 2,25 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, donc du même ordre de grandeur que R_1 .

en conclusion

° Pour calculer une dérivée partielle par rapport au temps, il faut considérer la variation de la fonction au cours du temps en un point fixe de l'espace dans le référentiel considéré.

° On retrouve souvent dans les exercices des calculs analogues à ceux qui ont été traités en cours. Les reconnaître permet d'arriver plus vite à la solution (voir quelques-unes de ces expressions dans l'annexe p. 250).

° L'élément de volume en coordonnées sphériques est $r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr$.

Pour intégrer sur un volume sphérique, si la fonction à intégrer ne dépend pas de ϕ , (symétrie de révolution autour de l'axe Oz), on se ramène à une intégrale double avec pour élément de volume $2\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr$.

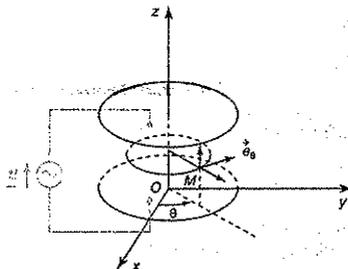
Si de plus, elle ne dépend pas de θ , (symétrie sphérique), on se ramène à une intégrale simple avec pour élément de volume $4\pi r^2 \, dr$.

2 – Condensateur en régime sinusoïdal (d'après ENSI)

Rappel : en coordonnées cylindriques, $\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial f}{\partial r} \right]$.

$$\text{rot } \vec{V} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z$$

Un condensateur plan est formé de deux disques métalliques de même rayon a , séparés par une distance c . On néglige tout effet de bord (voir ci-dessous).



1 Une source de tension alternative impose aux bornes du condensateur une tension $U = U_0 e^{j\omega t}$.

a. Déterminer le champ \vec{E}_0 en notation complexe dans le condensateur en négligeant les éventuels effets magnétiques, en fonction de U_0 , $j\omega$, ϵ et \vec{e}_z .

b. En déduire le champ magnétique \vec{B}_0 dans ce condensateur en admettant qu'il est de la forme $\vec{B}_0 = B_0(r, t) \vec{e}_\theta$.

c. Montrer que l'existence de \vec{B}_0 est incompatible avec l'uniformité du champ électrique.

On cherche donc le champ \vec{E} sous la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$. On admettra qu'il reste parallèle à Oz .

d. En déduire le domaine de fréquence pour lequel le terme \vec{E}_1 peut être négligé.

Déterminer \vec{E}_1 en fonction de r , ω , c (célérité de la lumière dans le vide) et \vec{E}_0 , en admettant que $E_1(0, t) = 0$.

e. Les résultats précédents sont inexacts puisque l'existence de \vec{E}_1 modifie la valeur du champ magnétique dans le condensateur. On cherche donc le champ \vec{B} sous la forme $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$. Calculer \vec{B}_1 en fonction de r , ω , c et \vec{E}_0 , en le supposant orthoradial et s'annulant en $r = 0$.

2 Il faudrait ensuite calculer la modification de \vec{E} due à l'existence de \vec{B}_1 .

On amorce ainsi un résultat sous forme d'une série entière en puissances de $\frac{\omega r}{c}$.

On se propose de trouver ce résultat autrement.

a. On suppose le champ électrique à l'intérieur du condensateur de la forme

$$\vec{E} = E(r)e^{j\omega t}\vec{z}_z.$$

En combinant les équations de Maxwell de manière à n'avoir qu'une équation en \vec{E} , déterminer l'équation différentielle vérifiée par $E(r)$.

b. Trouver une solution sous la forme d'une série entière de $x = \frac{\omega r}{c}$. Vérifier la cohérence avec les calculs précédents. En ne gardant que les quatre premiers termes de la série, trouver la position du premier zéro. Pour quelle valeur de ω peut-il être atteint dans le condensateur précédent pour lequel $a = 10 \text{ cm}$?

résolution méthodique

1

Établir une tension $\underline{U} = U_0 e^{j\omega t}$ en notation complexe signifie que la tension établie est la partie réelle de \underline{U} . On pourrait tout aussi bien prendre $\underline{U} = U_0 e^{-j\omega t}$, à condition de ne pas changer de notation dans le problème.

On prend souvent la notation j pour $\sqrt{-1}$ pour ne pas confondre avec les intensités de courant. Toute transformation linéaire peut être effectuée sur cette grandeur (dérivation, multiplication par une constante, addition). La grandeur complexe obtenue aura pour partie réelle ce que l'on aurait obtenu en effectuant la transformation sur la partie réelle.

a. Si l'on néglige le champ magnétique, les équations de définition du champ entre les armatures sont, comme en statique : $\text{div} \vec{E} = 0$ et $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$, avec les mêmes conditions aux limites.

On néglige les effets de bord : le champ est uniforme, dirigé suivant Oz : $\vec{E}_0 = -\frac{U_0}{\epsilon} e^{j\omega t} \vec{z}_z$.

b. $\text{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Les variations temporelles de \vec{E} sont donc sources d'un champ magnétique. La relation est linéaire, donc on peut faire les calculs en notation complexe : $\text{rot} \vec{B}_0 = \epsilon_0 \mu_0 j \omega \vec{E}_0 \vec{z}_z = \frac{j \omega \epsilon_0 \vec{z}_z}{c^2}$.

Les sources de champ ont la symétrie de révolution autour de Oz , donc \vec{B}_0 ne dépend pas de θ et est suivant \vec{z}_θ .

Il y a deux méthodes équivalentes pour calculer \vec{B}_0 : intégrer directement l'équation différentielle locale, ou utiliser la forme intégrale, c'est-à-dire le théorème d'Ampère.

Première méthode

$$\text{rot } \underline{B}_0 \vec{e}_\theta = -\frac{\partial B_0}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_0) \vec{e}_z = \frac{j\omega E_0}{c^2} \vec{e}_z.$$

On retrouve que si l'on néglige les effets de bord, \underline{B}_0 est indépendant de z .

$$\frac{\partial}{\partial r} (r B_0) = \underline{E}_0 \frac{j\omega r}{c^2}, \text{ et } \boxed{\underline{B}_0 = \frac{j\omega r}{2c^2} \underline{E}_0 \vec{e}_\theta}$$
 la constante d'intégration étant nulle, puisqu'en $r = 0, r B_0 = 0$.

Deuxième méthode

On applique le théorème d'Ampère à un cercle de rayon r , centré sur l'axe Oz : à l'intérieur du condensateur $r \leq a$.

$$2\pi r \underline{B}_0 = \varepsilon_0 \mu_0 j \omega \underline{E}_0 \pi r^2, \text{ soit: } \boxed{\underline{B}_0 = \frac{j\omega r}{2c^2} \underline{E}_0 \vec{e}_\theta = -\frac{j\omega r U_0 e^{j\omega t}}{2c^2 \varepsilon} \vec{e}_\theta}$$

c. $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donc l'existence d'un champ magnétique variable au cours du temps est incompatible avec un champ magnétique uniforme.

\underline{B}_0 est la source d'un champ électrique supplémentaire \underline{E}_1 .

Les relations étant linéaires, le champ total est la somme des champs créés individuellement par chacune des sources.

d. On procède de la même manière :

$$\text{rot } \underline{E}_1 = -\frac{\partial \underline{B}_0}{\partial t} = \frac{\omega^2 r}{2c^2} \underline{E}_0 \vec{e}_\theta. \underline{E}_1 \text{ est suivant } \vec{e}_z \text{ et ne dépend que de } r: -\frac{\partial E_1}{\partial r} = \frac{\omega^2 r}{2c^2} \underline{E}_0,$$

$$\text{soit } \boxed{E_1 = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \underline{E}_0}, \text{ en admettant que } \underline{E}_1(0, t) = 0.$$

On pourrait aussi procéder avec la forme intégrale, en utilisant la circulation de \underline{E}_1 sur un rectangle parallèle à l'axe Oz , et d'épaisseur dr , mais on retrouverait simplement l'équation différentielle précédente.

e. De la même façon,

$$\text{rot } \underline{B}_1 \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_1) \vec{e}_z = \frac{j\omega \underline{E}_1}{c^2} \vec{e}_z; \quad \frac{\partial}{\partial r} (r B_1) = -\frac{j\omega^3 r^3 \underline{E}_1}{4c^4}; \quad \boxed{\underline{B}_1 = -\frac{j\omega^3 r^3 \underline{E}_0}{12c^4}}$$

2 a.

Pour éliminer le champ \vec{B} entre les équations de Maxwell de détermination de \vec{E} , on prend le rotationnel du rotationnel de \vec{E} . De même pour éliminer le champ \vec{E} entre les équations de Maxwell, on prend le rotationnel du rotationnel de \vec{B} . Il est donc important de mémoriser la formule de définition du laplacien vectoriel : $\text{rot}(\text{rot } \vec{V}) = \text{grad}(\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V}$.

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Entre les armatures du condensateur, il n'y a pas de charges, donc $\text{div} \vec{E} = 0$: $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

\vec{E} est suivant \vec{z} , et ne dépend que de r , donc $\Delta \vec{E} = (\Delta E(r, t))\vec{z}$. En utilisant la formule du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial E}{\partial r} \right] = -\frac{\omega^2}{c^2} E}, \text{ ou encore } \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial E}{\partial r} \right] = -\frac{\omega^2 r}{c^2} E.$$

b. En posant $x = \frac{\omega r}{c}$, $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial x}$, donc $\frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c}{\omega} x \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial x} E(x, t) \right) = -\frac{\omega}{c} x E(x, t)$.

Soit $\boxed{\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial E}{\partial x} \right] = -E}$

En posant $\vec{E} = \sum_n a_n x^n \vec{E}_0$, $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n x^{n-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

En identifiant les coefficients des monômes de même ordre : $a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)^2}$.

La solution sous forme de série entière s'écrit donc : $\vec{E} = \vec{E}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!^2} x^{2n}$.

Les premiers termes s'écrivent $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} \right)}$ ce qui correspond bien à l'expression trouvée pour \vec{E}_1 : $-\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \vec{E}_0$.

Une valeur approchée du premier zéro est la solution positive de $\boxed{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} = 0}$, soit :

$$\boxed{x \approx \sqrt{8} \approx 2,8}$$

Cela correspond à une pulsation $\omega = 2,8 \frac{c}{a}$, soit une fréquence :

$$\boxed{f = 2,8 \frac{c}{2\pi a} = 1300 \text{ MHz}}$$

Il n'y a qu'à très hautes fréquences qu'il faut tenir compte de la partie magnétique du champ électromagnétique.

Cette solution est connue sous le nom de **fonction de Bessel** $J_0(x)$. Le premier zéro a pour valeur 2,4.

1

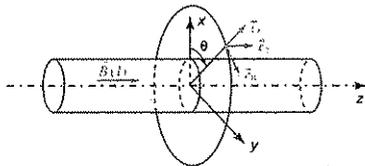
20 min

> Corrigé p. 127

Long solénoïde en régime lentement variable

Soit un solénoïde circulaire d'axe Oz , de rayon a , de longueur ℓ suffisamment supérieure à a pour qu'on puisse le considérer comme infini (voir figure), on y suppose établi le champ magnétique :

$$\vec{B} = B(t)\vec{e}_z, \text{ avec } B(t) = B_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$



1. Montrer qu'un champ électrique orthoradial s'établit dans le système mais qu'en régime lentement variable, la contribution magnétique à l'énergie est prépondérante.
2. Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers la surface du solénoïde et effectuer la vérification du résultat obtenu.

2

20 min

> Corrigé p. 127

Bilan énergétique de la charge d'un condensateur

Un condensateur plan est formé de deux disques métalliques de même rayon a , séparés par une distance e . On néglige tout effet de bord.

On suppose que sa charge est suffisamment lente pour que l'on puisse considérer le champ électrique comme uniforme entre les armatures.

1. On charge ce condensateur avec un générateur de tension U_0 à travers une résistance R .
 - a. Calculer à chaque instant l'intensité $i(t)$ du courant dans le fil de liaison, et la densité surfacique de charge sur les armatures.
 - b. En déduire le champ électrique entre les armatures, et calculer le champ magnétique à la distance a du centre, en utilisant le théorème d'Ampère avec une surface soit passant entre les armatures, soit traversant le fil de liaison.
- Montrer que l'on trouve bien le même résultat.

2. On effectue un bilan énergétique.

- a. Calculer la puissance rayonnée à travers le cylindre de hauteur e et de rayon a délimité par le condensateur.
- b. Calculer l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur à chaque instant.
- c. Calculer la puissance fournie par le générateur à chaque instant.
- d. Faire le bilan énergétique de la charge du condensateur en faisant apparaître la conservation de l'énergie.

3

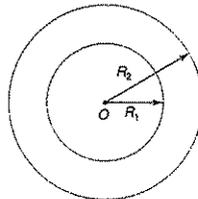
20 min

> Corrigé p. 128

Espace entre deux sphères rendu instantanément conducteur

Deux sphères métalliques minces S_1 et S_2 , concentriques de centre O et de rayons R_1 et R_2 avec $R_2 > R_1$, sont séparées par un gaz initialement isolant, de permittivité relative égale à 1.

S_1 est initialement chargée, et S_2 est neutre.



À l'instant $t = 0$, le gaz devient instantanément conducteur avec une conductivité ohmique γ .

1. On veut calculer à chaque instant les champs électrique et magnétique créé par cette distribution.
 - a. Donner les propriétés de symétrie que doivent vérifier $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$.
En déduire que $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}$.
 - b. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\vec{E}(\vec{r}, t)$. L'intégrer pour $R_1 < r < R_2$.
 - c. Montrer que la densité volumique de charge $\rho(\vec{r}, t)$ reste nulle entre les sphères.
 - d. Déterminer $\vec{E}(\vec{r}, t)$ pour $r < R_1$ et $r > R_2$.

2. Donner l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule dans l'espace entre les sphères, et l'énergie totale W_J dissipée pendant l'évolution du système.

3. Calculer l'énergie électromagnétique du système W_i dans l'état initial et W_f dans l'état final, et faire un bilan énergétique.



40 min

► Corrigé p. 129

Principe du diamagnétisme

Rappels

• Pour deux champs de vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 :

$$\text{grad}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = (\vec{V}_1 \cdot \text{grad})\vec{V}_2 + (\vec{V}_2 \cdot \text{grad})\vec{V}_1 + \vec{V}_1 \wedge \text{rot}\vec{V}_2 + \vec{V}_2 \wedge \text{rot}\vec{V}_1.$$

• Soient trois vecteurs \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3 :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) - \vec{V}_3(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2).$$

On modélise un électron d'un atome comme une particule de charge $q = -e$ soumise à un potentiel attractif central $V(r)$ et à un champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ dérivant d'un potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

a. Justifier que si l'on note $\vec{A}(t)$ le potentiel vecteur subi par la particule à l'instant t ,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{A}.$$

b. Si l'on appelle $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement de la charge, montrer que :

$\frac{d}{dt}(\vec{p} + q\vec{A}) = -q \text{grad}(V(r) - \vec{A} \cdot \vec{v})$ où l'opérateur gradient agit sur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ et $V(r)$, mais non sur \vec{v} .

c. Le champ magnétique est supposé uniforme, parallèle à Oz , et on prend pour potentiel vecteur

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{B}(t) \wedge \vec{r}.$$

Montrer que $L_z = [\vec{r} \wedge (\vec{p} + q\vec{A})]_z$ est une constante du mouvement.

d. On rappelle qu'en mécanique quantique, les grandeurs quantifiées sont des constantes du mouvement, ce qui est le cas pour L_z . La composante M_z du moment magnétique de l'électron est reliée à la composante sur Oz du moment cinétique orbital par le rapport gyromagnétique $-\frac{e}{2m}$; en l'absence de champ : $M_z = -\frac{e}{2m}L_z$.

En déduire qu'en présence d'un champ magnétique extérieur, il y a modification du moment magnétique des électrons d'un atome, et apparition d'une aimantation (densité volumique de moment magnétique)

$$\vec{J} = \frac{d\vec{M}}{d\tau} \text{ en sens contraire de } \vec{B}.$$



50 min

► Corrigé p. 130

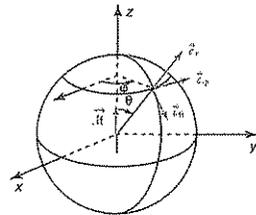
Une autre interprétation du vecteur de Poynting

Une sphère creuse de rayon a , de centre O , isolante, est mobile sans frottement autour de son diamètre vertical Oz .

Son moment d'inertie par rapport à son axe est J , et elle porte une charge Q uniformément répartie sur sa surface.

À $t = 0$, elle est au repos. Au centre de la sphère est placé un moment magnétique variable au cours du temps $\vec{M} = \vec{M}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

On choisit un repère de centre O , d'axe Oz colinéaire à \vec{M} : $\vec{M} = M\vec{e}_z$, et on se place en coordonnées sphériques r, θ, ϕ (voir ci-dessous).



1. a. Montrer que les charges présentes à la surface de la sphère subissent des forces dont le moment par rapport à l'axe Oz est non nul. (On pourra remarquer que seules contribuent à ce moment les forces qui ont une composante suivant \vec{e}_ϕ .)

b. Calculer le moment cinétique acquis par la sphère lorsque le moment magnétique s'annule.

2. On souhaite interpréter le résultat précédent en terme de conservation du moment cinétique.

On considère le double aspect ondulatoire et corpusculaire de l'électromagnétisme. Soit un ensemble de photons de vitesse \vec{c} , de densité volumique n , d'énergie $h\nu$, de quantité de mouvement $\frac{h\nu\vec{c}}{c}$.

Quelle grandeur corpusculaire associe-t-on à la densité volumique u d'énergie électromagnétique ?

au vecteur de Poynting \vec{R} ? Montrer qu'il est alors logique d'associer au champ électromagnétique une densité volumique de quantité de mouvement

$$\vec{g} = \frac{\vec{R}}{c^2}, \text{ où } \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

et c la célérité de la lumière dans le vide.

Calculer \vec{g} en tout point, et établir l'expression de la densité volumique de moment cinétique du champ par rapport à Oz

Calculer la variation du moment cinétique par rapport à l'axe du champ électromagnétique dans la transformation étudiée, et montrer qu'il y a alors bien conservation du moment cinétique.

6)

50 min

> Corrigé p. 131

Et si le photon avait une masse non nulle ? (d'après X)

1. Les équations de l'électromagnétisme supposent que le photon a une masse nulle. On étudie une extension de cette théorie au cas d'un photon de masse m_γ non nulle.

Soient V un potentiel scalaire et \vec{A} un potentiel-vecteur permettant d'obtenir les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} par les formules usuelles :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \text{grad} V(\vec{r}, t) \text{ et}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t).$$

Les équations de Maxwell sont remplacées par :

$$\cdot \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \eta^2 V; \quad \cdot \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\cdot \text{div} \vec{B} = 0; \quad \cdot \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \eta^2 \vec{A};$$

où le paramètre η est lié à la masse m_γ par $\eta = \frac{m_\gamma c}{\hbar}$.

Application numérique : $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, et c célérité de la lumière dans le vide :

$$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

la masse de l'électron vaut $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

a. Vérifier que η^{-1} est une longueur et que l'on retrouve bien les équations de Maxwell classiques en faisant tendre m_γ vers 0.

b. Montrer que les équations précédentes ne sont compatibles avec la conservation de la charge que

si les potentiels V et \vec{A} satisfont la condition de jauge de Lorentz : $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

c. Écrire les équations aux dérivées partielles vérifiées par les potentiels V et \vec{A} .

2. On étudie les modifications de la loi de Coulomb éventuellement dues à une masse non nulle du photon.

On considère une sphère creuse de rayon R et de centre O , portant une charge électrique Q uniformément répartie sur sa surface. On cherche des solutions statiques à symétrie sphérique des équations modifiées sous la forme :

$$V(\vec{r}, t) = \frac{f(r)}{r} \text{ et } \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{0}.$$

a. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction f dans les deux intervalles $0 < r < R$ et $r > R$.

(On rappelle que le Laplacien d'une fonction $\psi(r)$

à symétrie sphérique est $\Delta \psi(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \psi(r)$.)

b. Trouver, pour chacun des deux intervalles envisagés, les solutions f de l'équation obtenue qui satisfont de plus aux conditions aux limites suivantes : V tend vers 0 à l'infini, V reste borné quand r tend vers 0, et V est continu pour tout r .

3. a. Montrer que la formule usuelle reliant la discontinuité du champ électrique radial à la densité surfacique de charge σ sur la sphère s'étend au cas où η est non nul.

b. En utilisant cette formule, et en conservant les conditions imposées à V dans la question 2.b, exprimer V en fonction de σ , η , et R .

4. On suppose désormais $\eta R \ll 1$ et on note V_0 la valeur de V en O .

a. En se limitant au premier ordre en $\eta^2 r^2$, donner une expression approchée de V à l'intérieur de la sphère au voisinage de $r = 0$.

b. Calculer en fonction de V_0 , η , R et R' la différence de potentiel δV entre la sphère de rayon R et une sphère concentrique de rayon $R' < R$.

c. Pour $R = 72 \text{ cm}$, et $R' = 61 \text{ cm}$, la mesure de cette différence de potentiel donne

$$\frac{|\delta V|}{|V_0|} < 0,32 \cdot 10^{-9}.$$

En déduire une limite supérieure pour le rapport

$$\frac{m_\gamma}{m_e}, \text{ où } m_e \text{ est la masse de l'électron.}$$

Tester ses connaissances

1 $\text{div} \vec{A}$ a la dimension d'un champ magnétique.
 $\frac{\partial V}{\partial t}$ a la dimension d'un champ électrique que multiplie une vitesse. Or, en considérant par exemple l'expression de la force de Lorentz, un champ électrique a même dimension qu'un champ magnétique multiplié par une vitesse. $\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$ a donc même dimension qu'un champ magnétique et donc que $\text{div} \vec{A}$.
 L'expression est homogène.

2 Réponse b. Il faut que les solutions choisies vérifient la condition de jauge de Lorentz.

Par exemple, la solution $(V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(t - \frac{OM}{c})}{OM})$,
 $\vec{A}(M, t) = \vec{0}$ vérifie les deux équations, les conditions aux limites à l'infini, mais ne peut pas convenir.

3 a. Le temps de relaxation τ se trouve en écrivant la conservation de la charge, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$, la loi d'ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, et l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$.

$$b. \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} = \frac{1}{58 \cdot 10^6 \times 36\pi \cdot 10^9} = 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ s.}$$

La discordance entre les résultats s'explique par le fait que l'on a utilisé la valeur de la conductivité en régime permanent, et que celle-ci n'a plus de sens en présence de champs variant très rapidement.

c. La relation entre ρ et \vec{E} étant linéaire, on cherche une solution en notation complexe du type $\rho = \rho_0 e^{i\omega t}$, qui vérifie l'équation $(\frac{\gamma}{\epsilon_0} + j\omega)\rho = 0$, soit $\rho = 0$.

4 Cela ne peut se faire que si les variables temporelles et spatiales sont indépendantes. Il n'y a pas de problème pour les équations locales. Dans les formes intégrales, il faudra faire attention à utiliser des surfaces ou des contours indépendants du temps.

5 L'identité de Poynting permet d'identifier le flux du vecteur de Poynting \vec{R} sortant d'une surface fermée comme la puissance électromagnétique rayonnée vers l'extérieur par cette surface.

L'interprétation du flux de \vec{R} à travers une surface ouverte, comme la puissance la traversant de la face Sud vers la face Nord, est cohérente avec cette identification.

Mais tout champ de vecteur \vec{R}' se déduisant de \vec{R} par ajout d'un champ à flux conservatif ayant la même dimension serait aussi cohérent.

Soit $\vec{R}' = \vec{R} + \text{rot} \vec{C}$, avec \vec{C} champ de vecteur quelconque ayant la dimension d'une densité volumique de puissance.

On ne peut faire cette interprétation du flux de

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

à travers une surface ouverte que parce qu'elle est en accord avec les résultats expérimentaux. On retrouvera ce point (interprétation du flux) dans l'étude des ondes électromagnétiques.

Savoir appliquer le cours

1 La contribution au potentiel en M d'un moment dipolaire $\vec{P}(P) d\tau_P$ placé en P s'écrit :

$$dV(M) = \frac{\vec{P}(P) d\tau_P \cdot \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^3}$$

Attention : ici, le point M est fixe, et P un point courant du domaine D .

$$\vec{\text{grad}} \frac{1}{PM} = \vec{\text{grad}} \frac{1}{MP} = -\frac{\vec{MP}}{MP^3} = \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

$$V(M) = \iiint_D \frac{\vec{P}(P) \cdot \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^3} d\tau_P = \iiint_D \frac{\vec{P}(P)}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{\text{grad}} \frac{1}{PM} d\tau_P$$

$$\frac{\vec{P}(P)}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{\text{grad}} \frac{1}{PM} d\tau_P = \text{div} \frac{\vec{P}(P)}{4\pi\epsilon_0 PM} - \frac{1}{PM} \text{div} \vec{P}(P) d\tau_P$$

On utilise le théorème d'Ostrogradsky :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}(P)}{PM} \cdot d\vec{S} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{1}{PM} \text{div} \vec{P}(P) d\tau_P$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_P \vec{n} \cdot d\vec{S}}{PM} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho_P}{PM} d\tau_P$$

On reconnaît le potentiel en M créé par les distributions volumique et surfacique des charges de polarisation.

2 La jauge de Coulomb s'écrit $\text{div} \vec{A} = 0$.

Les relations entre les champs et les potentiels s'écrivent :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \text{grad}V(\vec{r}, t)$$

$$\text{et } \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t).$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}V \right) = -\Delta V :$$

$$\Delta V(M, t) = -\frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) &= \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} \\ &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\text{soit } \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \text{ ou}$$

$$\square \vec{A}(M, t) = -\mu_0 \vec{j}(M, t) - \epsilon_0 \mu_0 \text{grad} \frac{\partial V(M, t)}{\partial t}$$

L'expression de V est alors la même qu'en régime

$$\text{permanent : } V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(M', t')}{MP} d\tau_{p'}$$

Il n'y a pas de terme de retard dans son expression.

3 a. On utilise l'expression des potentiels retardés, ce qui consiste à ne considérer de courant que sur la portion de fil située à une distance inférieure à ct du point M où on le calcule :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}^{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \frac{I dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \vec{e}_z,$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\text{arg} \cosh \frac{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{r} \right] \vec{e}_z.$$

ρ étant nul en tout point et à tout instant, $V(M, t) = 0$.

Remarque : \vec{A} ne dépend que de r et est suivant Oz , \vec{A} est donc à divergence nulle. La condition de jauge de Lorentz est bien vérifiée.

Remarque : \vec{A} est nul en M aux instants antérieurs à $\frac{r}{c}$, puisque jusqu'à cet instant M n'a reçu aucune information sur le courant.

$$\begin{aligned} \text{b. } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\text{arg} \cosh \frac{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{r} \right] \vec{e}_z \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\partial \left(\frac{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{r} \right)}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2 t^2 - r^2}{r^2}}} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{c^2 t}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \frac{r}{c t} \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \text{rot}(A(r, t) \vec{e}_z) = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_\theta \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\partial \left(\frac{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{r} \right)}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2 t^2 - r^2}{r^2}}} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{c^2 t^2}{r^3} \frac{r}{c t} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{c t}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \vec{e}_\theta$$

On vérifie bien que pour $t \rightarrow \infty$, $\vec{E} \rightarrow \vec{0}$, et $\vec{B} \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$, valeurs en régime permanent.

$$\text{c. } \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 r} \frac{c^2 t}{c^2 t^2 - r^2} \vec{e}_r,$$

\vec{R} est radial, la puissance est donc bien rayonnée à partir du fil, comme on pouvait s'y attendre.

La puissance rayonnée par unité de longueur du fil vaut :

$$\iint_{\Sigma} \vec{R} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a} \frac{c^2 t}{c^2 t^2 - a^2} 2\pi a = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{c^2 t}{c^2 t^2 - a^2}$$

d. Si l'on calcule l'énergie totale rayonnée à un instant

$$\text{quelconque postérieur à } \frac{a}{c}, \quad \mathcal{E} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \int_a^r \frac{c^2 t'}{c^2 t'^2 - a^2} dt'$$

est infinie, ce qui est impossible : l'établissement instantané d'une intensité uniforme sur le fil contrevient au principe de la relativité.

4 a. Les distributions de charges et de courants sont à symétrie sphérique.

Il n'existe pas de champ de vecteur axial à symétrie sphérique, donc $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}$.

b. $\vec{E}(\vec{r}, t)$ est radial et ne dépend que de r :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(r, t) \vec{e}_r.$$

On écrit le théorème de Gauss à chaque instant :

$$4\pi r^2 E(r, t) = \frac{Q(r, t)}{\epsilon_0}, \text{ soit } \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{Q(r, t)}{4\pi r^2 \epsilon_0} \vec{e}_r.$$

c. La conservation de la charge s'écrit, pour une sphère de rayon r :

$$\frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r, t), \text{ soit } \vec{j} = -\frac{\dot{Q}(r, t)}{4\pi r^2} \vec{e}_r.$$

La densité de courant de déplacement :

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\dot{Q}(r, t)}{4\pi r^2} \vec{e}_r.$$

Le courant dû au mouvement des charges et le courant de déplacement sont donc égaux et opposés. Ce résultat est cohérent avec le théorème de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

d. Les charges n'étant soumises à aucune force gardent une vitesse $v_0 \vec{e}_r$. Une sphère de rayon r est traversée à l'instant $t = \frac{r}{v_0}$ par les charges émises à l'instant $t = \frac{a}{v_0} \left(t - \frac{a}{v_0} \geq 0 \right)$.

• Si $t \leq \frac{r}{v_0}$, $Q(r, t) = 0$ car toutes les charges émises depuis l'origine sont restées à l'intérieur de la sphère.

Attention : si la sphère radioactive émet une charge $\int_0^t I(t') dt'$, sa charge en est diminuée d'autant.

• Si $t > \frac{r}{v_0}$, il faut donc enlever les charges $Q'(r, t)$ qui sont sorties de la sphère de rayon r , donc qui ont été émises entre les instants $\frac{a}{v_0}$ et $t - \frac{r}{v_0} + \frac{a}{v_0}$.

$$\begin{aligned} t > \frac{r}{v_0} : Q(r, t) &= -Q'(r, t) \\ &= -Q_0 \int_{\frac{a}{v_0}}^{t - \frac{r}{v_0} + \frac{a}{v_0}} \exp\left(-\frac{t - a}{\tau}\right) dt \\ &= -Q_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t - r}{\tau}\right) \right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} r \geq v_0 t : \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0, \vec{j} = \vec{0} \\ r \leq v_0 t : \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{-Q_0}{4\pi r^2 \epsilon_0} \left(1 - \exp\left(-\frac{t - r}{\tau}\right) \right) \vec{e}_r, \\ \vec{j} &= \frac{Q_0}{4\pi r^2 \tau} \exp\left(-\frac{t - r}{\tau}\right) \vec{e}_r. \end{aligned}$$

La densité d'énergie électromagnétique est donc nulle pour $r \geq v_0 t$, ce qui est logique puisque ces points

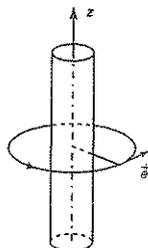
n'ont pas été atteints par les particules, et qu'il n'y a aucune énergie rayonnée, le vecteur de Poynting étant nul puisque $\vec{B} = \vec{0}$.

5 a. Soit Oz l'axe du fil, orienté dans le sens de I . L'intensité est répartie uniformément sur la section, donc $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$.

Le conducteur est ohmique, donc $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{\gamma \pi a^2} \vec{e}_z$.

b. Tout plan passant par Oz étant plan de symétrie pour la distribution de courant, le champ \vec{B} est orthoradial. Il y a invariance par rotation autour de Oz et par translation suivant Oz (fil infini), donc $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$.

On applique le théorème d'Ampère à un cercle centré sur l'axe Oz (voir ci-dessous) :



$$\text{Si } r < a, \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta, \text{ si } r > a, \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

c. À la surface du fil, $r = a$.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}(a) \wedge \vec{B}(a)}{\mu_0} = \frac{I^2}{2\gamma \pi^2 a^3} \vec{e}_r$$

L'énergie électromagnétique entre donc dans le fil radialement, et la puissance rayonnée dans le fil par unité de longueur vaut $2\pi a \Pi = \frac{I^2}{\gamma \pi a^2}$.

La puissance cédée à l'unité de longueur du fil par effet Joule vaut $\Pi I^2 = \frac{I^2}{\gamma \pi a^2}$.

L'énergie convertie en effet Joule provient donc de l'énergie électromagnétique rayonnée par le champ électromagnétique créé par courant électrique. Cette énergie est elle-même, bien évidemment, fournie par le générateur de courant.

S'entraîner

1. La variation du champ magnétique est source d'un champ électrique, puisque :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} B_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \vec{z}_c$$

La région est vide de charges, donc $\text{div} \vec{E} = 0$.

Le calcul de \vec{E} est donc analogue à celui du champ \vec{B} créé par un cylindre parcouru par une densité volumique uniforme de courant suivant son axe Oz .

\vec{E} est orthoradial et ne dépend que de r . On le calcule à partir de sa circulation sur un cercle de rayon r , centré sur Oz , perpendiculaire à cet axe, et orienté suivant \vec{z}_θ en coordonnées polaires cylindriques d'axe Oz

$$r < a \quad 2\pi r E = \frac{1}{\tau} B_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \pi r^2, \text{ soit :}$$

$$\vec{E}(r, t) = \frac{1}{2\tau} B_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) r \vec{z}_\theta = \frac{\tau}{2\tau} B(t) \vec{z}_\theta$$

Le rapport entre les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique est $\frac{u_E}{u_M} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{E^2}{B^2} = \frac{r^2}{4c^2 \tau^2}$, il reste

donc toujours inférieur à $\frac{a^2}{4c^2 \tau^2}$. Si $\frac{a^2}{4c^2 \tau^2} \ll 1$, soit $\tau \gg \frac{a}{4c}$ ($\approx 10^{-10}$ s pour un rayon de 1 cm), la contribution magnétique à l'énergie est prépondérante.

2. À la surface du solénoïde, $r = a$, $\vec{E}(a, t) = \frac{a}{2\tau} B(t) \vec{z}_\theta$, et le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{a}{2\mu_0 \tau} B^2(t) \vec{z}_r$$

Son flux à travers la surface est donc :

$$2\pi a \ell \frac{a}{2\mu_0 \tau} B^2(t) = \pi a^2 \ell \frac{B^2(t)}{\mu_0 \tau}$$

L'énergie totale rayonnée par le solénoïde vers l'extérieur s'écrit :

$$\int_0^\infty \pi a^2 \ell \frac{B_0^2}{\mu_0 \tau} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = \pi a^2 \ell \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

On reconnaît l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée à l'instant initial dans le volume $\pi a^2 \ell$ du solénoïde.

1. a. En choisissant les conventions indiquées sur la figure ci-avant :

$$U_0 = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}, \text{ et } i(t) = \frac{dq}{dt} \text{ (courant de charge).}$$

On élimine la charge entre ces deux équations :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0.$$

On intègre en tenant compte des conditions initiales : à $t = 0$, la charge du condensateur est nulle, et sa valeur est continue en $t = 0$. À $t = 0$, i est discontinu et vaut

$$i(0) = \frac{U_0}{R}.$$

Remarque : lorsque l'on ferme ou ouvre un interrupteur, sont continues les tensions aux bornes des condensateurs et les intensités des courants dans les inductances.

$$\text{Donc : } i(t) = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

$$\sigma = \frac{q}{S} = C(U_0 - Ri(t)) = \frac{CU_0}{S} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right),$$

$$\text{avec } \dot{C} = \varepsilon_0 \frac{S}{e} = \varepsilon_0 \frac{\pi a^2}{e} : \sigma = \varepsilon_0 \frac{U_0}{e} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right).$$

b. Le champ entre les armatures vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{z}_c = \frac{U_0}{e} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \vec{z}_c.$$

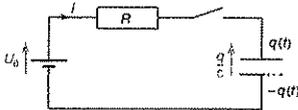
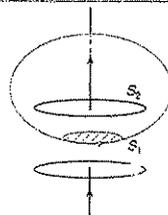
Le champ magnétique créé par les variations du champ électrique est orthoradial :

$$2\pi a B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \pi a^2, \text{ soit :}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{a}{2RC} \frac{U_0}{e} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \vec{z}_\theta \\ &= \mu_0 \frac{1}{2RC\pi a} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \vec{z}_\theta \end{aligned}$$

Si, pour appliquer le théorème d'Ampère, on choisit comme surface s'appuyant sur le cercle de rayon a une surface passant à l'extérieur des armatures (voir figure), ce sera l'intensité du courant $i(t)$ qui interviendra : $2\pi a B = \mu_0 i(t)$, soit :

$$\vec{B} = \mu_0 i(t) = \frac{\mu_0 U_0}{2\pi a R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \vec{z}_\theta$$



Les deux expressions sont donc bien identiques :

rappelons que $\text{div}(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$ entraîne que le flux

de ce vecteur est le même à travers toute surface s'appuyant sur un contour orienté. Dans le conducteur le deuxième terme est négligeable, et dans le condensateur, c'est le courant de conduction qui est nul.

2. a. Le vecteur de Poynting en un point du cylindre s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{\vec{E}(a) \wedge \vec{B}(a)}{\mu_0} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{U_0}{e} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \vec{z} \wedge \frac{\mu_0 U_0}{2\pi a R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \vec{\theta}_0 \\ &= -\frac{U_0^2}{2\pi a e R} \left(\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)\right) \vec{\theta}_r \end{aligned}$$

Remarque : on observe donc une énergie électromagnétique entrant dans le condensateur par sa surface latérale, et non par les fils d'amenée du courant.

La puissance entrant dans le cylindre est donc :

$$\begin{aligned} \frac{U_0^2 \left(\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)\right)}{2\pi a e R} \\ = \frac{U_0^2}{R} \left(\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)\right) \end{aligned}$$

b. L'énergie électrostatique emmagasinée à l'instant t est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \int_0^t \frac{U_0^2}{R} \left(\exp\left(-\frac{t'}{RC}\right) - \exp\left(-\frac{2t'}{RC}\right)\right) dt' \\ &= \frac{U_0^2}{R} RC \left(\frac{1}{2} - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} CU_0^2 \left(1 - 2 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)\right)$$

c. La puissance fournie par le générateur vaut

$$U_0 i(t) = \frac{U_0^2}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

d. À chaque instant, le générateur fournit une puissance

$$\frac{U_0^2}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \text{ et le condensateur emmagasine la puissance}$$

$$\frac{U_0^2}{R} \left(\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)\right)$$

La différence vaut $\frac{U_0^2}{R} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)$, qui s'écrit encore :

$Ri^2(t)$, puissance cédée par effet Joule à la résistance de charge R .

• L'énergie totale cédée par le générateur à l'instant t vaut :

$$\mathcal{E}_0(t) = \int_0^t \frac{U_0^2}{R} \exp\left(-\frac{t'}{RC}\right) dt = CU_0^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$

• L'énergie transformée en chaleur dans la résistance vaut :

$$\mathcal{E}_J(t) = \int_0^t \frac{U_0^2}{R} \exp\left(-\frac{2t'}{RC}\right) dt' = \frac{CU_0^2}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)\right)$$

On retrouve bien $\mathcal{E}_0(t) = \mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_J(t)$.

Si l'on fait le bilan d'énergie à la fin de la charge, le générateur a fourni $\mathcal{E}_0(\infty) = CU_0^2$, le condensateur a

emmagasiné $\mathcal{E}(\infty) = \frac{1}{2} CU_0^2$, et la résistance a dissipé sous forme de chaleur : $\mathcal{E}_J(\infty) = \frac{1}{2} CU_0^2$, indépendamment de la valeur de la résistance.

Lors de la charge d'un condensateur, quel que soit le choix de la résistance de charge, la moitié de l'énergie fournie par le générateur est perdue sous forme de chaleur.

3 I. Lorsque le gaz devient conducteur, les charges se déplacent de la sphère S_1 vers la sphère S_2 , de manière isotrope. La répartition de charges est donc à symétrie sphérique, et la densité de courant dans le gaz est de la forme $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_r$, en coordonnées sphériques.

a. On en déduit que $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(r, t) \vec{e}_r$, et que $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}$ puisqu'il n'existe pas de champ de vecteurs axiaux à symétrie sphérique.

b. D'après l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{rot} \vec{E} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right), \text{ donc, si } \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0},$$

$$\vec{j} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Le conducteur est ohmique : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Donc $\vec{E}(\vec{r}, t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

À l'instant $t = 0$, la sphère S_1 est chargée avec $Q(r, 0) = Q_0$, et en utilisant le théorème de Gauss, on détermine la valeur du champ $\vec{E}(r, 0) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$.

$$R_1 < r < R_2 : \vec{E}(r, t) = \frac{Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \text{ en posant}$$

$\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$ temps de relaxation du conducteur.

c. Ce champ est à chaque instant proportionnel au champ électrostatique $\vec{E}(r, 0) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, et donc à

divergence nulle : $\text{p}(\vec{r}, t) = 0$ entre les sphères.

Remarque : le transfert de charges se fait par conduction dans le gaz. Les charges des ions fixes compensent les charges des porteurs mobiles et, à chaque instant, il y a autant de charges mobiles qui entrent dans un volume donné que de charges qui en sortent.

d. À l'intérieur de la sphère de rayon R_1 , et à l'extérieur de la sphère de rayon R_2 , \vec{j} est nul, et donc \vec{E} est indépendant du temps et garde sa valeur initiale.

$$\text{Pour } r < R_1, \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}.$$

$$\text{Pour } r > R_2, \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

$$2. \frac{dP}{dt} = \gamma E^2 = \gamma \frac{Q_0^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} \text{ soit, pour tout l'espace}$$

entre les sphères :

$$P = \int_{R_1}^{R_2} \gamma \frac{Q_0^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{\gamma Q_0^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)}{4\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right].$$

Pour trouver l'énergie totale dissipée par effet Joule, on intègre la puissance de $t = 0$ à $t = \infty$:

$$W_J = \int_0^\infty \frac{\gamma Q_0^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)}{4\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] dt = \frac{\gamma Q_0^2 \tau}{8\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] \\ = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

3. Dans l'état initial, le champ est nul à l'intérieur de la sphère de rayon R_1 égal à $\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, à l'extérieur de cette sphère. Dans l'état final, le champ est nul à l'intérieur de la sphère de rayon R_2 égal à $\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, à l'extérieur.

La densité volumique d'énergie électromagnétique se réduit à la densité volumique d'énergie électrique $\epsilon_0 \frac{E^2}{2}$, et l'énergie totale initiale s'écrit :

$$W_i = \frac{1}{2} \int_{R_1}^\infty \frac{Q_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R_1}$$

L'énergie totale finale s'obtient en changeant R_1 en R_2 :

$$W_f = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}$$

Lors de la décharge du condensateur, l'énergie perdue se transforme en effet Joule cédé au milieu conducteur entre les sphères.

4 a. Le potentiel subi à l'instant t par une particule en M dont la position est repérée par $\vec{OM} = \vec{r}(t)$ est $\vec{A}(\vec{r}(t), t)$. Ce potentiel vecteur n'est donc plus fonction que de la seule variable t par l'intermédiaire de la loi horaire du mouvement $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$.

La vitesse de la particule est $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{A}(x(t+dt), y(t+dt), z(t+dt), t+dt) - \vec{A}(x, y, z, t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \text{ où l'on reconnaît}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{A}.$$

b. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left[-\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right].$$

$$\text{Puisque } \vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \text{ et } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{d\vec{A}}{dt} - (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{A} :$$

$$\frac{d(\vec{p} + q\vec{A})}{dt} = q \left[-\text{grad}V + \vec{v} \wedge \text{rot} \vec{A} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{A} \right].$$

$\vec{v} \wedge \text{rot} \vec{A} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{A} = \text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{A})$ si l'on considère \vec{v} comme un vecteur fixe.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left[-\text{grad}V + \text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right]$$

$$c. \frac{dL_z}{dt} = \frac{d[\vec{r} \wedge (\vec{p} + q\vec{A})] \cdot \vec{e}_z}{dt}$$

$$= \vec{r} \wedge q \left[-\text{grad}V + \text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right] \cdot \vec{e}_z + \vec{v} \wedge (\vec{p} + q\vec{A}) \cdot \vec{e}_z$$

$\text{grad}V$ est colinéaire à \vec{r} , et \vec{v} est colinéaire à \vec{p} .

$$\vec{A} = \frac{B}{2}(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x), \quad \text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \frac{B}{2} \text{grad}(xy, -yv, xv) \\ = \frac{B}{2}(v_y \vec{e}_x - v_x \vec{e}_y) \\ = \frac{1}{2}(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{q}{2} [\vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) + \vec{v} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{r})] \cdot \vec{e}_z.$$

On permute les vecteurs des deux produits mixtes :

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{qB}{2} [(\vec{e}_z \wedge \vec{r}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{e}_z)] + [(\vec{e}_z \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{e}_z \wedge \vec{r})] = 0$$

d. La projection M_z sur l'axe Oz du moment magnétique est égale à $-\frac{e}{2m} [(\vec{r} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{e}_z]$.

En l'absence de champ magnétique, L_z est aussi la projection sur Oz du moment cinétique orbital. Soit $\ell \hbar$ sa valeur. Quand on établit le champ, L_z reste égal à $\ell \hbar$ à chaque instant puisqu'indépendant du temps, et la projection sur Oz du moment cinétique orbital vaut $L_z - (\vec{r} \wedge -e\vec{A}) \cdot \vec{e}_z$, soit $\ell \hbar + (\vec{r} \wedge e\vec{A}) \cdot \vec{e}_z$.

Le moment magnétique orbital varie donc de

$$-\frac{e^2}{2m} [(\vec{r} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{e}_z] = -\frac{e^2}{2m} \left[\vec{r} \wedge \frac{\vec{B} \wedge \vec{r}}{2} \right] \cdot \vec{e}_z \\ = -\frac{e^2 B}{4m} (r^2 - z^2) = -\frac{e^2 B}{4m} (x^2 + y^2).$$

Il apparaît donc un moment magnétique opposé au champ pour chaque électron.
S'il y a n électrons par unité de volume, et si la distance moyenne au noyau de ces électrons est a :

$$a^2 = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = \frac{3}{2} \langle x^2 + y^2 \rangle \text{ à cause de l'isotropie}$$

de l'espace:
$$\vec{\beta} = -\frac{ne^2 a^2}{6m} \vec{B}.$$

5 1. a. L'élément de charge surfacique σdS est soumis

au champ électrique $\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, et au champ

magnétique \vec{B} créé par le moment \vec{M} .
Lorsque la sphère tourne, elle acquiert une vitesse de convection suivant le vecteur \vec{e}_ϕ des coordonnées polaires sphériques de centre O et d'axe Oz

Le moment en O d'un vecteur \vec{V} s'écrit $r\vec{e}_r \wedge \vec{V}$, il est donc perpendiculaire au plan défini par \vec{e}_r et \vec{V} .

Si \vec{V} appartient à un plan diamétral, le moment sera suivant \vec{e}_ϕ , et donc perpendiculaire à Oz : le moment par rapport à l'axe Oz sera donc nul. Les forces contenues dans un plan diamétral ont donc un moment par rapport à l'axe Oz nul. Il en est ainsi de la force due au potentiel $V(r)$, et de la force magnétique, orthogonale à la vitesse, donc à \vec{e}_ϕ .

Donc seule la force électrique $-\sigma dS \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ contribue au moment par rapport à l'axe Oz .

Le potentiel vecteur du moment magnétique en un point de la surface s'écrit $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \wedge \frac{\vec{e}_r}{a^2}$.

$$d\vec{F} = -\sigma dS \frac{\mu_0 \partial M}{4\pi \partial t} \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{e}_r}{a^2} = \frac{\mu_0 \sigma dS M}{4\pi \tau a^2} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r.$$

Le moment de cette force élémentaire par rapport à l'axe Oz s'écrit :

$$d\Gamma_z = a\vec{e}_r \wedge \left(\frac{\sigma dS M}{\tau a^2} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r \right) \cdot \vec{e}_z \\ = \frac{\sigma dS M}{\tau a^2} a (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r) \cdot (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r) = \frac{\sigma dS M}{\tau a^2} a \sin^2 \theta.$$

À chaque instant le moment résultant s'écrit donc : $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \sin \theta \vec{e}_\phi$, et l'élément de surface sur la sphère lorsque la fonction à intégrer est indépendante de ϕ s'écrit $dS = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$. Le moment résultant vaut donc :

$$\Gamma_z = \int_0^\pi \frac{\mu_0 \sigma M}{2 \tau a^2} a^3 \sin^3 \theta d\theta = \frac{2\mu_0 q M_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{3\tau} \frac{1}{4\pi a \tau} \\ = \frac{\mu_0}{6\pi} \frac{q M_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{a \tau}.$$

b. Le théorème scalaire du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{dL_z}{dt} = \Gamma_z, \text{ donc, à la fin de la transformation :}$$

$$L_z = \int_0^\infty \frac{\mu_0}{6\pi} \frac{q M_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{a \tau} dt = \frac{\mu_0 q M}{6\pi a}$$

2. Si l'on fait une interprétation corpusculaire en termes de photons d'énergie $h\nu$, de densité volumique n , de quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}$, la densité volumique

d'énergie électromagnétique u s'identifie avec : $u = n h \nu$, \vec{R} , vecteur densité de courant énergétique, s'écira

$$\vec{R} = n h \nu \vec{c}$$

puisque \vec{c} est la vitesse des photons.

La densité volumique de quantité de mouvement est

$$\vec{g} = n \frac{h\nu}{c} \frac{\vec{c}}{c} \text{ soit } \vec{g} = \frac{\vec{R}}{c^2}$$

$$\text{Si } r < a \quad \vec{E} = \frac{\mu_0 M}{4\pi \tau} \sin \theta \frac{\vec{e}_\phi}{r^2}$$

$$\text{et si } r > a \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 M}{4\pi \tau} \sin \theta \frac{\vec{e}_\phi}{r^2},$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2M \cos \theta \vec{e}_r + M \sin \theta \vec{e}_\theta), \text{ donc, si } r < a,$$

$$\vec{g} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \left(\frac{\mu_0 M}{4\pi \tau} \sin \theta \frac{\vec{e}_\phi}{a^2} \right) \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2M \cos \theta \vec{e}_r + M \sin \theta \vec{e}_\theta) \right)$$

et, si $r > a$,

$$\vec{g} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \left(\frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 M}{4\pi \tau} \sin \theta \frac{\vec{e}_\phi}{a^2} \right) \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2M \cos \theta \vec{e}_r + M \sin \theta \vec{e}_\theta) \right).$$

Le moment de \vec{g} par rapport à l'axe Oz n'est non nul que pour la composante suivant \vec{e}_ϕ .

Si $r < a$, cette composante est nulle ; si $r > a$, cette composante vaut : $\frac{1}{c^2} \left(\frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{M \sin \theta}{4\pi r^5} \right) \vec{e}_\phi$.

Le moment par rapport à z de la quantité de mouvement du champ s'écrit donc :

$$L_{gz} = \int_0^\pi \int_a^\infty 2\pi r^2 dr \sin \theta d\theta \left(\frac{q}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{M \sin \theta}{4\pi r^5} \right) (r\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\phi) \cdot \vec{e}_z \\ (\vec{r}\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\phi) \cdot \vec{e}_z = -r\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = r \sin \theta.$$

$$L_{gz} = \int_0^\pi \int_a^\infty dr \sin \theta d\theta \left(\frac{\mu_0 q M \sin \theta}{4\pi} \frac{1}{2r^3} \right) (r \sin \theta) \\ = \int_0^\pi \int_a^\infty dr \sin \theta d\theta \left(\frac{\mu_0 q M \sin \theta}{4\pi} \frac{1}{2r^3} \right) (r \sin \theta).$$

$$L_{gz} = \frac{\mu_0 q M}{8\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{\mu_0 q M}{6\pi a}$$

Entre l'état initial et l'état final, ce moment diminue de $\frac{\mu_0 q M_0}{6\pi a}$, ce qui est le moment cinétique acquis par la sphère.

Il y a donc conservation du moment cinétique total des deux systèmes en interaction : sphère chargée et champ électromagnétique (le moment magnétique a une quantité de mouvement constamment nulle).

1. a. $\frac{h}{m_\gamma c} = \frac{h\nu}{m_\gamma c^2} \frac{c}{\nu}$, de même dimension que $\frac{c}{\nu}$, est donc une longueur.

Si $m_\gamma \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$, et les termes correctifs étant en η^2 disparaissent.

b. $\text{div}(\text{rot}\vec{B}) = 0$, donc

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \text{div}\vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{div}\vec{E} - \eta^2 \text{div}\vec{A} \text{ doit être nul.}$$

En remplaçant $\text{div}\vec{E}$ par son expression :

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \text{div}\vec{j} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\eta^2}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \eta^2 \text{div}\vec{A} = 0.$$

La conservation de la charge s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\vec{j} = 0$.

La compatibilité entre ces deux équations implique donc que

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}\vec{A} = 0.$$

c. Pour trouver les équations aux dérivées partielles vérifiées par les potentiels, on remplace les champs par leur expression en fonction des potentiels :

$$\text{div}\left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right] - \text{div}(\text{grad}V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \eta^2 V, \text{ soit, en utilisant}$$

$$\text{la jauge de Lorentz : } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \eta^2 V.$$

$$\square V - \eta^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}V \right] - \eta^2 \vec{A},$$

$$\text{soit, puisque } \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}\vec{A} = 0 : \square \vec{A} - \eta^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}.$$

2. a. En statique $\Delta V - \eta^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, et en symétrie sphérique, en posant $V(r) = \frac{f(r)}{r}$:

$$0 < r < R : \frac{d^2}{dr^2} f(r) - \eta^2 f(r) = 0,$$

$$\text{et } r > R : \frac{d^2}{dr^2} f(r) - \eta^2 f(r) = 0.$$

b. Les solutions sont du type :

$$f(r) = f_0 \exp(\eta r) + f_1 \exp(-\eta r),$$

$$\text{soit } V(r) = \frac{f_0}{r} \exp(\eta r) + \frac{f_1}{r} \exp(-\eta r).$$

• $r < R$: pour ne pas diverger en $r=0$, il faut $f_0 + f_1 = 0$:

$$V(r) = \frac{C}{r} \sinh(\eta r) \text{ qui tend vers } \eta C \text{ quand } r \rightarrow 0.$$

• $r > R$: pour ne pas diverger à l'infini,

$$V(r) = \frac{D}{r} \exp(-\eta r).$$

La continuité en $r = R$ donne la relation supplémentaire $D = C \sinh(\eta R) \exp(\eta R)$.

3. a. V étant borné en $r = R$, la seule cause de discontinuité de \vec{E} est due au terme $\frac{\rho}{\epsilon_0}$ dans l'expression de la divergence. Le raisonnement fait en électrostatique reste donc valable :

$$\vec{E}_{R^+} - \vec{E}_{R^-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r.$$

b. En statique $\vec{E} = -\text{grad}V$, donc :

$$r < R : \vec{E}(r) = C \left[\frac{1}{r^2} \sinh \eta r - \frac{\eta}{r} \cosh \eta r \right] \vec{e}_r,$$

$$r > R : \vec{E}(r) = C \sinh \eta R \exp \eta R \left[\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\eta}{r} \right) \exp -\eta r \right] \vec{e}_r.$$

$$\vec{E}_{R^+} - \vec{E}_{R^-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r, \text{ s'écrit}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = C \left[\sinh \eta R \left(\frac{1}{R^2} + \frac{\eta}{R} \right) - \left[\frac{1}{R^2} \sinh \eta R - \frac{\eta}{R} \cosh \eta R \right] \right]$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = C \frac{\eta}{R} \left[\sinh \eta R + \cosh \eta R \right] = C \frac{\eta}{R} \exp \eta R.$$

$$C = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 \eta} \exp -\eta R$$

$$r < R : V(r) = \frac{\sigma R \exp -\eta R}{\epsilon_0 \eta r} \sinh(\eta r)$$

$$r > R : V(r) = \frac{\sigma R \sinh(\eta R)}{\epsilon_0 \eta r} \exp(-\eta r)$$

Remarque : pour $\eta = 0$, $r < R$, $V(r) = 0$, $r > R$,

$$V(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}. \text{ On retrouve bien les résultats classiques.}$$

4. a. Au premier ordre en $(\eta r)^2$, $\frac{\sinh(\eta r)}{\eta r} \approx 1 + \frac{(\eta r)^2}{6}$.

$r < R$:

$$V(r) = \frac{\sigma R \exp -\eta R}{\epsilon_0} \exp \eta R \left[1 + \frac{(\eta r)^2}{6} \right] = V_0 \left[1 + \frac{(\eta r)^2}{6} \right]$$

$$b. \Delta V = V(R) - V(R') = V_0 \eta^2 \frac{R^2 - R'^2}{6}$$

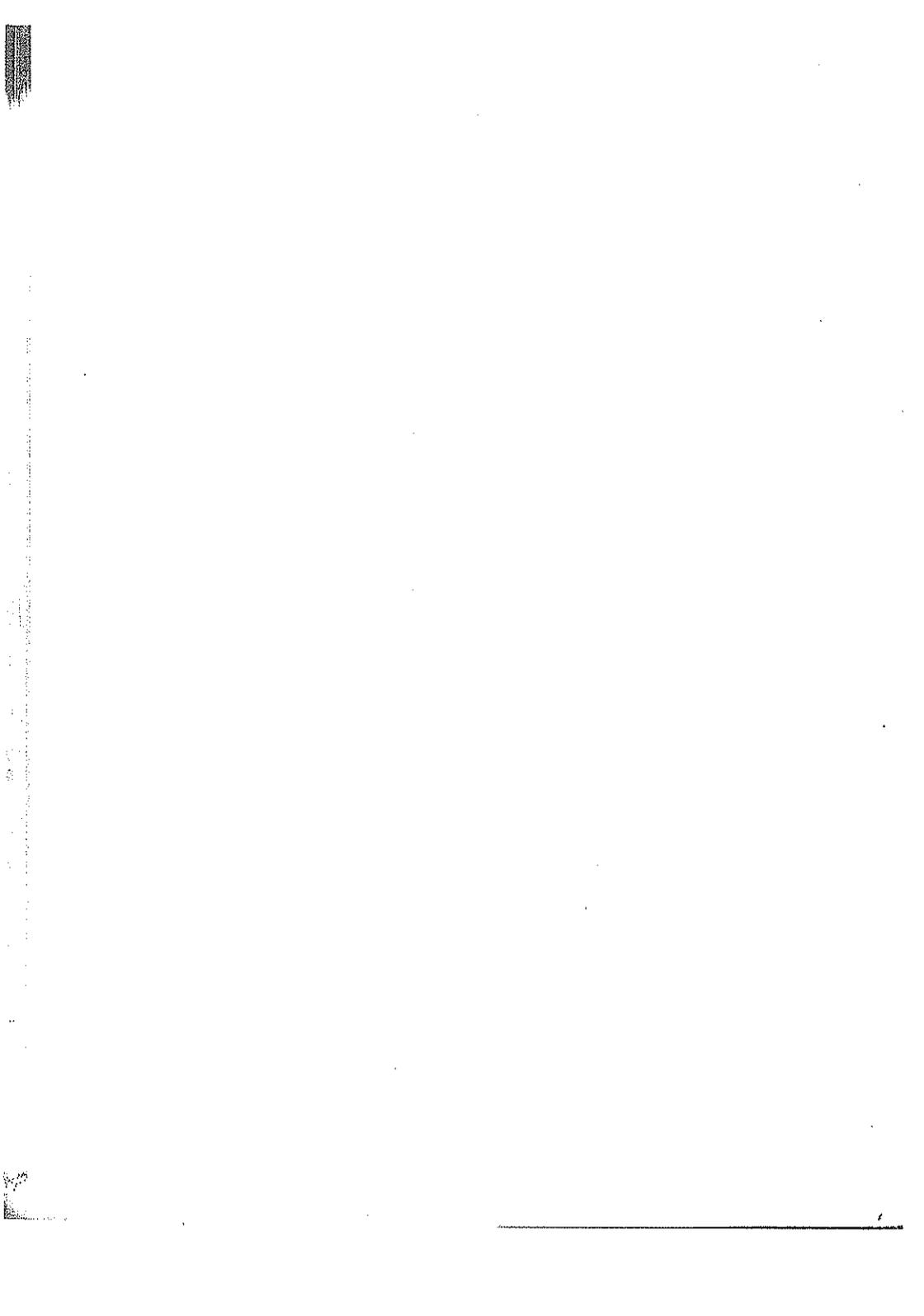
$$c. \frac{\Delta V}{V_0} = \eta^2 \frac{R^2 - R'^2}{6} = 2,44 \cdot 10^{-2} \cdot \eta^2 < 0,32 \cdot 10^{-9},$$

soit $\eta < 1,15 \cdot 10^{-4} \cdot \text{m}^{-1}$.

$$m_\gamma = \frac{h\eta}{c} < 4,0 \cdot 10^{-47} \text{ kg}$$

$$\frac{m_\gamma}{m_e} < 4,5 \cdot 10^{-17}$$

L'hypothèse d'une masse nulle est donc tout à fait cohérente.



Induction électromagnétique

1 Compléments d'électrocinétique

1.1. Électrocinétique en régime quasi-stationnaire

On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires : on néglige les phénomènes de propagation, ce qui revient à ne pas tenir compte du courant de déplacement dans les équations de Maxwell.

Dans les milieux conducteurs, les distributions de courant sont alors décomposables en boucles de courant, modélisables par des circuits filiformes parcourus par une intensité $i(t)$ qui est la même en tout point à chaque instant : loi des nœuds.

Exceptionnellement, s'il y a un condensateur, la boucle de courant se prolonge dans le condensateur par le courant de déplacement, et l'intensité dans le circuit est en général non nulle. Le calcul des champs magnétiques se fait comme en magnétostatique, mais le champ peut être variable au cours du temps.

Pour un conducteur ohmique de conductivité γ , le temps de relaxation du conducteur est négligeable, la vitesse limite est supposée atteinte à chaque instant, et on écrit encore $\vec{j} = \gamma \frac{\vec{E}}{q}$.

1.2. Notion de force électromotrice

Dans un circuit, si les charges ne sont soumises qu'à un champ électrique de la forme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, l'énergie qu'elles reçoivent lorsqu'elles font un tour complet s'écrit $\oint_{\Gamma} q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -q\oint_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{\ell} = 0$.

Or, elles cèdent de l'énergie au circuit qui est dissipée sous forme de chaleur par effet Joule. Donc pour que l'intensité ne soit pas nulle, il faut que se rajoute l'action d'une force supplémentaire $q\vec{E}_m$ dont la circulation ne soit pas nulle sur le circuit fermé. \vec{E}_m est appelé **champ électromoteur**.

Remarque

Malgré son nom, il ne s'agit évidemment pas d'une force. Ce vocabulaire provient d'une époque où les notions de force et d'énergie n'étaient pas encore clarifiées : le théorème de l'énergie cinétique s'appelait ainsi théorème des forces vives.

➤ $e_m = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$ est appelée force électromotrice du circuit, notée f.é.m.

Si \vec{E}_m est localisé sur un tronçon AB du circuit, ce qui est vrai dans le cas d'une pile par exemple, cette partie du circuit est le générateur.

➤ Pour un générateur : $e_{ABm} = \int_{AB} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$ est appelée f.é.m du générateur.

On la mesure en circuit ouvert : $\vec{j} = \vec{0}$.

Pour un conducteur ohmique :

$$\frac{1}{\gamma} \int_{AB} \vec{j} \cdot d\vec{\ell} = 0, \text{ soit : } \int_{AB} [-\text{grad}V + E_m] \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_B + e_{ABm} = 0.$$

➤ $V_B - V_A = e_{ABm}$; la f.é.m d'un générateur est égale à la différence de potentiel entre ses bornes en circuit ouvert.

1.3. Loi de Pouillet

Pour un circuit fermé, $\vec{j}(M, t) = (-\text{grad}V(M, t) + \vec{E}_m(M, t)) = \frac{1}{\gamma s(M)} \vec{u}(M, t)$, où s est la section du conducteur au point M , et $\vec{u}(M, t)$ la tangente au circuit au point considéré.

Pour l'ensemble du circuit, la circulation de $\text{grad}V$ étant nulle, on obtient :

$$e_m = \oint_{\Gamma} \frac{1}{\gamma s(M)} \vec{u}(M, t) \cdot d\vec{\ell}.$$

Si on parcourt le circuit Γ dans le sens positif choisi pour les intensités :

➤ $e_m = Ri(t)$, avec $R = \oint_{\Gamma} \frac{1}{\gamma s(M)} d\ell$ résistance du circuit.

R ne dépend que de la géométrie du circuit et de la nature du matériau.

Si la f.é.m. est localisée, avec la même convention d'orientation (figure 1) :

• dans la partie du circuit contenant un

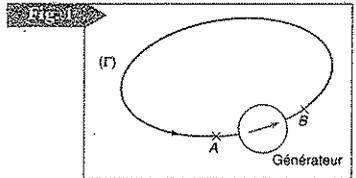
générateur, $[(V_A - V_B) + \int_{AB} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}] = R_{AB}i(t)$,
soit :

➤ $V_A - V_B = R_{AB}i(t) - e_{ABm}$, où R_{AB} est la résistance interne du générateur.

• dans la partie ne contenant pas le générateur, $\int_{BA} (-\text{grad}V) \cdot d\vec{\ell} = Ri$, soit : $V_B - V_A = Ri(t)$.

Si la force supplémentaire $q\vec{E}_m$ a une circulation négative, c'est-à-dire si de l'énergie est prélevée aux dépens du mouvement des charges pour être transformée dans des convertisseurs (moteurs, électrolyseurs,...), on parle de force contre-électromotrice $e'_m = \oint_{\Gamma} \vec{E}'_m \cdot d\vec{\ell}$, ou en tenant compte de la localisation, $e'_{mAB} = -\int_{AB} \vec{E}'_m \cdot d\vec{\ell}$, notée f.c.é.m.

$$e_m(t) = Ri(t) + e'_m(t)$$



1.4. Interprétation énergétique

La f.é.m. $\epsilon_m(t)$ est l'énergie fournie par le générateur à une charge unitaire qui le traverse. L'intensité est la charge qui traverse une section du conducteur par unité de temps.

La puissance fournie par les générateurs est $P(t) = \epsilon_m(t)i(t)$.

On la retrouve sous forme de puissance Joule $Ri(t)$ et de puissance contre-électromotrice $P'(t) = \epsilon'_m(t)i(t)$.

2 Induction électromagnétique

2.1. Phénomènes d'induction

2.1.1. Loi de Lenz

Si le flux du champ magnétique à travers un circuit fermé varie au cours du temps, il apparaît dans ce circuit un courant induit source d'un champ magnétique propre qui tend à s'opposer à cette variation.

2.1.2. Loi de Faraday

Le courant induit est dû à l'existence dans le circuit d'une f.é.m. d'induction, dont la valeur est donnée par la loi de Faraday :

La f.é.m. induite dans un circuit fermé est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux du champ magnétique qui le traverse : $\epsilon_m = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Cette variation de flux peut être due à la variation du champ magnétique à travers un circuit immobile : cas de Neumann, ou au déplacement du circuit dans un champ magnétique non uniforme : cas de Lorentz.

C'est le plus souvent une combinaison de ces deux phénomènes.

3 Circuit fixe dans un champ magnétique variable (cas de Neumann)

3.1. Loi de Faraday

C'est une conséquence de la loi de Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \text{ donc } \epsilon_m = \oint_{\Gamma} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

la seule cause de variation du flux étant liée aux variations de \vec{B} , on retrouve bien la loi de Faraday.

Remarque

Le flux du champ magnétique à travers un circuit fermé et orienté Γ ne dépend pas du choix de la surface s'appuyant sur Γ , et est égal à la circulation du potentiel vecteur \vec{A} sur ce circuit.

3.2. Auto-induction

On peut décomposer le champ magnétique entre un champ magnétique $\vec{B}_p(t)$ propre créé par le courant $i(t)$ parcourant le circuit et un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}}(t)$ dû à d'autres sources.

$$\Phi_p = \iint_S \vec{B}_p(t) \cdot d\vec{S} = Li(t), \text{ où } L \text{ est l'inductance propre du circuit.}$$

L ne dépend que de la géométrie du circuit et de la présence éventuelle de matériaux magnétiques dans son voisinage.

Si le circuit est fixe, L est constante.

▶ La force électromotrice d'auto-induction s'écrit : $\epsilon_m = -L \frac{di}{dt}$.

3.3. Induction mutuelle entre deux circuits filiformes fermés

On considère deux circuits fixes : Γ_1 parcouru par un courant d'intensité $i_1(t)$, et Γ_2 parcouru par un courant d'intensité $i_2(t)$.

3.3.1. Force électromotrice d'induction mutuelle

Le champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}_1}(t)$ s'exerçant sur Γ_1 est dû au circuit Γ_2 , et est donc proportionnel à l'intensité $i_2(t)$. Il en est donc de même de son flux à travers une surface quelconque S_1 s'appuyant sur Γ_1 .

$\Phi_{\text{ext}} = \iint_{S_1} \vec{B}_{\text{ext}_1}(t) \cdot d\vec{S}_1 = M_{2 \rightarrow 1} i_2(t)$, où l'inductance mutuelle $M_{2 \rightarrow 1}$ ne dépend que de la géométrie des deux circuits et de leurs positions respectives.

▶ La force électromotrice induite dans le circuit Γ_1 s'écrit : $\epsilon_{m_1} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{2 \rightarrow 1} \frac{di_2}{dt}$.

3.3.2. Théorème de Neumann

Si l'on considère le flux total du champ magnétique à travers le circuit Γ_2 , il s'écrit de même :

$$\Phi_2(t) = L_2 i_2(t) + \Phi_{\text{ext}_2}(t) = L_2 i_2(t) + M_{1 \rightarrow 2} i_1(t).$$

On montre que les coefficients d'induction mutuelle $M_{2 \rightarrow 1}$ et $M_{1 \rightarrow 2}$ vérifient le théorème de Neumann :

▶ Les inductances mutuelles $M_{2 \rightarrow 1}$ et $M_{1 \rightarrow 2}$ sont égales.

Voir l'exercice 2 de « Savoir appliquer le cours ».

3.4. Bilan énergétique de l'établissement du courant dans deux circuits fixes et indéformables

3.4.1. Équations de l'établissement du circuit

On considère deux circuits fixes Γ_1 et Γ_2 parcourus par les courants d'intensité respective $i_1(t)$ et $i_2(t)$, de résistances R_1 et R_2 , d'auto-inductances L_1 et L_2 , d'inductance mutuelle M , alimentés par des générateurs de f.é.m e_1 et e_2 indépendantes du temps.

À l'instant 0, on ferme les circuits et on considère l'évolution des intensités dans les deux circuits :

- pour le circuit 1 : $e_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1$;
- pour le circuit 2 : $e_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2$.

3.4.2. Bilan énergétique

Les générateurs fournissent les puissances $e_1 i_1$ et $e_2 i_2$. Le bilan énergétique s'écrit à chaque instant :

$$e_1 i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + M \frac{di_2}{dt} i_1 \quad \text{et} \quad e_2 i_2 = R_2 i_2^2 + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M \frac{di_1}{dt} i_2.$$

La puissance $e_1 i_1 + e_2 i_2$ fournie par les générateurs se retrouve sous la forme d'une puissance $R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$ cédée par effet Joule, et d'une puissance :

$$L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M \frac{di_2}{dt} i_1 + M \frac{di_1}{dt} i_2 = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right],$$

les circuits sous forme d'énergie magnétique : $\frac{d\mathcal{E}_{\text{magn}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right]$.

En prenant l'origine des énergies magnétiques lorsque les intensités sont nulles, donc en l'absence de champ magnétique :

L'énergie magnétique d'un ensemble de deux circuits s'écrit :

$$\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

En remarquant que $L_1 i_1 + M i_2$ représente le flux total Φ_1 de champ magnétique à travers le circuit Γ_1 , et $L_2 i_2 + M i_1$ le flux total Φ_2 de champ magnétique à travers le circuit Γ_2 :

L'énergie magnétique d'un ensemble de deux circuits peut aussi s'écrire :

$$\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2} (\Phi_1 i_1 + \Phi_2 i_2).$$

Ce résultat se généralise à un nombre quelconque de circuits : $\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k i_k$.

3.4.3. Conséquences

La densité volumique d'énergie magnétique est $\frac{B^2}{2\mu_0}$, donc, avec la convention d'une énergie magnétique nulle en l'absence de champ magnétique, l'énergie magnétique est toujours positive.

• Pour un seul circuit : $\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L i^2$, donc L est toujours positive. L'inductance mutuelle M entre deux circuits peut, elle, être positive ou négative, selon les conventions d'orientation relative des deux circuits.

• Pour un ensemble de deux circuits : $\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \geq 0$, quelles que soient les intensités.

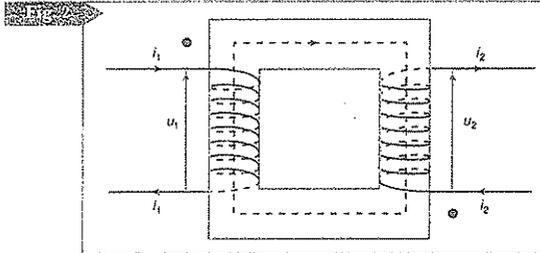
On démontre alors que $M^2 \leq L_1 L_2$.

D'une manière générale : $M_{i \rightarrow j}^2 = M_{j \rightarrow i}^2 \leq L_i L_j$.

3.5. Application au transformateur de tension

3.5.1. Description et conventions de signe

Un transformateur (figure 2) est constitué d'un noyau ferromagnétique autour duquel sont placés deux enroulements solénoïdaux ou toroïdaux comportant l'un n_1 spires, et l'autre n_2 spires. Le premier enroulement, ou circuit primaire, est parcouru par un courant d'intensité i_1 , le second, ou circuit secondaire, par un courant d'intensité i_2 . En appliquant une tension alternative aux bornes du circuit primaire, le flux magnétique à travers le circuit secondaire varie et y crée une f.é.m induite.



Les signes des flux envoyés par un circuit à travers l'autre dépendent des conventions d'orientation relative prises pour ces circuits, donc pour le sens positif des intensités. **On convient** de les orienter dans le même sens, c'est-à-dire de manière à ce que lorsque les intensités dans les deux circuits sont positives, les flux des champs magnétiques qu'ils créent à travers les spires soient positifs pour les deux circuits. Cela revient à orienter positivement les intensités entrant dans les « bornes homologues ».

Les **bornes homologues** sont les entrées des enroulements telles que des intensités positives entrant par ces bornes créent des champs magnétiques dont les flux à travers les spires des deux circuits sont positifs. Elles sont repérées d'un point ou d'une étoile.

On choisit ensuite le sens positif pour les tensions par une convention récepteur pour le primaire, et générateur pour le secondaire.

L'effet du noyau ferromagnétique est de « canaliser » les lignes de champ magnétique, de sorte que toutes les spires sont traversées par le même flux ϕ , et d'augmenter considérablement l'intensité du champ magnétique créé par les intensités parcourant les enroulements.

3.5.2. Modélisation du transformateur idéal

Un transformateur idéal est un transformateur dans lequel toutes les pertes (électriques et magnétiques) sont négligées.

- La canalisation des lignes de champ par le matériau ferromagnétique est parfaite : soit Φ_1 et Φ_2 les flux à travers les deux circuits, $\Phi_1 = n_1 \phi$, et $\Phi_2 = n_2 \phi$.
- Les résistances R_1 et R_2 des enroulements sont négligées.

Soit u_1 la tension aux bornes du primaire, en convention récepteur : $u_1 - n_1 \frac{d\phi}{dt} = R_1 i_1 = 0$.

Soit u_2 la tension aux bornes du secondaire, en convention générateur : $u_2 + n_2 \frac{d\phi}{dt} = -R_2 i_2 = 0$.

◦ Il n'y a aucune perte énergétique : la puissance reçue à l'entrée se retrouve disponible à la sortie $u_2 i_2 = u_1 i_1$, puisqu'en convention récepteur ui est l'énergie reçue, et en convention générateur ui est l'énergie cédée au circuit extérieur.

3.5.3. Applications du transformateur

Les équations précédentes permettent d'obtenir les propriétés suivantes.

Transformateur de tension : $\frac{u_2}{u_1} = -\frac{n_2}{n_1} = -m.$

Le choix du rapport m du nombre des spires permet d'adapter la valeur de la tension à l'utilisation choisie : transformateurs éleveurs et abaisseurs de tension pour le transport de l'énergie électrique ; suivis d'un redresseur, alimentation en basse tension continue des appareils électroniques...

Transformateur de courant : $u_1 i_1 = u_2 i_2$, donc $\frac{i_2}{i_1} = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{1}{m}.$

L'utilisation principale est la mesure de courants de forte intensité : le primaire ne comporte que très peu de spires, le secondaire en comporte beaucoup et est fermé sur un ampèremètre de très faible résistance : $u_2 \approx 0$, et comme i_2 est faible, la puissance en sortie est très faible, et il en est de même de la puissance cédée par le circuit dont on mesure l'intensité.

• Adaptation d'impédance en régime sinusoïdal

Si l'on place à l'entrée du transformateur un générateur d'impédance complexe $\underline{Z}_1 = \frac{u_1}{i_1}$, l'ensemble formera un générateur d'impédance complexe.

Adaptation d'impédance : $\underline{Z}_2 = \frac{u_2}{i_2} = m^2 \frac{u_1}{i_1} = m^2 \underline{Z}_1.$

On démontre que le transfert de puissance d'un générateur sinusoïdal d'impédance \underline{Z} à une impédance complexe \underline{Z}' est maximal si elles sont complexes conjuguées $\underline{Z}' = \underline{Z}^*$.

Après avoir adapté les phases, on peut donc adapter les modules par un transformateur : il suffit alors de choisir $m^2 = \frac{|\underline{Z}'|}{|\underline{Z}|}.$

• Isolation galvanique

Un transformateur d'isolement est un transformateur pour lequel $m = 1$: on le place à la sortie d'un générateur dont un des pôles est relié à la masse. Les circuits primaire et secondaire n'étant pas reliés électriquement, on obtient ainsi, sans perte de puissance, un générateur différentiel.

4 Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire (cas de Lorentz)

On considère un circuit orienté Γ , dont les points M sont en déplacement à la vitesse $\vec{v}_s(M)$ par rapport à un référentiel galiléen, plongé dans un champ magnétique $\vec{B}(M)$ indépendant du temps.

4.1. Circulation de $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$

$\frac{\vec{F}}{q} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}$, avec $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_t$. Le terme en $\vec{v}_t \wedge \vec{B}$ correspond à l'effet Hall, toujours négligeable dans un bon conducteur, et perpendiculaire au fil, donc n'engendrant pas de courant supplémentaire.

Si le terme $v_r \wedge \vec{B}$ a une composante non nulle parallèle au fil, il va provoquer un déplacement des porteurs de charge dans le sens du fil, et donc générer une densité volumique de courant.

La force électromotrice d'induction du circuit s'écrit donc : $e_m = \oint_{\Gamma} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{\Gamma} (v_r \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$.

Les variations du potentiel vecteur du champ extérieur sont nulles puisque le champ est constant. Elles portent donc uniquement sur le champ magnétique propre.

$e_{m_1} = \oint_{\Gamma} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ est la f.é.m d'auto-induction.

$e_{m_2} = \oint_{\Gamma} (v_r \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$ est la force électromotrice de Lorentz.

$v_r \wedge \vec{B}$ est appelé champ électromoteur de Lorentz.

4.2. Loi de Faraday

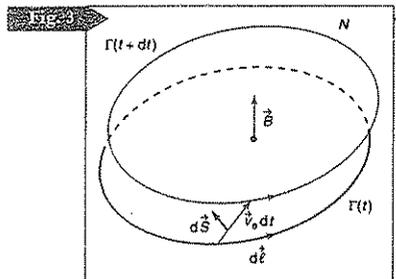
$$e_{m_2} = \oint_{\Gamma} (v_r \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} (d\vec{\ell} \wedge v_r) \cdot \vec{B}$$

$d\vec{\ell} \wedge \vec{v}_r$ est la surface balayée par l'élément de longueur $d\vec{\ell}$ par unité de temps. e_{m_2} représente donc le flux de \vec{B} à travers la surface balayée par le circuit par unité de temps.

Si l'on considère la surface fermée constituée par la surface S_1 s'appuyant sur le circuit Γ à l'instant t , la surface S_2 s'appuyant sur le circuit Γ à l'instant $t + dt$, et la surface balayée par le circuit entre ces instants, (figure 3), le flux de \vec{B} sortant de cette surface est nul puisque \vec{B} est à flux conservatif. On peut aussi le décomposer en flux à travers S_2 , qui est aussi le flux $\Phi(t + dt)$ à travers Γ à l'instant $t + dt$, puisque \vec{B} ne dépend pas du temps, en flux $\Phi(t)$ à travers Γ à l'instant t , et en flux balayé.

En tenant compte des conventions d'orientation des surfaces :

$$0 = \Phi(t + dt) - \Phi(t) + e_{m_2} dt.$$



On retrouve la loi de Faraday : $e_m = e_{m_1} + e_{m_2} = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Attention : ce raisonnement n'est valable que si le circuit est physiquement le même aux instants t et $t + dt$, et ne s'applique donc pas s'il y a commutation. Il faut alors calculer directement la circulation du champ électromoteur de Lorentz. (voir exercice 3 « Tester ses connaissances »).

5 Conversion électromécanique

5.1. Puissance des forces de Laplace et bilan énergétique

La puissance élémentaire de l'élément de force de Laplace $d\vec{F}$ s'exerçant sur un élément de courant $i d\vec{\ell}$ d'un circuit se déplaçant à la vitesse \vec{v}_e s'écrit :

$$dP = i(d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e = i(\vec{B} \wedge \vec{v}_e) \cdot d\vec{\ell}.$$

Pour l'ensemble du circuit C , cette puissance est donc égale à $i \oint_C \vec{B} \wedge \vec{v}_e \cdot d\vec{\ell} = -ie_{m_2}$, égale et opposée à la puissance de la force électromotrice de Lorentz.

Si un opérateur déplace un circuit parcouru par un courant d'intensité i dans un champ magnétique \vec{B} de manière adiabatique (c'est-à-dire en ne lui fournissant aucune énergie cinétique), la puissance fournie par l'opérateur est transformée en puissance électrique de la f.é.m d'induction. Il y a conversion d'énergie mécanique en énergie électrique. C'est le principe des générateurs électriques.

Réciproquement, si l'on fournit de l'énergie électrique à l'aide d'un générateur extérieur, le circuit se met en mouvement sous l'action des forces de Laplace, et il y a conversion d'énergie électrique en énergie mécanique.

Pour un mouvement global de translation : $\vec{F} \cdot \vec{v} + e_{m_2} i = 0$.

5.2. Cas des machines tournantes

La f.é.m d'induction de Lorentz est alors proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation Ω autour de l'axe Δ , le coefficient de proportionnalité ayant la dimension d'un flux Φ_0 . L'action mécanique se traduit par un moment Γ_Δ des forces de Laplace par rapport à l'axe de rotation.

▶ Pour une machine tournante, la conversion électromécanique s'écrit : $\Phi_0 i + \Gamma_\Delta \Omega = 0$.

5.3. Application au haut-parleur électrodynamique

5.3.1. Description du haut-parleur

C'est un exemple de moteur électrique, c'est-à-dire une conversion d'énergie électrique en énergie mécanique.

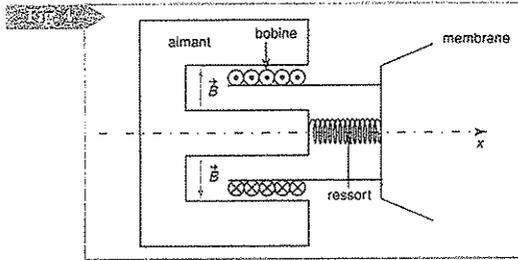
Le son produit par le haut-parleur est produit par les vibrations d'une membrane qui engendre une onde acoustique dans l'air. Ces vibrations sont générées par la force de Laplace $F(t)$ s'exerçant sur une bobine alimentée par une tension $u(t)$ et placée dans un champ magnétique créé par un aimant permanent. L'ensemble possède une symétrie de révolution autour de l'axe Ox . En voici le schéma dans un plan méridien (figure 4).

Remarque

Φ_0 a la dimension d'un flux, mais ne présente pas réellement le flux de \vec{B} à travers une surface finie.

PC

PSI



L'ensemble bobine + membrane, de masse m , est mobile en translation suivant Ox dans l'entrefer de l'aimant permanent. Il est maintenu par une liaison élastique qui exerce sur lui une force de rappel $-kx(t)$ qui le ramène vers sa position d'équilibre mécanique $x = 0$. Son déplacement est freiné par une force d'amortissement visqueux représentée par le terme $-\frac{m}{\tau}\dot{x}$. Le champ magnétique \vec{B} créé par l'aimant dans l'entrefer a une direction pratiquement radiale, et au niveau de la bobine son module peut être considéré comme constant.

5.3.2. Équation mécanique

D'après les conventions d'orientation choisies sur la figure : la force de Laplace a sa résultante suivant Ox égale à $\int_{\text{bobine}} -iBdl = -i\ell B$ si ℓ est la longueur totale de l'enroulement

soumis au champ magnétique $m\ddot{x} = -\frac{m\dot{x}}{\tau} - kx - i\ell B$, soit : $\boxed{\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \frac{k}{m}x = -\frac{i\ell B}{m}}$ (1)

5.3.3. Équation électrique

La f.é.m d'induction se décompose en une f.é.m d'auto-induction $-L\frac{di}{dt}$ (L est fixe, puisque la bobine est indéformable), et une f.é.m d'induction de Lorentz

$$\int_{\text{enroulement}} \dot{x}\vec{\ell}_x \wedge B\vec{\ell}_r \cdot d\vec{\ell}_0 = B\dot{x}\ell.$$

L'équation électrique s'écrit donc, sur l'ensemble du circuit :

$$u(t) - L\frac{di}{dt} + B\dot{x}\ell = Ri, \text{ soit } \boxed{u(t) = Ri + L\frac{di}{dt} - B\dot{x}\ell} \quad (2)$$

5.3.4. Bilan énergétique

Les équations (1) et (2) forment un système couplé par les termes $-i\ell B$ et $+B\dot{x}\ell$.

En multipliant la première par $m\dot{x}$ et la seconde par i , on retrouve la conversion électromécanique :

$$u(t)i(t) = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} - iB\dot{x}\ell.$$

Interprétation en terme d'énergie

La puissance fournie par le générateur se retrouve sous forme de puissance Ri^2 cédée au circuit par effet Joule, de puissance magnétique emmagasinée dans le circuit $Li\frac{di}{dt}$, et de puissance $-iB\dot{x}\ell$ cédée au terme de couplage :

$$-iB\dot{x}\ell = m\ddot{x}\dot{x} + \frac{m\dot{x}^2}{\tau} + kx\dot{x}.$$

Cette puissance est transformée en puissance mécanique : puissance cinétique $m\dot{x}\dot{x}$, puissance cédée à l'extérieur par la force d'amortissement $\frac{m\dot{x}^2}{\tau}$, et puissance potentielle élastique $kx\dot{x}$.

Remarque
La grandeur utile est
le terme $\frac{m\dot{x}^2}{\tau}$, qui
correspond à la puissance
cédée à l'onde
acoustique.

$$u(t)i(t) = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) + \frac{m\dot{x}^2}{\tau}$$

5.3.5. Étude en régime sinusoïdal

Les deux équations électrique et mécanique sont linéaires. On peut donc les résoudre en notation complexe pour déterminer le régime forcé pour une excitation $u(t)$ sinusoïdale :

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_0 e^{j\omega t}$$

Les solutions sont cherchées sous la forme $\underline{i}(t) = \underline{i}_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{v}_0 e^{j\omega t}$.

$$\underline{u}_0 = R\underline{i}_0 + jL\omega\underline{i}_0 - B\ell\underline{v}_0 \text{ et } j\omega\underline{v}_0 + \frac{\underline{v}_0}{\tau} + \frac{k}{j\omega m}\underline{v}_0 = -\underline{i}_0 \frac{\ell B}{m}, \text{ soit, en éliminant } \underline{v}_0 :$$

$$\underline{u}_0 = \left[R + jL\omega + \frac{j\omega \frac{(B\ell)^2}{m}}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) + j\frac{\omega}{\tau}} \right] \underline{i}_0 = (R + jL\omega + \underline{Z}_m) \underline{i}_0$$

\underline{Z}_m représente l'influence du mouvement de la bobine sur l'équation électrique, et est appelée *impédance motionnelle*.

6 Courants de Foucault

Pour un circuit filiforme, les courants induits sont géométriquement bien définis. Dans un conducteur volumique, les courants induits circulent dans la masse du conducteur : on les appelle **courants de Foucault**.

6.1. Chauffage par induction

Un matériau conducteur soumis à un champ magnétique variable est donc le siège de courants de Foucault conduisant à une perte d'énergie par effet Joule et à un échauffement du matériau, d'autant plus importants que la fréquence est élevée.

Dans les transformateurs, c'est le cas du noyau ferromagnétique autour duquel se font les enroulements ; pour minimiser ces « pertes de fer », on choisit un matériau « divisé » dans lequel les courants de Foucault ne peuvent pas se développer (voir exercice 2 de « S'entraîner »), ou, à plus haute fréquence, on prend un matériau ferrimagnétique qui est isolant tout en ayant des propriétés magnétiques.

Dans d'autres domaines, cet effet est recherché car il permet un échauffement directement dans la masse du matériau : cas du chauffage par induction. La fréquence doit être optimisée pour que les intensités soient importantes, mais que les courants pénètrent dans la masse et donc que l'épaisseur de peau soit suffisante.

6.2. Freinage électromagnétique

Dans un conducteur mobile, d'après la loi de Lenz, la force de Laplace volumique due à ces courants s'oppose toujours au déplacement.

Ce freinage qui transforme l'énergie cinétique en effet Joule peut être un effet parasite que l'on cherche à minimiser, ou, au contraire peut constituer un freinage électromagnétique d'appoint intéressant.

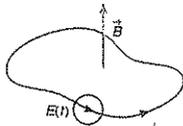
Exemple : frein électromagnétique des poids lourds ou des trains TGV.

Avant la colle

Tester ses connaissances

» Corrigés p. 167

1 Soit un circuit filiforme plan, parfaitement déformable, de résistance R , alimenté par un générateur de f.é.m. $E(t)$, parcouru par un courant $i(t)$, soumis à l'action d'un champ magnétique extérieur $\vec{B}(t)$ uniforme perpendiculaire à son plan. Le sens d'orientation du circuit est choisi pour que le flux de $\vec{B}(t)$ soit positif (voir figure ci-contre), c'est aussi le sens conventionnel choisi pour le courant.

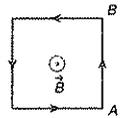


Lesquelles de ces propositions sont vraies ?

- a. Les forces de Laplace déforment le circuit pour augmenter sa surface.
- b. Si $i > 0$, les forces de Laplace déforment le circuit dans le sens d'une augmentation de sa surface.
- c. Si un opérateur extérieur déforme la surface en l'augmentant, on transforme de l'énergie mécanique en énergie électrique.
- d. On suppose ici que le champ magnétique extérieur est nul : quand on alimente le circuit, il se déforme pour augmenter sa surface.
- e. Si le champ magnétique extérieur est nul, quand on alimente le circuit, il ne se passe rien.
- f. Le circuit est fermé, mais n'est plus alimenté par un générateur. Si B diminue, la surface du circuit va augmenter.

2 Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

On considère un circuit carré de côté a , de résistance R uniformément répartie, plongée dans un champ magnétique

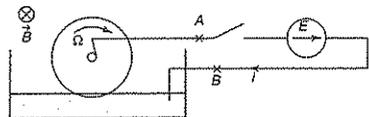


variable $\vec{B}(t)$ dont on supposera qu'il ne s'applique que sur le circuit (voir ci-contre). On place un voltmètre de forte résistance entre deux sommets consécutifs A et B dans le sens d'orientation choisi sur le circuit carré, pour mesurer $V_A - V_B$. On appelle $\varepsilon = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$ la f.é.m. induite dans le circuit.

Qu'indiquera le voltmètre ?

- a. $\frac{\varepsilon}{4}$.
- b. $-\frac{3\varepsilon}{4}$.
- c. cela dépend de la position du voltmètre.

3 On considère le dispositif appelé « roue de Barlow » (voir ci-dessous).



C'est un disque métallique de rayon a , en rotation à la vitesse angulaire Ω autour de

son axe, plongé dans un champ magnétique constant \vec{B} perpendiculaire à son plan. Le circuit, de résistance totale R , comporte encore un générateur de f.é.m E et se ferme sur la roue par un contact au niveau de l'axe et en un point d'une cuve remplie d'un liquide conducteur dans lequel baigne la base de la roue.

1. Le flux de \vec{B} à travers le circuit est constant.

a. Vrai. b. Faux.

2. Il n'y a pas de f.é.m induite.

a. Vrai. b. Faux.

4 On reprend le dispositif précédent en circuit ouvert, et on fait tourner la roue à la vitesse angulaire Ω . Quelle sera la différence de potentiel entre les deux extrémités A et B du circuit ?

5 Redémontrer : on considère deux référentiels galiléens \mathcal{R}_0 et \mathcal{R} en translation à la vitesse \vec{v}_1 par rapport à \mathcal{R}_0 . Écrire dans ces deux référentiels la force de Lorentz s'exerçant sur une charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} quelconque par rapport à \mathcal{R}_0 . En écrivant qu'en mécanique newtonienne la force se conserve dans un changement de référentiel galiléen, retrouver l'expression du champ électromoteur de Lorentz $\vec{E}_m = \vec{v}_1 \wedge \vec{B}$.

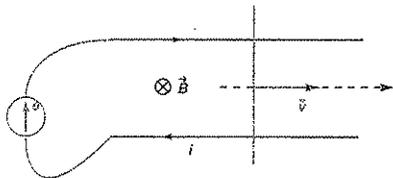
6 L'énergie fournie par un champ magnétique constant est toujours nulle.

Dans le cas d'un circuit mobile à la vitesse \vec{v}_1 dans un champ magnétique indépendant du temps, écrire le travail des forces de Laplace et compléter le bilan énergétique pour retrouver ce résultat.

Savoir appliquer le cours

> Corrigés p. 168

1 On considère un circuit horizontal formé de deux rails métalliques parallèles, distants de a , de résistance négligeable, fermé par une tige conductrice de résistance R , mobile sans frottement sur ces rails, initialement au repos. Le circuit est alimenté par un générateur de f.é.m e , et plongé dans un champ magnétique uniforme extérieur \vec{B} perpendiculaire à son plan (voir ci-dessous). On néglige le champ propre.



a. À l'instant $t = 0$, on ferme le circuit. Écrire l'équation électrique et l'équation mécanique. En déduire le mouvement de la tige et faire le bilan énergétique.

b. On rajoute dans le circuit un condensateur de capacité C , initialement non chargé.

Comment sont modifiées les équations précédentes ? Trouver le mouvement de la tige et faire le bilan énergétique.

2 Écrire l'expression du flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ envoyé par un circuit filiforme C_1 parcouru par un courant d'intensité i_1 à travers un circuit filiforme C_2 parcouru par un courant d'intensité i_2 , en fonction du potentiel vecteur \vec{A}_1 du champ créé par C_1 .

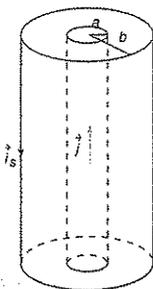
Écrire de même l'expression du flux $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ envoyé par le circuit C_2 à travers C_1 . Le potentiel vecteur de divergence nulle créé par un courant filiforme C_1 , dans l'A.R.Q.S, s'écrit :

$$\vec{A}_1(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{i_1}{MP_1} d\vec{\ell}_1.$$

Comparer les expressions des deux flux et en déduire le théorème de Neumann sur l'égalité entre les inductances mutuelles $M_{1 \rightarrow 2}$ et $M_{2 \rightarrow 1}$.

3 On considère deux cylindres métalliques coaxiaux d'axe Oz . Le cylindre intérieur est plein, de rayon a , parcouru par une intensité I volumique uniformément répartie sur sa section.

Le cylindre extérieur, infiniment mince, de rayon b , assure le retour du courant (voir ci-contre).



Calculer le champ magnétique créé en tout point par cette répartition de courant.

En déduire l'énergie magnétique emmagasinée, et la valeur de l'auto-inductance par unité de longueur du cylindre. Comparer au résultat de l'exercice 6 de « Savoir appliquer le cours » du chapitre 3.

4 1. Réécrire l'expression de l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i$ à partir des circulations des potentiels vecteurs, et montrer qu'elle s'écrit aussi $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \iiint_{\text{conducteurs}} \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau$.

2. On rappelle que

$$\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}.$$

En utilisant une méthode analogue aux intégrations par partie, transformer l'expression précédente de manière à retrouver la densité volumique d'énergie :

$$\mathcal{E}_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau.$$

5 On considère deux circuits indéformables, C_1 alimenté par un générateur de f.é.m e_1 , et parcouru par un courant d'intensité i_1 et C_2 alimenté par un générateur de f.é.m e_2 , parcouru par un courant d'intensité i_2 .

C_1 a une auto-inductance L_1 et une résistance R_1 , C_2 a une auto-inductance L_2 et une résistance R_2 .

1. Initialement, ils sont très éloignés l'un de l'autre.

Quelle est l'énergie magnétique des deux circuits ?

2. On les rapproche l'un de l'autre, les générateurs s'adaptant pour que les intensités restent constantes.

On pose $M(t)$ le coefficient d'inductance mutuelle, qui varie donc de 0 à M .

Écrire les équations électriques des deux circuits, et calculer l'énergie électrique fournie par les générateurs lors du déplacement.

En déduire l'énergie mécanique fournie par l'opérateur dans le déplacement, et donc le travail des forces de Laplace.

6 On considère le haut-parleur électrodynamique décrit au paragraphe 5.3 du cours.

a. Montrer que le graphe représentant dans le plan complexe l'impédance motionnelle Z_m quand ω varie est un cercle centré sur l'axe des réels dont on déterminera le centre et le rayon.

b. Calculer en fonction de Z_m le rendement du haut-parleur, défini comme le rapport entre la puissance moyenne cédée à l'onde acoustique et la puissance moyenne fournie par le générateur.

Pour quelle valeur de ω ce rendement est-il maximum ? Pourquoi utilise-t-on plusieurs haut-parleurs dans un baffle de bonne qualité ?

c. On utilise le même dispositif en microphone électrodynamique. L'énergie est fournie par la force de frottement visqueuse, et recueillie sous forme électrique dans une charge équivalente à une résistance R_v placée aux bornes de la bobine. Écrire le bilan énergétique.

1 – Brasage de rubans de laiton par induction

On modélise le laiton comme un milieu conducteur caractérisé par une conductivité $\gamma = 0,125 \cdot 10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, sans propriétés diélectriques ni magnétiques.

Partie A

- 1 Écrire les équations de Maxwell liant les vecteurs champ magnétique \vec{B} et champ électrique \vec{E} aux sources du champ \vec{j} vecteur densité volumique de courant et ρ densité volumique de charge.
- 2 Montrer que la charge volumique tend très rapidement vers 0 avec une constante de temps τ que l'on calculera. On donne $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.
- 3 On néglige le courant de déplacement devant le courant de conduction. Justifier cette approximation pour le laiton.
- 4 Avec ces approximations, trouver l'équation différentielle liant \vec{B} et \vec{j} lorsque ces champs sont de la forme $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\omega t}$ et $\vec{j} = \vec{j}_0 e^{i\omega t}$. Rappeler les conditions aux limites pour \vec{E} et \vec{B} à la traversée de la surface séparant l'air et le milieu considéré.

Partie B

On soumet une tôle de laiton d'épaisseur $2b$, de dimension très grande suivant Ox et Oy à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x$.

- 1 Par un raisonnement qualitatif, montrer qu'il apparaît une densité de courant \vec{j} à l'intérieur de la plaque, et un champ \vec{B} dont l'amplitude dépend de la cote z . Connaissez-vous le nom de cet effet ?
- 2 On définit $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ où z est un nombre complexe quelconque.
 Montrer que la solution $\vec{B}_z = B_0 \frac{\cosh(1+i)\frac{z}{\delta}}{\cosh(1+i)\frac{b}{\delta}} e^{i\omega t} \vec{e}_x$ convient.
 Déterminer δ en fonction des grandeurs caractéristiques du matériau et de la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$.
 Montrer que cette grandeur est homogène à une longueur, et donner sa valeur numérique pour $f = 200 \text{ Hz}$ et $f = 480 \text{ kHz}$.
- 3 Calculer la densité de courant \vec{j} qui apparaît dans le matériau.

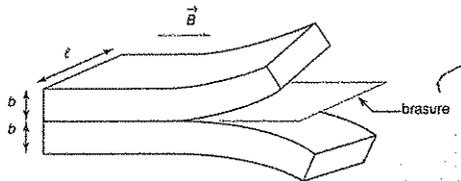
- 4 a. Calculer la puissance Joule moyenne $\langle P \rangle$ dissipée par unité de volume. On fera une moyenne dans le temps et dans l'espace. On pourra mettre $\langle P \rangle$ sous la

$$\text{forme : } \langle P \rangle = A \frac{\sinh \frac{2b}{\delta} - \sin \frac{2b}{\delta}}{\cosh \frac{2b}{\delta} + \cos \frac{2b}{\delta}}$$

- b. Que vaut $\langle P \rangle$ pour $\delta \gg 2b$ et $\delta \ll 2b$?

Partie C

On effectue un brasage de deux rubans en laiton d'épaisseur b pour fabriquer une bande d'épaisseur $2b$. Ce procédé de soudure consiste à interposer entre les pièces à souder un alliage ou métal fusible appelé brasure (voir ci-dessous).



Chaque ruban a une épaisseur $b = 10 \text{ mm}$ et une largeur $\ell = 50 \text{ mm}$. Les rubans passent dans un champ \vec{B} alternatif avec une vitesse de défilement v de $0,5 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$. La capacité thermique du laiton est $C = 420 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Sa masse volumique est $\rho = 8500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. La température ambiante est de $t_a = 25^\circ \text{C}$. Pour obtenir un assemblage suffisant, la température du ruban doit être portée à $t_b = 750^\circ \text{C}$. On suppose que la conduction thermique du laiton est suffisante pour assurer une température uniforme. La puissance Joule requise est donc : $2b\ell v\rho C(t_b - t_a)$.

- 1 Le rendement global de l'installation (source + inducteur) est de 43 %. Calculer la puissance électrique que doit avoir la source de courant qui alimente les bobines créant le champ \vec{B} .
- 2 Calculer la fréquence f optimale sachant que, pour un chauffage homogène, on adopte le critère $\frac{2b}{\delta} = 2$. Que se passerait-il si $f = 480 \text{ kHz}$?

résolution méthodique

Partie A

Cette question est très proche d'une question de cours. Pour découpler les équations liant \vec{E} et \vec{B} , il faut systématiquement penser à prendre le rotationnel du rotationnel, et utiliser la formule : $\text{rot}(\text{rot} \vec{V}) = \text{grad}(\text{div} \vec{V}) - \Delta \vec{V}$ qu'il est important de mémoriser.

On montre ensuite que l'on peut éliminer le terme en divergence. La solution dépend alors uniquement des conditions aux limites, différentes suivant les problèmes. Une fois \vec{E} ou \vec{B} obtenus.

les équations de couplage permettent de déterminer l'autre. Dans un conducteur, \vec{j} et \vec{E} étant proportionnels, étudier l'un ou l'autre est équivalent.

$$\vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \text{ et } \text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

2 L'équation de conservation de la charge s'écrit : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\vec{j} = 0$. On peut retrouver cette expression à partir des équations précédentes puisque $\text{div}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = 0$. Pour un conducteur ohmique $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$. L'évolution de la densité volumique de charge se fait suivant une loi de relaxation de constante de temps τ telle que :

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} = \frac{1}{\gamma \mu_0 c^2} = 7,1 \cdot 10^{-19} \text{ s.}$$

3 Négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction revient à négliger le temps de relaxation $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$ devant le temps T caractéristique des évolutions de \vec{E} . C'est donc toujours négligeable pour les fréquences ordinaires (A.R.Q.S.).

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0 \vec{\text{rot}}\vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{\text{rot}}\vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ soit, puisque}$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 : \vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$\text{En régime forcé à la pulsation } \omega : \vec{\Delta}\vec{B} = i\mu_0 \gamma \omega \vec{B}.$$

$$\text{De même : } \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{j}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{j}) - \vec{\Delta}\vec{j} = -\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \text{ soit, puisque } \text{div}\vec{j} = 0$$

$$\text{dans l'A.R.Q.S. : } \vec{\Delta}\vec{j} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \text{ En régime forcé à la pulsation } \omega : \vec{\Delta}\vec{j} = i\mu_0 \gamma \omega \vec{j}.$$

Les conditions aux limites sont : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$, et $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{i}_1 \wedge \vec{n}_{12}$, où \vec{n}_{12} est la normale à l'interface, dirigée du milieu 1 Laiton, vers le milieu 2 Air.

À la surface de séparation entre l'air et le conducteur, la composante tangentielle de \vec{E} est conservée, ainsi que la composante normale de \vec{B} . La conductivité étant considérée comme finie, il n'y a pas non plus de discontinuité de la composante tangentielle de \vec{B} , \vec{j} restant fini et donc \vec{i}_1 étant nul.

Partie B

On cherche à résoudre cette équation caractéristique de l'effet de peau, en régime sinusoïdal forcé. Le régime transitoire est toujours négligé. L'utilisation de la notation complexe est alors parfaitement adaptée. Les équations étant linéaires, cela revient à étudier la réponse à une excitation de forme quelconque, à condition de la décomposer en ses composantes sinusoïdales (décomposition de Fourier).

Lorsque l'on passe à l'énergie, la notation complexe ne convient plus, la partie réelle d'un produit étant différente du produit des parties réelles. Il y a alors deux solutions.

- Si l'on cherche la solution à chaque instant : repasser en notation réelle et effectuer le produit.
- Si l'on ne s'intéresse qu'à la valeur moyenne du produit au cours du temps : on peut utiliser les résultats en complexe, en remarquant que :

$\langle (a_0 \cos(\omega t + \phi_1))(b_0 \cos(\omega t + \phi_2)) \rangle = \frac{1}{2} a_0 b_0 \cos(\phi_1 - \phi_2)$ peut être obtenu à partir des nombres complexes associés $\underline{a}(t) = a_0 e^{i\phi_1} e^{i\omega t} = \underline{a}_0 e^{i\omega t}$ et $\underline{b} = b_0 e^{i\phi_2} e^{i\omega t} = \underline{b}_0 e^{i\omega t}$ en prenant la partie réelle du produit $\frac{1}{2} \underline{a}(t) \underline{b}(t)^*$ (ou $\frac{1}{2} \underline{b}(t) \underline{a}(t)^*$).

➤ 1 Les variations du champ magnétique créent à l'intérieur de la plaque des courants induits (courants de Foucault) qui seront à la source d'un champ magnétique propre qui s'ajoutera au champ magnétique provenant des sources extérieures : c'est l'effet de peau.

➤ 2 Les conditions aux limites sont invariantes suivant Ox et Oy , et les plans xOz sont plans de symétrie pour les conditions aux limites, donc pour le champ. On cherche donc un champ sous la forme $\vec{B} = \underline{B}_i(z) e^{i\omega t} \vec{e}_x$, vérifiant : $\underline{B}_i(b) = \underline{B}_i(-b) = \underline{B}_0$ et $\Delta \vec{B} = i\mu_0 \gamma \omega \vec{B}$.

On pose comme d'habitude $i\mu_0 \gamma \omega = \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2$, avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$

\vec{j} et $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ont même dimension, donc il en est de même pour γ et $\epsilon_0 \omega$. $\mu_0 \gamma \omega$ a donc la dimension de $\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. δ est donc une longueur.

Pour $f = 200$ Hz, $\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \pi f}} = 1$ cm ; pour 480 kHz, $\delta = 0,20$ mm.

$\Delta(\underline{B}_i(z) \vec{e}_x) = \frac{\partial^2 \underline{B}_i(z)}{\partial z^2} \vec{e}_x = \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 \underline{B}_i(z) \vec{e}_x$. La solution se décompose en sinh et cosh, et

la solution paire ne fait intervenir que cosh : $\underline{B}_i = B_0 \frac{\cosh(1+i)\frac{z}{\delta}}{\cosh(1+i)\frac{b}{\delta}} e^{i\omega t} \vec{e}_x$.

➤ 3 $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B}$, donc $\vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{1+i}{\delta} \frac{\sinh(1+i)\frac{z}{\delta}}{\cosh(1+i)\frac{b}{\delta}} e^{i\omega t} \vec{e}_y$.

4 a. $P = \frac{j^2}{\gamma}$. La valeur moyenne au cours du temps s'écrit, en notation complexe :

$$\langle P \rangle_t = \frac{\vec{j} \cdot \vec{j}^*}{2\gamma} = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \gamma \delta^2} (1+i)(1-i) \frac{\sinh(1+i)\frac{z}{\delta} \sinh(1-i)\frac{z}{\delta}}{\cosh(1+i)\frac{b}{\delta} \cosh(1-i)\frac{b}{\delta}} = f(z).$$

$$\sinh(1+i)\frac{z}{\delta} \sinh(1-i)\frac{z}{\delta} = \frac{1}{4} \left(e^{(1+i)\frac{z}{\delta}} - e^{-(1+i)\frac{z}{\delta}} \right) \left(e^{(1-i)\frac{z}{\delta}} - e^{-(1-i)\frac{z}{\delta}} \right) = \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2z}{\delta} - \cos \frac{2z}{\delta} \right).$$

$$\cosh(1+i)\frac{b}{\delta} \cosh(1-i)\frac{b}{\delta} = \frac{1}{4} \left(e^{(1+i)\frac{b}{\delta}} + e^{-(1+i)\frac{b}{\delta}} \right) \left(e^{(1-i)\frac{b}{\delta}} + e^{-(1-i)\frac{b}{\delta}} \right) = \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2b}{\delta} + \cos \frac{2b}{\delta} \right).$$

La valeur moyenne dans l'espace s'écrit :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b f(z) dz = \frac{B_0^2}{4b\mu_0^2\gamma\delta^2} \frac{\delta}{2} \frac{4 \sinh \frac{2b}{\delta} - 4 \sin \frac{2b}{\delta}}{\cosh \frac{2b}{\delta} + \cos \frac{2b}{\delta}} = \frac{B_0^2}{2b\mu_0^2\gamma\delta} \frac{\sinh \frac{2b}{\delta} - \sin \frac{2b}{\delta}}{\cosh \frac{2b}{\delta} + \cos \frac{2b}{\delta}}.$$

b. Pour $\delta \ll 2b$, $\frac{\sinh \frac{2b}{\delta} - \sin \frac{2b}{\delta}}{\cosh \frac{2b}{\delta} + \cos \frac{2b}{\delta}} = \frac{e^{\frac{2b}{\delta}}}{e^{\frac{2b}{\delta}}} = 1$ $\langle P \rangle = \frac{B_0^2}{2b\mu_0^2\gamma\delta}$

Pour $\delta \gg 2b$, $\sinh \frac{2b}{\delta} - \sin \frac{2b}{\delta} = \frac{(2b)^3}{6} + \frac{(2b)^3}{6} = \frac{8}{3} \left(\frac{b}{\delta} \right)^3$, et $\langle P \rangle = \frac{4B_0^2 b^2}{3\mu_0^2 \gamma \delta^4}$

Cette puissance est donc très faible.

Partie C

1 $P_{\text{elec}} = \frac{100}{43} 2b\ell v p C(t_1 - t_2) = 50 \text{ kW}$.

2 La fréquence optimale est 200 Hz, car on a vu plus haut que $\delta = 1 \text{ cm} = b$ à cette fréquence. Si $f = 480 \text{ kHz}$, la puissance moyenne serait beaucoup plus élevée, mais le chauffage ne serait pas homogène : la puissance serait délivrée uniquement sur l'épaisseur δ de l'effet de peau. Il risquerait d'y avoir fusion du laiton périphérique avant que la conduction thermique ne permette à la brasure d'atteindre la température désirée.

en conclusion

- Un conducteur dans un champ magnétique variable est le siège de courants volumiques appelés courants de Foucault.
- Ces courants sont à l'origine de l'effet de peau, et sont eux-mêmes localisés au voisinage de la surface du conducteur, sur une épaisseur d'autant plus faible que la conductivité est grande et la fréquence élevée.
- Il en résulte un échauffement du volume conducteur par effet Joule. Cette énergie était sous forme magnétique, et est donc fournie par les sources du champ magnétique.

2 – Convertisseur asynchrone

1 Production d'un champ tournant

On considère trois solénoïdes à noyau de fer dont les axes coplanaires sont décalés entre eux d'un angle égal à $\frac{2\pi}{3}$, tous équidistants du point O commun aux trois axes (voir figures ci-dessous a et b).

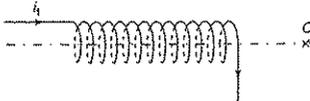


Figure a

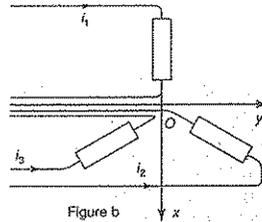


Figure b

Chaque solénoïde, alimenté par une intensité $i(t) = I_M \cos \omega t$, crée en O un champ magnétique $B_M \cos(\omega t) \vec{u}$, où \vec{u} est le vecteur unitaire sur l'axe de la bobine et $B_M = 0,8 \text{ T}$.

Dans ce montage, ils sont alimentés par des courants sinusoïdaux i de même pulsation $\omega = 100\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, de même valeur maximale I_M , mais déphasés entre eux de $\frac{2\pi}{3}$, soit :

$$i_1 = I_M \cos \omega t, \quad i_2 = I_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad i_3 = I_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

- On réunit les trois fils de retour en un seul fil : que peut-on dire de l'intensité de courant i dans le fil de retour ? Peut-on supprimer sans inconvénients ce fil de retour ?
- Montrer que l'ensemble des trois solénoïdes produit en O un champ magnétique \vec{B} de module $\frac{3}{2} B_M$, tournant dans le plan des axes à la vitesse angulaire ω dans un sens que l'on précisera.
- Dans l'hypothèse où l'un des trois solénoïdes n'est plus alimenté, montrer que le lieu de l'extrémité du vecteur \vec{B} est une ellipse de centre O dont on précisera les axes.

2 Principe du convertisseur asynchrone

Une bobine plate formée de n spires circulaires de surface s a son centre en O ; elle est mobile autour d'un axe diamétral orthogonal au plan des axes des trois solénoïdes.

- La bobine tourne à la vitesse angulaire $\Omega \neq \omega$, constante, dans le même sens que le champ magnétique tournant. À l'instant initial, \vec{B} et la normale \vec{n} à la bobine forment un angle θ_0 . Exprimer l'angle $(\vec{B}, \vec{n}) = \theta$ à l'instant t en fonction de Ω , ω , θ_0 et t .
- Calculer littéralement le flux ϕ total à travers la bobine plate à l'instant t et en déduire la f.é.m instantanée e induite dans celle-ci.
(On supposera le champ uniforme dans tout le plan de la bobine.)

c. On suppose réunies les extrémités de la bobine plate (circuit fermé) dont la résistance est r , et l'inductance ℓ . Exprimer l'intensité du courant i induit dans la bobine.

d. Exprimer le couple instantané qui s'exerce sur la bobine plate et en déduire le couple moyen Γ .

e. Étudier les variations de Γ en fonction de Ω . Montrer l'existence d'un couple maximum Γ_M pour une valeur Ω_M de Ω que l'on précisera. Calculer Γ_M et le couple Γ_D au démarrage. Tracer la courbe $\Gamma(\Omega)$, Ω prenant toutes les valeurs de 0 à l'infini. Distinguer sur la courbe le domaine correspondant à un fonctionnement en moteur et le domaine correspondant à un fonctionnement en générateur.

Application numérique : $\omega = 100\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $B_M = 0,8 \text{ T}$; $n = 200$;
 $s = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$; $r = 1,2 \Omega$, $\ell = 0,01 \text{ H}$.

f. Le moteur entraîne une machine qui offre un couple résistant $\Gamma = \Gamma_f + \alpha\Omega^2$. À quelle condition la machine démarre-t-elle ? Étudier la stabilité du fonctionnement de la machine.

résolution méthodique

Pour créer un champ sinusoïdal se déplaçant dans l'espace sans déplacement des sources, le procédé le plus simple consiste à faire la superposition de plusieurs champs créés par des sources déphasées les unes par rapport aux autres. Le calcul demandé est donc très classique, mais nécessite une bonne connaissance des relations trigonométriques. On peut aussi utiliser la notation complexe.

1 a. $i = I_M \left[\cos \omega t + \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \right]$.

En notation complexe : $i = I_M e^{j\omega t} \left[1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right]$. $1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}}$ est de la forme

$$1 + z + z^2 = \frac{1 - z^3}{1 - z}, \text{ avec } z^3 = e^{-j\frac{6\pi}{3}} = 1.$$

Donc $i = 0$. Le fil de retour est inutile : on peut se contenter de réunir les trois fils de retour.

b. On projette les trois champs dans le plan xOy , suivant les notations de la figure :

$$\bullet B_x = B_M \left[\cos \omega t - \frac{1}{2} \left(\cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \right) \right]$$

$$\frac{1}{2} \left(\cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \right) = \cos \omega t \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \cos \omega t \quad ($$

$$B_x = \frac{3}{2} B_M \cos \omega t.$$

$$\bullet B_y = B_M \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \right) \right] = B_M \sqrt{3} \sin \omega t \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$B_y = \frac{3}{2} B_M \sin \omega t.$$

savoir résoudre les exercices

C'est un champ de module $\frac{3}{2}B_M$ qui tourne avec la vitesse angulaire ω dans le sens positif autour de Oz

c. Les trois bobines étant équivalentes, on suppose que la bobine 1 est non alimentée :

$$B_x = \frac{1}{2}B_M \cos \omega t \text{ et } B_y = \frac{3}{2}B_M \sin \omega t.$$

L'extrémité du vecteur \vec{B} décrit dans le sens positif, avec la vitesse angulaire ω une ellipse dont le petit axe est suivant la direction de la bobine non alimentée.

2

Pour tous les exercices sur les machines électromagnétiques, il est important de ne pas faire d'erreur de signe. Il faut raisonner avec beaucoup de rigueur.

Le choix de l'orientation sur le circuit induit (ici la bobine plate) impose le signe du flux à travers celui-ci, et aussi le sens positif choisi pour l'intensité du courant qui sera toujours algébrique. Ici le texte impose la direction du vecteur \vec{n} , et donc le sens d'orientation sur la bobine.

Dans le cas de machines tournantes, le sens de rotation positif autour de l'axe conditionne le signe de la vitesse angulaire de rotation.

a. À l'instant t , le vecteur \vec{n} a tourné d'un angle Ωt , et le vecteur \vec{B} d'un angle ωt autour de Oz

$$\theta = (\vec{B}, \vec{n}) = \theta_0 + (\Omega - \omega)t.$$

b. Le flux de \vec{B} à travers la bobine s'écrit donc $\Phi = \frac{3}{2}nsB_M \cos(\theta_0 + (\Omega - \omega)t)$, et la

f.é.m. induite :
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3}{2}nsB_M(\Omega - \omega) \sin(\theta_0 + (\Omega - \omega)t).$$

c. L'équation électrique s'écrit :
$$e = \frac{3}{2}nsB_M(\Omega - \omega) \sin(\theta_0 + (\Omega - \omega)t) = ri(t) + \ell \frac{di}{dt}.$$

Pour résoudre cette équation, on passe en notation complexe : $\underline{i}(t) = \underline{i}_0 e^{j(\Omega - \omega)t}$.

Remarque : on peut aussi utiliser une construction de Fresnel.

L'interprétation de la notation complexe peut se faire de deux manières : on peut considérer que l'intensité du courant est la partie réelle ou la partie imaginaire de l'intensité complexe.

Dans le premier cas, il faudra choisir

$$\underline{e} = \frac{3}{2}nsB_M(\Omega - \omega) e^{j(\theta_0 - \frac{\pi}{2})} e^{j(\Omega - \omega)t} = -\frac{3j}{2}nsB_M(\Omega - \omega) e^{j\theta_0} e^{j(\Omega - \omega)t},$$

dans le second
$$\underline{e} = \frac{3}{2}nsB_M(\Omega - \omega) e^{j\theta_0} e^{j(\Omega - \omega)t}.$$

Avec la première représentation :
$$\underline{i}_0 = -\frac{3}{2j} \frac{nsB_M(\Omega - \omega)}{r + j\ell(\Omega - \omega)} e^{j\theta_0}.$$

d. La bobine est assimilable à un moment magnétique $\vec{M} = nsi(t)\vec{n}$. Dans le champ magnétique extérieur uniforme \vec{B} , elle est soumise à un couple

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = nsi(t)\vec{n} \wedge \vec{B} = -\frac{3B_M}{2} nsi(t) \sin(\theta_0 + (\Omega - \omega)t) \vec{z}.$$

Le signe - vient de ce que $\theta = (\vec{B}, \vec{n})$, et que l'on calcule le produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{B}$.
 Pour avoir le couple instantané, il faut écrire $i(t)$ en notation réelle. On le fait par module et argument. L'argument est entièrement défini entre $-\Pi$ et $+\Pi$ par la donnée de sa tangente et du signe de son cosinus ou de son sinus.

$$|i_0| = \frac{3 ns B_M |(\Omega - \omega)|}{2 \sqrt{r^2 + \ell^2 (\Omega - \omega)^2}} \quad \text{Soit } \alpha \text{ l'argument du nombre complexe } r + j\ell(\Omega - \omega) :$$

$$\tan \alpha = \frac{\ell(\Omega - \omega)}{r}, \text{ et } \cos \alpha > 0.$$

$$\text{Si } \Omega < \omega, -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0, \text{ si } \Omega > \omega, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

L'argument ϕ_0 de i est $\theta_0 - \frac{\pi}{2} - \alpha$ si $\omega < \Omega$, $\theta_0 - \frac{\pi}{2} - \alpha + \pi$ si $\omega > \Omega$ soit :

$$i(t) = \frac{3 ns B_M (\Omega - \omega)}{2 \sqrt{r^2 + \ell^2 (\Omega - \omega)^2}} \cos \left[(\Omega - \omega)t + \theta_0 - \frac{\pi}{2} - \alpha \right] = \frac{3 ns B_M (\Omega - \omega)}{2 \sqrt{r^2 + \ell^2 (\Omega - \omega)^2}} \sin [(\Omega - \omega)t + \theta_0 - \alpha]$$

Le couple instantané vaut donc :

$$\Gamma = -\frac{9 n^2 s^2 B_M^2 (\Omega - \omega)}{4 \sqrt{r^2 + \ell^2 (\Omega - \omega)^2}} \sin [(\Omega - \omega)t + \theta_0 - \alpha] \sin [\theta_0 + (\Omega - \omega)t]$$

La valeur moyenne au cours du temps du produit de deux sinusoïdes à la même fréquence déphasées de ϕ est $\frac{1}{2} \cos \phi$.

Le couple moyen est donc :

$$\langle \Gamma \rangle = -\frac{9 n^2 s^2 B_M^2 (\Omega - \omega)}{8 \sqrt{r^2 + \ell^2 (\Omega - \omega)^2}} \cos \alpha = -\frac{9 n^2 s^2 B_M^2 (\Omega - \omega)}{8} \frac{r}{r^2 + \ell^2 (\Omega - \omega)^2}$$

On peut poser $\Phi_0 = \frac{3}{2} ns B_M$, homogène à un flux :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{1}{2} \Phi_0^2 \frac{(\omega - \Omega)r}{r^2 + \ell^2 (\omega - \Omega)^2} = \frac{1}{2} \frac{\Phi_0^2}{\ell} \frac{\frac{\ell \omega}{r} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right)}{1 + \frac{\ell^2 \omega^2}{r^2} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}$$

e.

Il ne s'agit pas de faire une étude exhaustive de la fonction, mais de considérer ses principales caractéristiques.

C'est une fonction de Ω par l'intermédiaire de la variable $x = \frac{\ell \omega}{r} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right)$, du type $\frac{x}{1+x^2}$, impaire. La courbe est symétrique par rapport au point $x = 0$, soit $\omega = \Omega$.

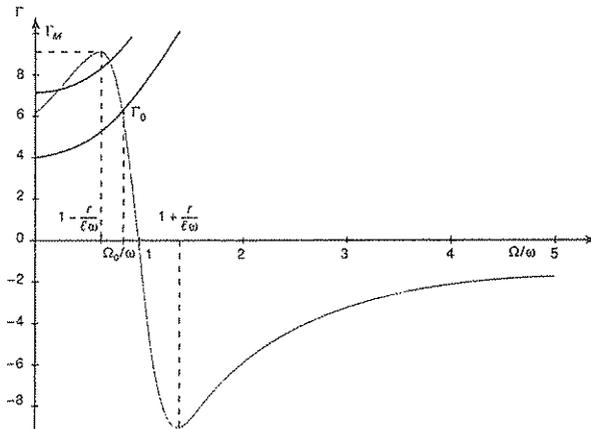
Sa dérivée s'annule pour $x^2 = 1$, et la fonction vaut alors $\frac{1}{2}$.

Le couple maximum positif est donc obtenu pour $\Omega_M = \omega \left(1 - \frac{r}{\ell\omega}\right)$, et vaut $\Gamma_M = \frac{1}{4} \frac{\Phi_0^2}{\ell}$.

Pour $\Omega = 0$, $\Gamma_D = \frac{1}{2} \frac{\Phi_0^2}{\ell} \frac{\ell\omega}{1 + \frac{\ell^2\omega^2}{r^2}}$. Le moteur démarre tout seul.

Le convertisseur fonctionne en moteur lorsque la puissance mécanique reçue par la bobine est positive, c'est-à-dire pour Γ positif : $\Omega < \omega$.

Il fonctionne en générateur lorsque la puissance est cédée par la bobine : Γ négatif, et $\Omega > \omega$ (voir ci-dessous).



A.N. : $\Phi_0 = 0,60$ Weber, $\frac{\ell\omega}{r} = 2,62$, $\Omega_M = 194 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (31 tours \cdot s $^{-1}$), $\Gamma_M = 9 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\Gamma_D = 6,0 \text{ N} \cdot \text{m}$.

f. La machine démarrera si $\Gamma_D > \Gamma_f$. La vitesse de rotation Ω_0 sera donnée par la solution de l'équation $\Gamma(\Omega) = \Gamma_f + \alpha\Omega^2$ (voir résolution graphique ci-dessus).

Une discussion graphique est à privilégier dans ce genre de question, qui reste qualitative.

Une position est stable lorsqu'un déplacement par rapport à la position d'équilibre entraîne une modification des paramètres conduisant à un retour à cette position. Ici, il faut donc qu'une augmentation de Ω entraîne un couple résistant supérieur au couple moteur.

Si la vitesse de rotation augmente $\Omega > \Omega_0$, le couple résistant devient supérieur au couple moteur, et la machine ralentit : le fonctionnement est donc stable.

Si $\Gamma_D < \Gamma_f < \Gamma_M - \alpha\Omega_M^2$, la machine ne démarrera pas seule. Il y aura ensuite deux solutions : le régime stable sera celui correspondant à la vitesse de rotation la plus grande.

1 20 min

> Corrigé p. 171

Principe du Bêatron

Pour accélérer un électron, on veut utiliser le champ électrique dû aux variations du champ magnétique servant à courber la trajectoire.

1. On établit un champ magnétique \vec{B} variable dans le temps, mais dont la direction reste perpendiculaire à un plan fixe Oxy . On considère la trajectoire circulaire de centre O et de rayon r_0 d'un électron (charge q) dans le plan Oxy . On suppose,

en outre, que le module de \vec{B} ne dépend que de z . Ce champ magnétique induit un champ électrique variable que l'on supposera tangent en chaque point à la trajectoire de l'électron. Le champ \vec{B} envoie à travers la surface du cercle de rayon r_0 le flux magnétique :

$\Phi = \pi r_0^2 B_m$, (B_m se calculant à partir de $B(r)$). La période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ du champ est

très supérieure au temps mis par l'électron pour décrire la trajectoire. Montrer que, pour que l'électron se maintienne sur la trajectoire circulaire, il est nécessaire que $B_m = 2B(r_0)$ (condition de Wideroe), $B(r_0)$ désignant la valeur du champ sur l'orbite considérée.

2. On suppose $B = \frac{5}{2} B_0 \sin \omega t$ pour $r < a$ et

$B = B_0 \sin \omega t$ pour $r > a$, avec $a = 0,8$ m. En déduire le rayon de la trajectoire. Calculer le « gain » d'énergie par tour.

On rappelle que l'électron a une charge $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, et une masse de $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Discuter de la validité des calculs.

2 20 min

> Corrigé p. 171

Courants de Foucault dans des conducteurs cylindriques

On place un cylindre conducteur d'axe Oz , de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur L et de conductivité γ dans un champ magnétique uniforme (créé par des sources extérieures) colinéaire à l'axe Oz :

$$\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{e}_z.$$

On se place dans l'approximation où le champ magnétique reste identique au champ extérieur appliqué.

On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{V} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

1. Calculer le champ électrique \vec{E} induit à l'intérieur du cylindre.

2. Exprimer la puissance moyenne P_J (moyenne temporelle) dissipée par effet Joule dans le cylindre. En déduire la densité volumique moyenne de puissance Joule. Comment dépend-elle du rayon R ?

3. Application numérique :

$$B_0 = 0,1 \text{ T}, \quad \gamma = 2 \cdot 10^6 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}, \quad L = 0,5 \text{ m}, \\ S_0 = 20 \text{ cm}^2, \quad f = 50 \text{ Hz}.$$

Calculer P_J .

4. Que devient la puissance P_J si au lieu d'un seul conducteur cylindrique, on utilise n conducteurs cylindriques identiques de longueur L et de section $S'_0 = \frac{S_0}{n}$?

5. Comment tire-t-on parti du résultat obtenu à la question précédente dans la réalisation des transformateurs pour limiter les pertes par courants de Foucault ?

6. Les courants induits (tels que nous les avons calculés) créent un champ magnétique \vec{B}_i qui se superpose à celui des sources extérieures.

a. Exprimer \vec{B}_i (on admettra que \vec{B}_i est orienté suivant \vec{e}_z et est nul à l'extérieur du cylindre).

b. À quelle condition, portant sur R , rayon du cylindre, l'hypothèse initiale (le champ magnétique reste identique au champ \vec{B} extérieur appliqué) est-elle vérifiée, autrement dit, à quelle condition le module de \vec{B}_i reste-t-il négligeable devant B_0 ?

Les résultats des calculs précédents sont-ils valables avec les valeurs numériques de la question 3 ?

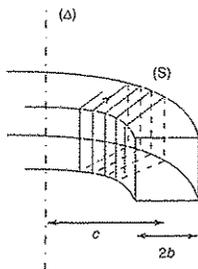
3

15 min

> Corrigé p. 172

Ampèremètre à pince (d'après concours DEUG)

On considère le système constitué par un cylindre conducteur (C) de longueur infinie, parcouru par un courant d'intensité $I = i_0 \cos \omega t$, et un solénoïde torique (S), de section carrée, de rotation d'un carré de côté $2b$ tournant autour de l'axe (Δ) du cylindre, à la distance moyenne c .



Il comporte une seule couche de N spires jointives supposées planes.

1. Les extrémités de l'enroulement sont réunies pour former un circuit fermé. Calculer le coefficient d'induction mutuelle M entre (C) et (S).

Application numérique :

$N = 1000$, $c = 6$ cm, $b = 1$ cm.

2. On relie les extrémités de l'enroulement à un voltmètre. Calculer l'amplitude e_0 de la f.é.m. d'induction dans le solénoïde. Pourquoi peut-on négliger les phénomènes d'auto-induction ?

3. Ce dispositif est appelé « ampèremètre à pince ». Quel est l'intérêt du montage ? Si le voltmètre est sensible au millivoit, calculer l'amplitude minimale $(i_0)_{\min}$ de l'intensité dans C que l'on peut déceler, si la fréquence du courant est de 50 Hz.

4

60 min

> Corrigé p. 172

Mouvements d'un barreau dans un champ magnétique (d'après ESIM)

On considère un barreau creux mobile de masse m , de rayon r , de moment d'inertie $J = mr^2$ par rapport à son axe, de longueur ℓ et de résistance électrique R . Ce barreau peut rouler sans glisser sur deux rails conducteurs horizontaux H_1 et H_2 parallèles à Ox , de résistance négligeable et distants de a . Dans son déplacement, le barreau reste perpendiculaire aux rails. Un courant d'intensité i circule dans les rails et le conducteur mobile. On

place l'ensemble dans un champ magnétique vertical uniforme \vec{B} . On néglige tout champ magnétique propre. On étudie le mouvement du barreau mobile, et on repère la position du barreau par l'abscisse x_1 de son milieu et centre d'inertie M_1 .
Données : $m = 5$ g ; $r = 3$ mm ; $a = 10$ cm ; $\ell = 15$ cm ; $R = 0,1 \Omega$.

1. Si le barreau est soumis à des forces électromagnétiques de résultante \vec{F}_m , montrer que l'accélération du centre d'inertie M_1 est donnée par :

$$\vec{a}_{m1} = \frac{\vec{F}_m}{m_{ap}} \text{ où } m_{ap} \text{ est une constante que l'on}$$

exprimera en fonction de m et r .

2. Les deux rails sont reliés à un générateur de tension de f.é.m. E par un interrupteur. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, le barreau étant immobile.

a. Écrire les équations électrique et mécanique.

b. Définir et déterminer le temps de relaxation τ . Donner les caractéristiques du mouvement au bout d'un temps long devant τ .

3. Le barreau est maintenant relié à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , dans le plan des rails et dont l'autre extrémité est fixée en un point O_1 que l'on prend comme origine de l'axe. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, le barreau étant dans sa position d'équilibre $x_1 = \ell_0$.

a. Établir l'équation différentielle du mouvement du barreau.

b. Déterminer sa nouvelle position d'équilibre. Décrire qualitativement les mouvements possibles du barreau. Donner la valeur k_c permettant un amortissement critique. La calculer pour $B = 1$ T.

c. Faire le bilan énergétique entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$.

d. Le générateur est maintenant un générateur de tension alternative $e = E \cos \omega t$, le barreau étant toujours relié au ressort. On attend un temps suffisamment long (que l'on précisera) pour obtenir un régime sinusoïdal forcé.

Préciser alors l'amplitude de mouvement du barreau. La calculer pour $B = 1$ T, $E = 10^{-2}$ V, $\omega = 10$ rad \cdot s $^{-1}$, $k = 0,5$ N \cdot m $^{-1}$.

4. On supprime le générateur et on ajoute sur les rails un deuxième barreau identique au précédent. On étudie les mouvements des deux barreaux parallèlement à Ox et on repère la position des barreaux

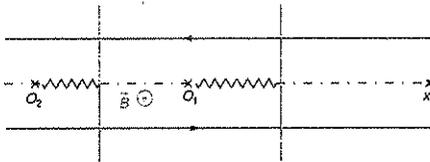
par les abscisses x_1 et x_2 de leurs milieux M_1 et M_2 .

À $t = 0$, les deux barreaux sont immobiles. À partir de $t = 0$, on impose au barreau 1 de se déplacer à la vitesse v_1 constante (les deux barreaux roulent sans glisser).

a. Établir l'équation différentielle du mouvement du barreau 2. Déterminer le temps de relaxation et la vitesse limite.

b. On impose au barreau 1 un mouvement oscillatoire de période T et d'amplitude A . Justifier qu'après un régime transitoire, le barreau 2 a un mouvement correspondant à un régime sinusoïdal forcé, dont on déterminera l'amplitude.

5. Les deux barreaux sont maintenant reliés à des ressorts identiques fixés en O_1 et O_2 . Les abscisses x_1 et x_2 sont mesurées à partir de O_1 et O_2 .



a. Écrire l'équation électrique du circuit lorsque les barreaux ont des vitesses v_1 et v_2 .

b. En déduire les deux équations différentielles caractérisant les mouvements de chaque barreau.

c. Résoudre dans le cas particulier de l'amortissement critique et avec les conditions initiales : $x_{10} = x_{20} = \ell_0$, $v_{10} = v_0$, $v_{20} = 0$. Quels sont les mouvements des barreaux au bout d'un temps long ? Était-ce prévisible ?

d. Faire le bilan énergétique.

5) 30 rails

> Corrigé p. 173

Propulseur électromagnétique (d'après Concours Polytechnique)

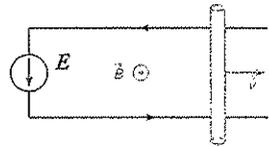
1. Un circuit électrique rigide est caractérisé par sa résistance R et son inductance L . Il est alimenté par un générateur. Soit $i(t)$ l'intensité du courant qui le parcourt.

Exprimer le flux magnétique Φ propre à travers le circuit. En déduire la f.é.m d'auto-induction.

Lors de l'établissement du courant de 0 à $i(t)$, le générateur doit fournir, en plus de l'énergie

« dissipée » par effet Joule, une énergie supplémentaire \mathcal{E}_m appelée « énergie magnétique ». Exprimer \mathcal{E}_m en fonction de L et $i(t)$.

2. Le circuit possède maintenant une partie mobile constituée d'un barreau pouvant glisser sans frottement le long de deux rails parallèles



de direction Ox (voir figure ci-contre). Il n'y a pas de champ magnétique extérieur. On désignera par x son déplacement et par \dot{x} sa vitesse. L'inductance du circuit dépend alors de x , soit $L(x)$.

Lorsqu'un courant électrique parcourt le circuit, le barreau se met en mouvement. Expliquer brièvement pourquoi.

Exprimer à l'instant t la puissance fournie par le générateur en sus de celle dissipée par effet Joule.

Une partie de cette puissance correspond à la variation de l'énergie magnétique $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt}$, l'autre partie est la puissance mécanique $P_{méca}$ donnée au barreau.

Exprimer $P_{méca}$ en fonction de $i(t)$, $\frac{dL}{dx}$ et \dot{x} .

En déduire que la force qui s'exerce sur le barreau a pour expression : $F = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$.

3. On désire évaluer un ordre de grandeur de l'inductance par unité de longueur des rails :

$$L' = \frac{dL}{dx}$$

a. On considère deux plans conducteurs infinis, parallèles au plan xOy et espacés de w . Ils portent chacun une densité surfacique de courant uniforme $i_x \vec{e}_x$ pour le plan $z = \frac{w}{2}$ et $-i_x \vec{e}_x$ pour le plan

$$z = -\frac{w}{2}$$

Montrer que le champ magnétique créé par cette distribution de courant est uniforme entre les plans, et donner son expression en fonction de i_x .

b. Les rails sont modélisés comme deux conducteurs plans et minces, de hauteur h finie selon Oy , et ils sont parcourus chacun par l'intensité i .

Calculer la densité surfacique i_x associée. En faisant l'approximation que les expressions obtenues à la question 3.a. restent valables, déterminer le flux magnétique par unité de longueur selon Ox , et en déduire L' en fonction de w et h .

La longueur des rails est $X = 3$ m, la distance entre les rails est $w = 0,013$ m, la hauteur effective est $h = 0,040$ m, la résistance du rail par unité de longueur est $R' \approx 850 \mu\Omega \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer L' .

c. On désire qu'en partant d'une vitesse nulle, une masse de 3 grammes atteigne une vitesse d'éjection de $6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ après un parcours de 3 m. En supposant la force F de la question 2.d. constante et en prenant la valeur de L' obtenue en 3.c, déterminer numériquement l'intensité i nécessaire.

En réalité, (dans le propulseur électromagnétique, le projectile (un morceau de résine isolante) porte sur sa face arrière de minces feuilles de cuivre qui fondent rapidement et se vaporisent formant un plasma.



40 min

> Corrigés p. 173

Table à induction. Pourquoi des ustensiles de cuisson spécifiques ? (d'après CCP)

Le chauffage du fond métallique (plaque circulaire) des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable créé par un inducteur logé dans une table en céramique. Dans le domaine de la cuisson, il s'agit de créer une forte dissipation de chaleur dans le fond des récipients tout en limitant au plus bas l'échauffement de l'inducteur. Pour cela, un choix s'impose quant aux propriétés du métal à chauffer.

1. Un inducteur alimenté par un courant i génère un champ magnétique sinusoïdal de fréquence f compatible avec l'approximation des régimes quasi-stationnaires (A.R.Q.S.). Ce champ est globalement orienté suivant un axe Oz autour duquel il conserve une symétrie de révolution. Il agit sur un disque métallique conducteur coaxial dont la face en regard vers l'inducteur est centrée en O .

a. Quel est le sens de rotation des courants induits dans la plaque circulaire ? Quelle est leur fréquence ?

b. On suppose qu'on peut modéliser ces courants comme une rotation des charges mobiles autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire $\Omega(z)$ uniforme dans chaque section droite de la plaque circulaire. En déduire les composantes j_x et j_y de la densité de courant $\vec{j}(M)$ en fonction du nombre n de charges élémentaires e mobiles par unité de

volume, de la vitesse angulaire $\Omega(z)$ et des coordonnées du point M .

2. On admet que, dans un milieu magnétique caractérisé par une perméabilité absolue $\mu = \mu_0 \mu_r$, les équations de Maxwell s'écrivent simplement en remplaçant dans les équations dans le vide μ_0 par $\mu = \mu_0 \mu_r$.

a. Écrire les équations de Maxwell pour un métal de perméabilité absolue μ .

b. Exprimer la loi d'Ohm locale pour un métal de conductivité γ , et montrer que pour une fréquence imposée de 25 kHz, les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction, sachant que γ est de l'ordre de $10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

c. Montrer qu'en régime établi, le conducteur est neutre en tout point de son volume.

d. Réécrire les équations de Maxwell en utilisant la notation complexe pour les dérivations par rapport au temps et en tenant compte des simplifications proposées en 2.c et d. En déduire l'équation exprimant la proportionnalité entre la densité de

courant \vec{j} et son Laplacien vectoriel $\vec{\Delta} \vec{j}$.

Montrer que cela se ramène aux équations :

$$\frac{\partial^2 j_x}{\partial z^2} = f(j_x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 j_y}{\partial z^2} = f(j_y).$$

Résoudre cette équation en faisant apparaître une grandeur δ homogène à une longueur et caractéristique de l'atténuation suivant l'axe Oz . Montrer

$$\text{qu'elle peut s'écrire } \delta = \frac{503,3}{\sqrt{\mu_r \gamma f}}.$$

e. L'inducteur est alimenté par un générateur délivrant une fréquence de 25 kHz. La plaque a une épaisseur de 1 cm. Calculer δ dans le cas d'un acier amagnétique ($\gamma = 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_r = 1$) et d'un acier magnétique ($\gamma = 5 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_r = 350$). Justifier que l'on puisse considérer la plaque comme illimitée en z , malgré sa faible épaisseur, et simplifier alors les valeurs de j_x et j_y . Donner en notation réelle l'expression de la norme du vecteur

courant $\vec{j}(z)$. On désignera par j_0 son amplitude en $z = 0$.

3. L'inducteur, composé d'un enroulement de spires de cuivre de rayon extérieur 10 cm, présente une résistance $R_1 = 1,8 \cdot 10^{-2} \Omega$ et une auto-inductance $L_1 = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ H}$.

La plaque, réalisée en acier magnétique, assimilée à une spire unique refermée sur elle-même

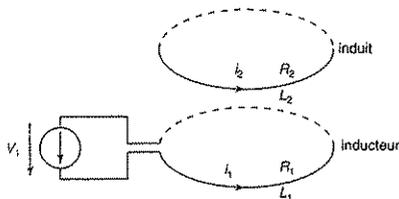
présente une résistance $R_2 = 8,3 \cdot 10^{-3} \Omega$ et une auto-inductance $L_2 = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ H}$.

L'inducteur est alimenté sous une tension $v_1(t)$.

a. Sachant que l'ensemble inducteur-plaque se comporte comme deux circuits couplés par une inductance mutuelle M , (voir ci-dessous) écrire les équations de couplage entre les courants $i_1(t)$ circulant dans l'inducteur et le courant $i_2(t)$ parcourant la plaque.

En déduire les expressions littérales du rapport des amplitudes complexes $\frac{I_2}{I_1}$ et de l'impédance

d'entrée complexe $Z_c = \frac{V_1}{I_1}$ du système.



b. Simplifier les expressions de leurs modules en montrant que l'on peut négliger les résistances avec une erreur inférieure à 5 %. Effectuer le calcul numérique, sachant que l'inductance mutuelle est estimée à $2 \mu \text{ H}$.

4. Pour des raisons de sécurité, on limite les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 watts.

a. Quelles sont alors les valeurs efficaces maximales du courant et de la tension d'alimentation ? Quelles sont l'intensité du courant dans la plaque et la puissance de chauffe développée dans celle-ci ? Quel est le rendement de la table à induction ?

b. Si l'on reprend les mêmes calculs avec les données de l'acier magnétique, on trouve :

$$R_2 \approx 1,0 \cdot 10^{-3} \Omega, \quad \frac{I_2}{I_1} \approx 16,5, \quad \text{et} \quad Z_c \approx 0,56 \Omega.$$

- Expliquer pourquoi la résistance est plus faible alors que la conductivité est moins grande.

- Reprendre les calculs du 4.a. et montrer qu'utiliser l'acier magnétique revient à diminuer nettement la puissance de chauffe de la plaque, malgré une très nette augmentation du courant dans celle-ci.

c. La tension d'alimentation est réglée à 110 volts, en vue de recevoir une plaque en acier magnétique. Dans le cas où l'utilisateur déposerait un fond

amagnétique, montrer qu'il existe un risque d'échauffement excessif de l'inducteur. Proposer une solution pour éviter tout accident de ce type.



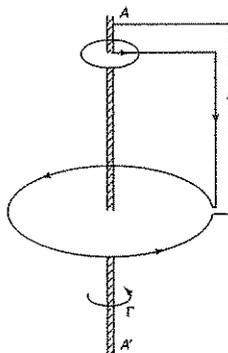
• Corrigé p. 176

Théorie dynamo du champ géomagnétique terrestre (d'après Mines)

Dans cette théorie, le champ magnétique terrestre est dû aux mouvements de convection des masses de matière conductrice à l'intérieur du globe. On se propose d'étudier un dispositif : le dynamo-disque homopolaire qui crée un champ magnétique auto-entretenu par la rotation du disque.

Un disque conducteur (D) tourne autour de l'axe AA' , dont il est solidaire et auquel le couple mécanique constant Γ_{ext} est appliqué. On relie l'axe à la périphérie du disque par un fil conducteur qui a la forme d'une spire circulaire indiquée sur la figure ci-dessous.

On note L le coefficient d'auto-induction du circuit complet, M le coefficient de mutuelle induction entre le circuit complet et la périphérie du disque, R la résistance électrique du circuit complet, et J le moment d'inertie du disque par rapport à son axe.



1. Équation électrique du circuit

a. Donner l'expression de M sous forme d'une intégrale que l'on ne calculera pas.

b. Exprimer en fonction de M , I et $\omega(t)$ vitesse de rotation du disque la f.é.m. existant entre l'axe et la périphérie du disque.

c. En déduire l'équation électrique (E) du circuit, en supposant que le courant I circule dans (D) suivant un rayon unique.

2. Équation mécanique du circuit

Exprimer en fonction de M et I_c le couple Γ_L des forces de Laplace s'opposant à la rotation du disque. En déduire l'équation mécanique (M) du circuit, en supposant que le courant I circule dans (D) suivant un rayon unique.

3. Montrer que pour des valeurs critiques à préciser, ω_c et I_c , il existe un régime permanent stationnaire.

Faire un bilan énergétique et expliquer qualitativement le fonctionnement du système.

4. Pour résoudre le système, on pose $I^2(t) = I_c^2 e^{\gamma t}$, et on suppose que les conditions initiales ω_0 et I_0 sont différentes de ω_c et I_c .

a. Préciser les conditions initiales y_0 et y'_0 vérifiées par $y(t)$.

b. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $y(t)$. On posera $\lambda^2 = \pi \frac{L J}{M \Gamma}$. Quelle est la dimension de λ ?

c. Montrer que la solution vérifie :

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} [y - e^{\gamma} + K].$$

d. Montrer que $\frac{dy}{dt}$ s'annule pour deux valeurs de y .

En déduire que le régime décrit par $y(t)$ est en général périodique et donner l'expression intégrale de sa période T .

e. Retrouver le régime stationnaire en étudiant dans quelles conditions $T \rightarrow \infty$.

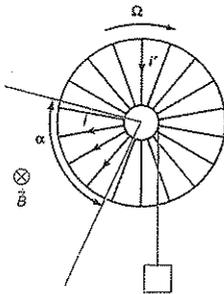


40 min

> Corrigé p. 177

Ralentisseur électromagnétique

On considère une roue comportant N rayons conducteurs de résistance R , reliés à une circonférence métallique de rayon a , et de résistance négligeable, en rotation autour de son axe de rayon b sur lequel est enroulé un fil de



masse linéique négligeable et auquel est suspendu une masse m (voir ci-avant). Soit J le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe, et $\Omega(t)$ sa vitesse de rotation.

1. Étudier le mouvement de rotation du disque entraîné par la chute de la masse.

2. Un secteur du disque, d'angle α , est dans l'entrefer d'un électroaimant. On considère que, lorsque celui-ci est alimenté, le champ dans l'entrefer est uniforme et vaut B . Quelle est la f.é.m induite sur un rayon du disque plongé dans le champ magnétique ?

Écrire l'équation électrique sur un circuit fermé que l'on définira, et en déduire l'intensité qui traverse un rayon du secteur plongé dans le champ magnétique.

Déterminer le moment de la force de Laplace qui s'applique à un élément de ce rayon, et le moment total du secteur plongé dans le champ magnétique. Écrire l'équation mécanique du mouvement de rotation du disque lorsque l'électroaimant est alimenté. Décrire le mouvement de rotation, déterminer le temps de relaxation et l'expression de la vitesse limite Ω_c .

3. Faire un bilan énergétique. Où la chaleur se dégage-t-elle ?

4. Le disque est en réalité un disque plein. On le modélise comme ci-avant, en considérant que le nombre N de rayons tend vers l'infini, et que la résistance totale entre l'axe et la circonférence vaut R_0 . Comment sont modifiés les résultats précédents ? Les ralentisseurs électromagnétiques qui équipent les poids lourds dans les régions à forte déclivité fonctionnent sur ce principe : quel est l'avantage par rapport à un freinage par frottement solide ?



40 min

> Corrigé p. 176

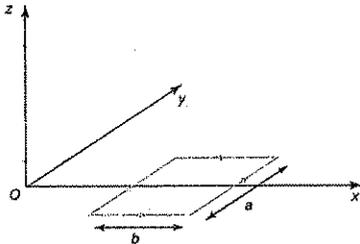
Moteur linéaire (d'après EEI)

Dans une portion d'espace, on réalise un champ magnétique que l'on peut représenter par

$$\vec{B} = B_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \vec{e}_z$$

La composante suivant Ox du champ est considérée comme négligeable. Un cadre conducteur fermé sur lui-même est formé de N spires rectangulaires de dimensions a et b (b suivant Ox , et a sui-

vant Oy). Il est placé dans le champ magnétique, et entraîné à la vitesse v suivant Ox (à l'instant t , le centre du cadre est à l'abscisse $x = vt$, figure ci-dessous).



1. a. Dans l'hypothèse où $b \ll \lambda$, où on peut considérer le champ magnétique comme localement uniforme sur la surface du cadre, calculer le flux ϕ du champ magnétique à travers le cadre. On garde cette approximation dans la suite.

b. Le cadre a pour résistance R et pour inductance L . On pose $\Omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$, et $\phi_M = NabB_0$.

Exprimer l'intensité $i(t)$ du courant dans le cadre en régime établi.

c. Montrer que le module de la force électromagnétique moyenne qui s'exerce sur le cadre a pour expression : $\langle F \rangle = 2 \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{\phi_M^2 v R}{R^2 + (L\Omega)^2}$.

Préciser son sens, et en déduire la puissance développée par l'opérateur qui entraîne le cadre.

d. Calculer la puissance moyenne perdue par effet Joule dans le cadre. Commenter.

2. On alimente les bobines sources du champ magnétique avec un courant sinusoïdal de pulsation ω en les déphasant de manière à ce que le champ magnétique soit bien représenté par

$$\vec{B} = \frac{3}{2} B_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \vec{e}_z$$

a. Montrer que c'est un champ « glissant » suivant Ox à une vitesse v_0 que l'on précisera.

b. Le cadre précédent est placé dans ce champ. Donner l'expression de la force moyenne de propulsion du cadre en fonction de sa vitesse v . Cette expression représente la caractéristique mécanique du moteur linéaire, que l'on va étudier maintenant.

- Donner l'expression de $\langle F_0 \rangle$ au démarrage.

- Donner l'expression v_M de la vitesse pour laquelle la force est maximum.

- Pour quelles valeurs de la vitesse le système fonctionne-t-il en moteur ou en générateur ?

- Quelle opportunité présente le fonctionnement en générateur lors de la traction d'un véhicule par un moteur linéaire ?

- Tracer la courbe $\langle F \rangle(v)$. Que représente-t-elle ?

10

40 min

Corrigé p. 175

Moteur continu à aimant inducteur (d'après Concours spécial)

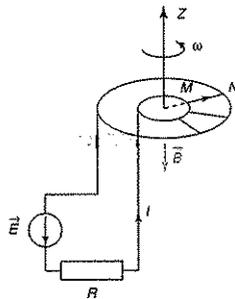
1. Soit une barre homogène OA dont la section a des dimensions négligeables devant sa longueur l , de masse m , mobile autour d'un axe Oz , assujettie à se déplacer dans le plan xOy normal à cet axe.

Lorsque cette barre tourne à la vitesse $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ autour de Oz , son moment cinétique s'écrit

$$\vec{\sigma}_O = \frac{1}{3} m l^2 \omega \vec{e}_z$$

La barre est conductrice et dans l'espace où elle se déplace, on a établi un champ magnétique constant

$\vec{B} = -B_0 \vec{e}_z$. La barre tourne en s'appuyant sur deux cercles conducteurs concentriques C_1 et C_2 de rayons respectifs a et b . On appelle M et N les points de la tige en contact avec les cercles (voir figure ci-dessous).



a. Calculer en fonction de B_0 , a , b et ω la f.é.m induite entre M et N .

b. Le courant I parcourant la tige entre M et N de M vers N , calculer en fonction de B_0 , a , b et I le moment par rapport à O des forces de Laplace exercées sur MN .

c. Au lieu d'un conducteur unique OA , on utilise $2p$ conducteurs OA_j , identiques, régulièrement

répartis, liés rigidement les uns aux autres, tournant autour de Oz à la vitesse angulaire ω .

Calculer la tension entre les cercles C_1 et C_2 . Si le courant total I parcourt l'ensemble des conducteurs de C_1 vers C_2 , calculer le moment par rapport à O des forces de Laplace subies par l'équipage mobile constitué par les $2p$ tiges.

2. Le dispositif précédent constitue le rotor d'un moteur tournant à la vitesse ω . On branche les conducteurs circulaires C_1 et C_2 aux bornes d'un générateur de f.é.m. E . La résistance du circuit est modélisée par une résistance unique R . On impose que le moteur fournisse sur son arbre un couple de moment Γ_0 constant. On néglige l'auto-induction. À l'instant initial, le rotor est au repos.

a. En appliquant les lois de la mécanique, écrire l'équation relative à la vitesse angulaire $\omega(t)$.

b. En appliquant les lois de l'électrocinétique, écrire l'équation relative à l'intensité $I(t)$ circulant dans le circuit.

c. En déduire l'équation différentielle relative à l'évolution de la vitesse angulaire ω du rotor. Montrer que ω tendra vers une valeur limite ω_e que l'on déterminera. Au bout de combien de temps la vitesse angulaire ω différera-t-elle de ω_e de moins de 5 % ?

d. Montrer que le couple fourni, de moment Γ_0 , doit rester inférieur à une valeur Γ_m que l'on déterminera.

e. Application numérique : $E = 4 \text{ V}$; $R = 1 \ \Omega$; $B_0 = 0,1 \text{ T}$; $a = 10 \text{ cm}$; $b = 50 \text{ cm}$; $\ell = 50 \text{ cm}$; $m = 15 \text{ g}$; $p = 5$; $\Gamma_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}$.

Calculer ω_e , Γ_m et le temps au bout duquel le moteur atteint son régime à 5 % près.



50 min

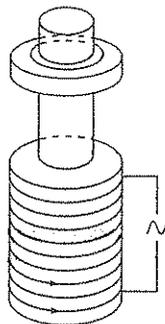
> Cuvrignat p. 179

Appareil de Elihu Thomson (d'après CCP)

Cet appareil est destiné à illustrer la loi de Lenz de l'induction électromagnétique en régime quasi-stationnaire.

Il est composé de deux parties : un solénoïde vertical de longueur $\ell = 13 \text{ cm}$, de rayon $R = 3,0 \text{ cm}$, qui comporte $N = 320$ spires jointives parcourues par un courant sinusoïdal de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$, traversé par un cylindre plein en fer doux dont on admettra qu'il a pour effet de multiplier par 100 les champs magnétiques créés.

Sur ce noyau de fer qui dépasse nettement la longueur du solénoïde, on enfle un anneau d'aluminium cylindrique de rayon interne R_1 que l'on prendra égal à R , de rayon extérieur $R_2 = 3,3 \text{ cm}$, de hauteur $h = 1,0 \text{ cm}$, de masse $m = 13,4 \text{ g}$ et de conductivité $\sigma = 3,8 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.



En l'absence de courant dans le solénoïde, l'anneau repose sur la face supérieure du solénoïde. L'établissement du courant dans le solénoïde éjecte l'anneau spectaculairement vers le haut le long du noyau de fer sur une hauteur de 30 à 40 cm. Avec d'autres conditions de départ (un opérateur guidant l'anneau), on peut observer un équilibre de « lévitation magnétique ».

1. Questions préliminaires

a. On rappelle que le champ magnétique créé par le solénoïde en un point M de son axe, à l'extérieur, et à une distance $OM = z$ de la face de sortie (face Nord

si $z > 0$) est $B(z) = 100\mu_0 \frac{NI_0}{\ell} Z(z) = B_0 Z(z)$,

avec $Z(z) = \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right] \vec{e}_z$.

Calculer B_0 pour $I_0 = 5 \text{ A}$.

b. Soit un point P voisin de M dans le plan perpendiculaire en M à l'axe du solénoïde. ($r \ll z$, R , ℓ). Donner la valeur approchée au deuxième ordre en $\frac{r}{z}$ des composantes de $\vec{B}(P)$ en coordonnées cylindriques. On posera $Z'(z) = \frac{dZ}{dz}$.

2. Étude qualitative

a. Énoncer la loi de Lenz. Comment l'appliquer pour expliquer le saut de l'anneau ?

b. Dans cette question, toutes les grandeurs seront exprimées sous la forme d'une amplitude que l'on ne cherchera pas à détailler, et d'une fonction du temps.

À partir de l'intensité $I = I_0 \sin \omega t$ parcourant le solénoïde et créant $B_0 Z(z) \sin \omega t$, déduire l'expression :

- du flux $\Phi(t)$ créé par le champ extérieur à travers l'anneau situé dans le plan horizontal à l'altitude z (amplitude φ_0);

- de la f.é.m induite dans l'anneau (amplitude e_0);

- du courant induit dans l'anneau. On notera S la résistance totale de l'anneau;

- de la force de Laplace résultante appliquée à l'anneau. On utilisera l'expression du l.b. même pour des distances z de l'ordre de R et on fera un schéma comportant les directions des vecteurs concernés.

c. Quelle est la valeur moyenne sur une période de cette force? L'ascension de l'anneau durant bien plus de 10 ms, quelle conclusion tirer de cette étude qualitative?

3. Étude plus rigoureuse

On modélise l'anneau comme une spire torique de rayon $R_m = \frac{R_1 + R_2}{2}$ et de petit rayon

$$a = \sqrt{\frac{h(R_2 - R_1)}{\pi}}$$

(voir figure ci-contre).

a. Justifier le choix de R_m et de a . Les calculer numériquement.

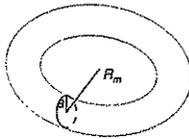
b. Donner l'expression du flux à travers la spire modélisée ($a \ll R_m$) lorsqu'un courant $I = I_0 \sin \omega t$ circule dans le solénoïde.

c. En déduire la f.é.m induite dans la spire, sous la forme $e(t) = -Z(z)e_0 \cos \omega t$, et calculer numériquement e_0 .

Calculer la résistance S de la spire, supposée parcourue par une densité de courant uniforme sur une section.

Calculer son auto-inductance L à partir de la formule : $L = 100\mu_0 R_m \left(\ln \frac{8R_m}{a} - 2 \right)$. Comparer S et $L\omega$.

d. Sans rien négliger, écrire l'équation différentielle régissant les variations du courant $i(t)$ qui circule dans la spire et en déduire $i(t)$ en régime



établi. Mettre l'amplitude de cette fonction sous la forme $Z(z)i_0$ et calculer numériquement i_0 .

e. En déduire la force exercée par le champ magnétique sur l'anneau placé à la distance z du solénoïde.

f. Quelle est la valeur moyenne de cette force au cours du temps? À quoi est due la différence avec la partie 2? Avec les valeurs numériques précédentes, l'anneau décolle-t-il de la position $z = 0$? (On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.)

g. On donne la capacité calorifique de l'aluminium : $c = 0,9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$. L'opérateur peut-il maintenir à la main l'anneau en position à $z = 0$ pendant longtemps? Donner une estimation de la durée au bout de laquelle l'opérateur devra relâcher l'anneau.

h. L'anneau, libéré, admet une position d'équilibre dans le champ de pesanteur. En supposant l'anneau horizontal, trouver son ordre de grandeur en considérant $z \gg R$. L'effet est-il observable?

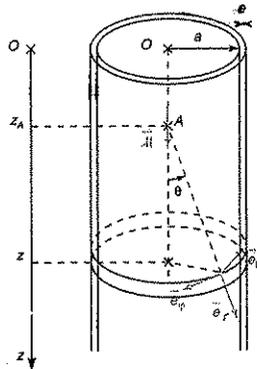
12)

50 min

> Corrigé p. 180

Chute d'un aimant dans un tuyau métallique (d'après ESIM)

Un petit aimant est lâché sans vitesse initiale du point O ($z = 0$). Son moment magnétique $\vec{M} = M\vec{e}_z$ est au cours du mouvement constamment vertical dirigé vers le bas. Cette chute s'effectue à l'intérieur d'un tuyau métallique creux, d'épaisseur e faible devant le rayon moyen a . Son abscisse lors de sa chute est notée $z_A(t)$, l'axe Oz étant orienté suivant la verticale descendante. La conductivité électrique du métal est σ . Les frottements de l'air sont négligés.



L'extrémité du tuyau est placée en $z = 0$, et sa longueur est L .

1. Courant induit dans un circuit élémentaire

Dans un premier temps, il est commode de raisonner sur un circuit (C) de cote z constitué par un tronçon de tuyau de hauteur dz . Un point M de cette boucle est repéré par ses coordonnées sphériques d'origine A position de l'aimant et l'orientation positive du circuit est choisie suivant $+\vec{\delta}_\phi$.

a. Expliquer qualitativement l'origine d'un courant di induit dans le circuit (C) ; prévoir son sens par la loi de Lenz et le représenter sur un dessin. Interpréter alors l'existence d'une force de freinage s'exerçant sur l'aimant.

b. Le potentiel vecteur créé en un point M du circuit (C) par le dipôle magnétique est donné par l'expression suivante où $r = AM$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{M} \wedge \vec{\delta}_r}{4\pi r^2}$$

Représenter le vecteur $\vec{A}(M)$ et donner ses coordonnées sur la base sphérique en fonction de M , a , z et z_A .

c. Pour quelle raison ce potentiel est-il fonction du temps ?

En déduire l'expression du champ électromoteur $\vec{E}_m(M) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ en notant $v = \frac{dz_A}{dt} > 0$ la vitesse de chute de l'aimant,

$$\vec{E}_m(M) = \frac{-3\mu_0}{4\pi} \frac{Ma(z-z_A)v}{(a^2 + (z-z_A)^2)^{5/2}} \vec{\delta}_\phi$$

Dans la suite ce champ est supposé uniforme sur l'épaisseur e du métal (car $e \ll a$) ainsi que sur sa hauteur dz .

d. Déterminer le courant di induit par ce champ électromoteur dans le circuit (C) par la loi d'Ohm locale et le flux du vecteur densité de courant \vec{j} à travers une surface adéquate.

Retrouver ce résultat par la force électromotrice induite e_i et l'admittance dY du circuit (C). Le signe de di est-il conforme à la prévision faite à la question 1.a. ?

2. Force exercée par le tuyau sur l'aimant

Soit \vec{F} la force exercée par le tuyau sur l'aimant et F_z sa projection sur l'axe Oz . Il est plus simple d'évaluer son opposée $F'_z = -F_z$, c'est-à-dire la force exercée par l'aimant sur le tuyau.

a. Rappeler les expressions des composantes B_r et B_θ du champ magnétique (en coordonnées sphériques) créé par le dipôle magnétique en A au point M du circuit (C) en fonction de M , θ et $r = AM$.

b. Exprimer sur la base $\vec{\delta}_r$ et $\vec{\delta}_\theta$ la force $d^2\vec{F}'$ exercée par le champ de l'aimant sur un élément $d\vec{\ell} = d\ell\vec{\delta}_\phi$ du circuit (C) et la représenter sur un dessin, puis la projeter sur Oz et en donner la résultante dF'_z pour le circuit (C) entier en fonction de M , di , a , r et θ .

c. En exprimant $\sin\theta$, $\cos\theta$ et r en fonction de z et z_A , montrer que F_z composante verticale de la force exercée par le tuyau entier sur l'aimant, est finalement donnée par l'intégrale :

$$F_z = \frac{9\mu_0^2 M^2 a^3 \sigma e v \cdot L}{8\pi} \int_0^L \frac{(z-z_A)^2}{((z-z_A)^2 + a^2)^5} dz$$

d. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^5} = \frac{5\pi}{128}$. Sachant que

$L \gg a$, donner une expression approchée de \vec{F} sous la forme $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où α est un coefficient positif indépendant de la position z_A de l'aimant. Donner l'expression de α .

e. Pour le tuyau de cuivre : $a = 3,5$ mm ; $e = 1,0$ mm ; $L = 1,0$ m ; $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ S \cdot m $^{-1}$. Pour l'aimant Néodyme-Fer-Bore de masse m , en forme de petit disque de 5 mm de diamètre et de 2 mm de haut :

$$m = 0,29 \text{ g} ; M = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

Donner la valeur numérique de α .

3. Mouvement de chute de l'aimant dans le tuyau métallique

a. Intégrer l'équation différentielle du mouvement de l'aimant et exprimer sa vitesse $v(t)$ et sa cote $z_A(t)$ en fonction de la vitesse limite v_ℓ et d'un temps caractéristique τ du régime transitoire, dont on donnera l'expression.

b. Calculer numériquement v_ℓ , τ et $z_A(\tau)$.

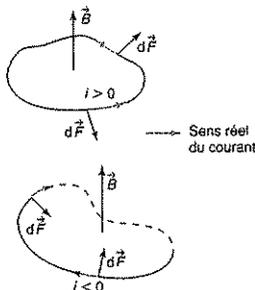
c. En déduire le temps total de chute t_c dans le tuyau, et le comparer à celui t'_c de sa chute dans un tube de verre de même caractéristiques géométriques. Commenter.

L'expérience donne pour le tuyau de cuivre un temps de l'ordre de 10 s. Le modèle précédent vous semble-t-il valable ?

Tester ses connaissances

1 a. Pas toujours vrai.

b. Vrai. Les forces de Laplace sont en tout point dirigées vers l'extérieur du circuit si $i > 0$, mais vers l'intérieur si $i < 0$.



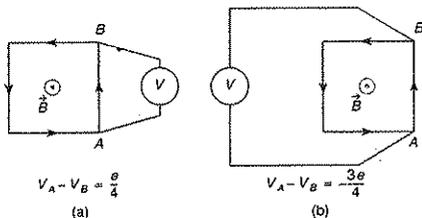
c. C'est vrai si $i < 0$, mais faux si $i > 0$. Il faut que l'opérateur fournisse une force s'opposant aux forces de Laplace pour fournir de l'énergie mécanique.

d. Vrai.

e. Faux. Le flux propre est toujours positif. On se retrouve donc dans le cas b.

f. Vrai. Si B diminue, les courants d'induction vont s'opposer à sa variation, et vont donc être dans le sens positif : on se retrouve dans le cas b.

2 réponse c.



On applique la loi de Pouillet à un circuit fermé contenant le voltmètre. Soit u la tension aux bornes du voltmètre : sa très forte résistance permet de considérer que les côtés du carré restent parcourus par la même intensité i , avec $i = \frac{e}{R}$.

• Dans la position représentée par la figure a.,

$$e = \frac{3R}{4}i + u, \text{ soit } u = \frac{e}{4}$$

• Dans la position représentée par la figure b.,

$$u + \frac{3R}{4}i = 0, \text{ soit } u = -\frac{3e}{4}$$

3 1. Vrai. Le circuit reste identique à lui-même, donc sa surface ne change pas.

2. Faux. Quand le disque tourne, il y a un champ électromoteur de Lorentz $\vec{v}_c \wedge \vec{B}$ sur le rayon liant l'axe au liquide conducteur. Ici, il y a commutation : les circuits aux instants t et $t + dt$ ne sont pas physiquement les mêmes. Le raisonnement fait pour montrer la loi de Faraday dans le cas de Lorentz ne s'applique pas ici.

Conseil : dans le cas de Lorentz, il est souvent préférable d'utiliser directement la circulation du champ électromoteur de Lorentz sur les parties mobiles.

$$\begin{aligned} 4 \int_A^B (-\vec{\text{grad}}V + \vec{v}_c \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \\ = \int_A^B (-\vec{\text{grad}}V + (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = 0, \end{aligned}$$

soit, avec les notations de la figure, $V_B - V_A = \Omega \frac{a^2}{2} B$.

5 Soient \vec{E}_0 et \vec{B}_0 les champs électriques et magnétiques mesurés dans un référentiel \mathcal{R}_0 galiléen, et \vec{E} et \vec{B} leurs valeurs mesurées dans un référentiel \mathcal{R} en déplacement à la vitesse uniforme \vec{v}_c par rapport à \mathcal{R}_0 . Dans un changement de référentiel galiléen, en physique non relativiste, si \vec{F}_0 et \vec{F} sont les valeurs des forces mesurées dans les deux référentiels, la loi de transformation des forces est $\vec{F} = \vec{F}_0$.

Soit une charge-test q , immobile dans le référentiel \mathcal{R} , et donc à la vitesse \vec{v}_c dans le référentiel \mathcal{R}_0 . Dans \mathcal{R}_0 , la force de Lorentz s'écrit :

$$\vec{F}_0 = q(\vec{E}_0 + \vec{v}_c \wedge \vec{B}_0), \text{ dans } \mathcal{R} : \vec{F} = q\vec{E}. \text{ Il en résulte que dans le référentiel en translation à la vitesse } \vec{v}_c, \text{ le champ électrique est } \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{v}_c \wedge \vec{B}_0.$$

Dans le référentiel lié au circuit en mouvement, le champ « vu » par les charges est le champ électrique dans le référentiel fixe augmenté du champ « électromoteur » $\vec{v}_c \wedge \vec{B}_0$. La loi d'ohm dans \mathcal{R} s'écrit $\vec{j} = \gamma(\vec{E}_0 + \vec{v}_c \wedge \vec{B}_0)$.

De plus, $\vec{j}_0 = \vec{j}$ car le conducteur étant neutre, il n'y a pas, dans \mathcal{R}_0 , de courant de convection dû au déplacement de toutes les charges à la vitesse \vec{v}_c .

L'écriture dans \mathcal{R}_0 de la densité volumique de courant dans un circuit se déplaçant à la vitesse \vec{v} , est donc : $\vec{j}_0 = \gamma(\vec{E}_0 + \vec{v}_c \wedge \vec{B}_0)$.

On peut montrer aussi que, pour une charge se déplaçant à la vitesse \vec{v} , dans \mathcal{R} ,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}_0 + (\vec{v}_c + \vec{v}_r) \wedge \vec{B}_0),$$

quel que soit \vec{v}_r , et donc que $\vec{B}_0 = \vec{B}$.

Remarque : ce raisonnement n'est valable qu'au deuxième ordre près en $\frac{v}{c}$ puisqu'il utilise le principe de relativité galiléenne.

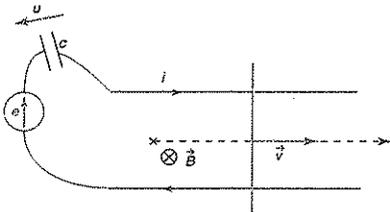
6 La puissance volumique fournie par le champ magnétique sur les charges en mouvement de densité volumique nq dans le circuit en déplacement à la vitesse \vec{v}_c est nulle, et s'écrit : $nq[(\vec{v}_c + v_r) \wedge \vec{B}] \cdot (\vec{v}_c + v_r)$.

Cela se décompose en

$nq(\vec{v}_c \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_c + nq(\vec{v}_c \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_r$. Le premier terme représente la puissance volumique des forces de Laplace ($\vec{j} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_c$ et l'autre $\vec{j} \cdot (\vec{v}_c \wedge \vec{B}) = \vec{j} \cdot \vec{E}_m$, puissance du champ électromoteur de Lorentz. On retrouve l'origine du couplage électromécanique.

Savoir appliquer le cours

1 a. Avec les orientations choisies pour le circuit et pour le déplacement (figure ci-dessous), on a :



• équation électrique : $e - vaB = Ri$;

• équation mécanique : $m \frac{dv}{dt} = iaB$;

• équation du mouvement : $m \frac{dv}{dt} = \frac{eaB}{R} - \frac{a^2 B^2}{R} v$,

soit : $\frac{dv}{dt} + \frac{a^2 B^2}{mR} v = \frac{eaB}{mR}$.

On pose $\tau = \frac{mR}{a^2 B^2}$. La force étant finie, la vitesse est continue. À l'instant initial, la vitesse est donc nulle :

$$v = \frac{e}{Ba} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) ; \quad x = x_0 + \frac{e}{Ba} \left(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau \right).$$

Après un régime transitoire de constante de temps τ , la vitesse atteint une vitesse limite $\frac{e}{Ba}$.

$i = \frac{e}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$. En régime permanent, la f.é.m. d'induction dans la barre est égale et opposée à celle du générateur, et l'intensité s'annule.

Bilan énergétique

$$ei = Ri^2 + i vaB = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right).$$

L'énergie fournie par le générateur est transformée en énergie cinétique de translation et en effet Joule dans la résistance.

L'énergie cinétique de translation en régime permanent vaut : $\frac{1}{2} m \frac{e^2}{B^2 a^2} = \frac{e^2 \tau}{2R}$.

L'énergie dissipée par effet Joule vaut

$$\int_0^{\infty} \frac{e^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{e^2 \tau}{2R}.$$

L'énergie totale fournie par le générateur est transformée pour moitié en énergie cinétique, l'autre moitié étant dissipée sous forme d'effet Joule.

b. Avec le condensateur

Soit u la tension aux bornes du condensateur en

convention récepteur : $i = C \frac{du}{dt}$.

La nouvelle équation électrique s'écrit :

$$e - u - vaB = Ri.$$

L'équation mécanique est inchangée : $\frac{dv}{dt} = \frac{aB}{m} i$.

$i = C \frac{du}{dt} = \frac{m}{aB} \frac{dv}{dt}$. Il y a continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, donc à l'instant initial, u et v sont nuls : $u = \frac{m}{aBC} v$.

L'équation différentielle du mouvement s'écrit donc :

$$\frac{dv}{dt} + \left(\frac{a^2 B^2}{mR} + \frac{1}{RC} \right) v = \frac{aB}{mR} e.$$

La solution est identique à la précédente en remplaçant τ par τ' telle que $\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{RC}$. Les rails de Laplace, du point de vue électrique, sont équivalents à un condensateur de capacité $C_L = \frac{m}{a^2 B^2}$.

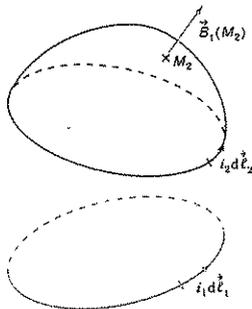
La vitesse limite vaut $\frac{aB\tau'}{mR}e$, et la tension u limite $\frac{\tau'}{RC}e$.

Bilan énergétique :

$$ei = Ri^2 + Cu \frac{du}{dt} + i\nu aB = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\nu^2 + \frac{1}{2} Cu^2 \right).$$

L'énergie totale fournie par le générateur se retrouve pour moitié dans l'énergie dissipée par effet Joule, et pour moitié dans l'énergie cinétique de la tige et l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur.

2 Soit M_2 le point courant de la surface S_2 s'appuyant sur le circuit 2 :



$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1(M_2) \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{S_1} \text{rot}(\vec{A}_1(M_2)) \cdot d\vec{S}_2.$$

D'après le théorème de Stokes :

$$\iint_{S_2} \text{rot}(\vec{A}_1(M_2)) \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2.$$

On remplace \vec{A}_1 par son expression :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{P_1 P_2}, \text{ où } P_1 \text{ et } P_2$$

sont les points courants sur les circuits 1 et 2.

$$\text{On obtient de même } \Phi_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{P_2 P_1}.$$

Les circuits sont indépendants, et on peut donc intervertir l'ordre des intégrations : les coefficients d'induction mutuelle $\frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{i_1}$ et $\frac{\Phi_{2 \rightarrow 1}}{i_2}$ sont égaux entre eux et

valent $M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{P_1 P_2}$.

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{P_1 P_2}$$

3 On reprend le calcul de \vec{B} à partir du théorème d'Ampère, en coordonnées cylindriques d'axe Oz : r, θ, z

$$r < a \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta, \quad a < r < b \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta,$$

$$a > b \quad \vec{B} = \vec{0}.$$

L'énergie magnétique emmagasinée a pour densité volumique $\frac{B^2}{2\mu_0}$.

Par unité de longueur du cylindre, elle vaut donc :

$$\mathcal{E}_m = \frac{\mu_0 I^2}{2} \left[\int_0^a \frac{r^2}{4\pi^2 a^4} 2\pi r dr + \int_a^b \frac{1}{4\pi^2 r^2} 2\pi r dr \right],$$

$$\text{soit : } \mathcal{E}_m = \frac{\mu_0 I^2}{2} \left[\frac{1}{8\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right] = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right)$$

En identifiant avec l'expression de l'énergie magnétique propre $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \Lambda I^2$, on détermine l'inductance

$$\Lambda \text{ par unité de longueur } \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right).$$

Le résultat $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ obtenu au chapitre 3 ne tenait pas compte du flux propre créé par le champ à l'intérieur du cylindre de rayon a . C'est une bonne approximation si $\frac{b}{a} \gg e^{\frac{1}{4}} \approx 1,28$.

$$\Phi = \iint_{S_i} \vec{B} \cdot d\vec{S}_i = \iint_{S_i} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}_i = \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}_i.$$

On peut donc écrire $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \oint_{C_i} \vec{A} \cdot I_i d\vec{\ell}_i$. En utilisant

la correspondance entre les éléments de courant $I d\vec{\ell}$ et $\vec{j} dt$ de la décomposition en boucles de courants de la distribution volumique dans l'A.R.Q.S. :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \iiint_{\text{cond}} \vec{j} \cdot \vec{A} dt.$$

L'intégrale porte sur le volume comportant des densités volumiques de courant, mais on peut aussi considérer qu'elle porte sur un volume V plus grand, sur lequel \vec{j} est nul. $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{A} dt.$

$$2. \vec{j} = \frac{\text{rot} \vec{B}}{\mu_0}, \text{ donc}$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \text{rot} \vec{B} \cdot \vec{A} dt = \frac{1}{2\mu_0} \left[\iiint_V \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} dt - \iiint_V \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) dt \right]$$

D'après le théorème de Green - Ostrogradsky :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} \left[\iiint_V \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} d\tau - \iint_{\Sigma} \vec{A} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S} \right], \text{ où } \Sigma$$

est la surface fermée qui limite le volume V . Si V représente tout l'espace, que \vec{A} tend vers 0 à l'infini au moins en $\frac{1}{r}$, et \vec{B} au moins en $\frac{1}{r^2}$, l'intégrale $\iint_{\Sigma} \vec{A} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S}$ est nulle, et on retrouve :

$$\mathcal{E}_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau.$$

5 1. Très éloignés l'un de l'autre, les circuits n'ont que leur énergie magnétique propre :

$$\mathcal{E}_{m_1} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \text{ et } \mathcal{E}_{m_2} = \frac{1}{2} L_2 i_2^2.$$

2. Lorsqu'on les rapproche, à courant constant, leur flux propre ne varie pas puisqu'ils sont indéformables, mais le flux d'induction mutuelle change :

$$\epsilon_1 - \frac{dM}{dt} i_1 = R_1 i_1, \text{ et } \epsilon_2 - \frac{dM}{dt} i_2 = R_2 i_2.$$

La puissance électrique fournie par les générateurs pendant le déplacement est donc :

$$\epsilon_1 i_1 + \epsilon_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + 2 \frac{dM}{dt} i_1 i_2$$

Les deux premiers termes correspondent à l'énergie dissipée par effet Joule. Il reste une énergie supplémentaire $2M i_1 i_2$. L'énergie emmagasinée sous forme magnétique est $M i_1 i_2$. Il reste donc un terme correspondant à de l'énergie mécanique cédée à l'opérateur quand il fait le déplacement : $M i_1 i_2$.

Le travail fourni par l'opérateur est donc $-M i_1 i_2$, et le travail des forces de Laplace $M i_1 i_2$.

Remarque : M peut être positif ou négatif, suivant le sens choisi pour l'orientation des circuits, et donc pour le sens conventionnel positif des courants.

6 a. L'impédance motioennelle

$$\underline{Z}_m = \frac{B\ell v_0}{i_0} = \frac{j\omega \frac{(B\ell)^2}{m}}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) + j\frac{\omega}{\tau}}$$

On peut remarquer que :

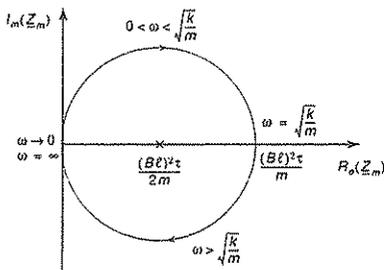
$$\frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) + j\frac{\omega}{\tau}}{j\omega \frac{(B\ell)^2}{m}} = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega} - j \frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)}{\omega \frac{(B\ell)^2}{m}}$$

$$\underline{Z}_m = |\underline{Z}_m| e^{j\theta}, \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{1}{|\underline{Z}_m|} e^{-j\theta}, \text{ et a une partie réelle indépendante de } \omega : \frac{1}{|\underline{Z}_m|} \cos \theta = \frac{m}{(B\ell)^2 \tau}.$$

L'équation en coordonnées polaires dans le plan complexe est donc :

$$|\underline{Z}_m| = \frac{(B\ell)^2}{m} \tau \cos \theta$$

C'est un cercle tangent à l'axe des imaginaires, de rayon $\frac{(B\ell)^2 \tau}{2m}$, centré sur l'axe des réels au point d'affixe $\frac{(B\ell)^2 \tau}{2m}$:



La valeur maximale de $|\underline{Z}_m|$ est $\frac{(B\ell)^2 \tau}{m}$, et est obtenue pour $\omega^2 = \frac{k}{m}$. L'impédance motioennelle est alors réelle.

b. Le bilan énergétique s'écrit :

$$u(t)i(t) = R i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) + \frac{m \dot{x}^2}{\tau}$$

(voir paragraphe 5.2.4 du cours).
En valeur moyenne au cours du temps, la puissance moyenne fournie par le générateur s'écrit :

$$\langle P_{el} \rangle = \langle u(t)i(t) \rangle = R \frac{|i_0|^2}{2} + m \frac{|v_0|^2}{2\tau}. \text{ Le rendement est donc :}$$

$$\rho = \frac{m \frac{|v_0|^2}{2\tau}}{\frac{R |i_0|^2}{2} + m \frac{|v_0|^2}{2\tau}} = \frac{1}{1 + \frac{R\tau}{m} \frac{|i_0|^2}{|v_0|^2}} = \frac{1}{1 + \frac{R\tau (B\ell)^2}{m |\underline{Z}_m|^2}}$$

Il est maximum pour $|\underline{Z}_m|$ maximum, soit pour

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \text{ Sa valeur est alors : } \rho_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{mR}{(B\ell)^2 \tau}}$$

On utilise plusieurs haut-parleurs, chacun étant adapté à une gamme de fréquence différente : en général, un pour les « basses », un pour les « médiums » et un pour les « aigus ».

c. Soit F la force exercée par l'onde acoustique sur la membrane. Si l'on néglige les pertes mécaniques :
 $F = m\ddot{x} + kx - i\ell B$. L'équation électrique s'écrit :

$$-B\ell\dot{x} = Ri + R_u i + L \frac{di}{dt}$$

Le bilan énergétique est donc :

$$\begin{aligned} F\dot{x} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) - i\ell B \dot{x} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) + Ri^2 + R_u i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right). \end{aligned}$$

Le rendement s'écrit : $\rho' = \frac{R_u \langle i^2 \rangle}{\langle F\dot{x} \rangle} = \frac{R_u}{R + R_u}$

S'entraîner

1. On oriente la trajectoire pour que le flux de \vec{B} soit positif. Le mouvement d'une particule de charge q sur une trajectoire de rayon r_0 se fait à une vitesse v algébrique telle que : $\frac{v^2}{r_0} = -\frac{qvB(r_0)}{m}$, soit $v = -\frac{qr_0 B(r_0)}{m}$.

Sur un tour, la charge q reçoit une énergie qe , où e est la f.é.m induite dans le circuit. Son énergie cinétique augmente d'autant : $\delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = -q \frac{d\Phi}{dt} = -q \pi r_0^2 \frac{dB_m}{dt}$.

L'accroissement moyen de la vitesse au cours du temps est donc : $\left(\frac{dv}{dt} \right)_{\text{moyen}} = \frac{\delta v}{T} = -\frac{q}{mv} \pi r_0^2 \frac{dB_m}{dt} \frac{1}{T}$, où $T = \frac{2\pi r_0}{v}$ est le temps mis par la particule pour faire un tour.

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)_{\text{moyen}} = -\frac{q}{2m} \frac{dB_m}{dt} r_0.$$

Pour que le rayon de la trajectoire ne change pas, la première relation doit être vérifiée à chaque instant :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{qr_0}{m} \frac{dB(r_0)}{dt}$$

La compatibilité entre ces deux expressions donne la condition :

$\frac{1}{2} \frac{dB_m}{dt} = \frac{dB(r_0)}{dt}$. Lorsque \vec{B} s'annule, les deux grandeurs B_m et $B(r_0)$ s'annulent. Donc l'électron se maintiendra sur une orbite circulaire de rayon r_0 vérifiant la condition de Wideroe : $B(r_0) = \frac{1}{2} B_m$.

2. La condition de Wideroe ne peut être remplie que pour $r_0 > a$: $B(r_0) = B_0 \sin \omega t$. Le flux de B à travers un disque de rayon r supérieur à a s'écrit :

$$B_0 \sin \omega t \pi \left(\frac{5}{2} a^2 + (r^2 - a^2) \right) = B_0 \sin \omega t \pi \left(\frac{3}{2} a^2 + r^2 \right).$$

$$B_m = B_0 \sin \omega t \left(\frac{3a^2}{2r^2} + 1 \right).$$

Le rayon de la trajectoire

sera donc tel que $\frac{3a^2}{2r_0^2} = 1$, $r_0 = a \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,98 \text{ m}$.

Le gain d'énergie pour un tour est :

$$-2q\omega \cos \omega t B_0 \pi \frac{3}{2} a^2 = -3\pi q \omega^2 B_0 \omega \cos \omega t.$$

Pour un électron, $\frac{q}{m} = -1,76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$.

$v = -\frac{qr_0 B(r_0)}{m}$. Pour un rayon de l'ordre du mètre, la vitesse de l'électron devient proche de c pour des champs de l'ordre de 10^{-3} T . Il faudrait donc traiter le problème en mécanique relativiste.

De plus, étant accéléré, il rayonne de l'énergie, si bien que l'énergie électrique n'est plus transformée entièrement en énergie cinétique, et le raisonnement ne s'applique plus.

2. $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Si on néglige les effets de bord, il y a invariance par translation suivant Oz et par rotation autour de Oz . Les plans de symétrie pour \vec{B} sont des plans d'antisymétrie pour \vec{E} . \vec{E} est donc de la forme $E(r)\vec{e}_\theta$.

Le théorème de Stokes $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ appliqué à une circonférence de rayon $r < R$ s'écrit : $2\pi r E(r) = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t}$, soit $\vec{E} = \frac{r}{2} \omega B_0 \sin \omega t \vec{e}_\theta$.

2. La densité volumique de pertes par effet Joule est γE^2 , donc $\gamma \frac{r^2}{4} \omega^2 B_0^2 \sin^2 \omega t$, de valeur moyenne temporelle $\gamma \frac{r^2}{8} \omega^2 B_0^2$.

Pour l'ensemble du cylindre :

$$P_J = \gamma L \int_0^R \frac{r^2}{8} \omega^2 B_0^2 2\pi r dr = \gamma \omega^2 B_0^2 \frac{\pi R^4}{16}.$$

La valeur moyenne de la densité volumique est donc :

$$\left\langle \frac{dP_J}{d\tau} \right\rangle = \frac{P_J}{\pi R^2 L} = \gamma \omega^2 B_0^2 \frac{R^2}{16},$$

proportionnelle au carré

du rayon du cylindre. Pour un même volume de matière, l'effet Joule sera d'autant plus important que le cylindre sera large.

3. Numériquement :

$$P_J = \gamma \omega^2 B_0^2 \frac{\pi R^4}{16} L = \gamma B_0^2 4\pi^2 f^2 \frac{S_0^2}{16\pi} L = \frac{\pi}{4} \gamma B_0^2 S_0^2 f^2 L,$$

$$P_J = 78,5 \text{ W}$$

4. Dans chaque conducteur, la puissance sera $\frac{P_J}{n^2}$, la puissance totale sera donc $P'_J = \frac{P_J}{n}$.

5. Dans les transformateurs, on utilise un noyau ferromagnétique divisé en brins ou en plaques séparées par un isolant afin de minimiser les pertes par courant de Foucault.

6. a. $\text{rot} \vec{B}_t(r) \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \frac{r}{2} B_0 \sin \omega t \vec{e}_\theta,$

soit $-\frac{dB_t}{dr} = \mu_0 \gamma \frac{r}{2} B_0 \sin \omega t.$

$$\vec{B}_t = \mu_0 \gamma \omega \frac{R^2 - r^2}{4} B_0 \sin \omega t \vec{e}_z.$$

b. On reconnaît $\vec{B}_t = \frac{R^2 - r^2}{2\delta^2} B_0 \sin \omega t \vec{e}_z,$

avec $\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega} = \delta^2$, avec δ épaisseur de peau.

B_t est une correction au champ du deuxième ordre en $\frac{R}{\delta}$, où δ est l'épaisseur de l'effet de peau.

Pour 50 Hz, $\delta = 5,0 \text{ cm}$, $R = 2,5 \text{ cm}$. Les résultats sont corrects à 12 % près au centre. Qualitativement, les résultats restent valables. Si l'on divise le cylindre en 100 brins parallèles, les résultats sont exacts à 1,2 %. L'effet de peau peut être négligé.

3 1. En coordonnées cylindriques d'axe Oz , r , θ , z le champ créé par le fil à la distance r de son axe vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

Son flux à travers les N spires du solénoïde convenablement orienté est :

$$\Phi = N 2b \int_{c-b}^{c+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 N I}{\pi} b \ln \frac{c+b}{c-b}.$$

Le coefficient de mutuelle est $M = 1,35 \cdot 10^{-6} \text{ H}$.

2. $e_0 = -\frac{d\Phi}{dt} = M \omega i_0 \sin \omega t.$

Les phénomènes d'auto-induction sont négligeables, car le voltmètre étant de forte impédance, on peut considérer que l'intensité du courant dans le solénoïde est nulle, et qu'il ne crée donc pas de champ magnétique propre.

3. L'intérêt du montage est qu'il ne nécessite pas d'ouverture du circuit pour y insérer un ampèremètre classique. C'est très adapté à la mesure des grandes

intensités des courants industriels, pour lesquels les manipulations sur les circuits sont dangereuses.

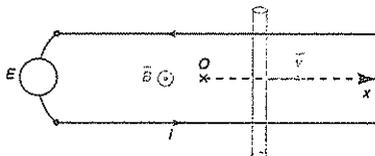
Si la fréquence du courant est du 50 Hz, un voltmètre sensible au millivolt efficace détectera une intensité efficace de $\frac{e_{0\text{eff}}}{M\omega} = 2,37 \text{ A}$, ce qui correspond à une intensité crête de 3,34 A.

4 1. S'il y a roulement sans glissement, la puissance des forces de contact est nulle, et la vitesse angulaire de rotation ω est égale à $\frac{v}{r}$ où v est la vitesse de translation. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \right] = 2m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_m \cdot \vec{v}.$$

L'accélération $\vec{a}_{M_1} = \frac{\vec{F}_m}{2m} : m_{\text{ap}} = 2m.$

2. a. On oriente le circuit dans le sens positif autour du champ \vec{B} , et on choisit le sens positif de déplacement.



Avec ces conventions, l'équation électrique s'écrit, en négligeant le champ magnétique propre : $E - Bav = Ri.$

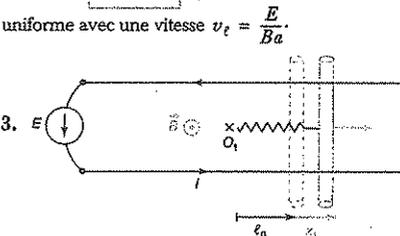
L'équation mécanique s'écrit : $2m \frac{dv}{dt} = iBa.$

En éliminant i entre les deux équations :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 a^2}{2mR} v = \frac{Ba}{2mR} E.$$

b. Après un régime transitoire caractérisé par le temps de relaxation $\tau = \frac{2mR}{B^2 a^2}$, le mouvement devient rectiligne

uniforme avec une vitesse $v_e = \frac{E}{Ba}.$



a. L'équation électrique est inchangée, l'équation mécanique devient :

$$2m \frac{dv}{dt} = 2m \ddot{x}_1 = iBa - k(x_1 - \ell_0).$$

En éliminant i entre les deux équations :

$$\ddot{x}_1 + \frac{\dot{x}_1}{\tau} + \frac{k}{2m}(x_1 - \ell_0) = \frac{E}{B a \tau}$$

b. La nouvelle position d'équilibre est

$$x_{10} = \ell_0 + \frac{2m E}{k B a \tau}$$

Si $k = k_c = \frac{m}{2\tau^2}$, le régime est critique.

Si $k > k_c$, le régime est oscillatoire amorti autour de cette position d'équilibre.

Si $k < k_c$, le régime est apériodique. Pour $B = 1 \text{ T}$, $\tau = 0,10 \text{ s}$ et $k_c = 0,25 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

c. Le bilan énergétique s'écrit : $Ei = Ri^2 + Bavi$, et $iBav = 2mv \frac{dv}{dt} + k(x_1 - \ell_0)v$, soit :

$$Ei = Ri^2 + 2m v \frac{dv}{dt} + k(x_1 - \ell_0)v$$

$$= Ri^2 + \frac{dE_s}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k(x_1 - \ell_0)^2 \right)$$

L'énergie fournie par le générateur et qui n'est pas dissipée par effet Joule se transforme en énergie mécanique élastique et en énergie cinétique. Quand $t \rightarrow \infty$, l'énergie cinétique finale est nulle, et l'énergie mécanique emmagasinée

$$\text{vaut } \%_{\text{élastique}} = \frac{2m^2 E^2}{k B^2 a^2 \tau^2} = \frac{m E^2}{\tau k R}$$

d. $\ddot{x}_1 + \frac{\dot{x}_1}{\tau} + \frac{k}{2m}(x_1 - \ell_0) = \frac{E \cos \omega t}{B a \tau}$

Après un temps de l'ordre de grandeur de τ , la contribution à la solution du régime transitoire oscillatoire amorti ou apériodique est négligeable, et on n'observe plus que le régime forcé :

$$x_1(t) = x_{10} \cos(\omega t + \phi)$$

En notation complexe $e = E e^{j\omega t}$,

et $\underline{x}_1(t) = x_{10} e^{j\phi} e^{j\omega t} = \underline{x}_{10} e^{j\omega t}$, avec :

$$\underline{x}_{10} = \ell_0 + \frac{E}{B a \tau} \frac{1}{\frac{2m}{2m} - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau}}$$

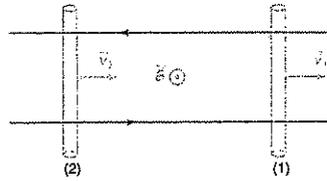
L'amplitude du mouvement vaut :

$$|\underline{x}_{10} - \ell_0| = \frac{E}{B a \tau} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{2m} - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

A. N. : $|x_{10} - \ell_0| = 8,91 \text{ mm}$.

Pour $\omega = 0$, on retrouve bien le résultat obtenu à la question 3. b.

4. a. Avec les conventions de la figure ci-dessous, la circulation du champ électromoteur de Lorentz sur les deux barreaux mobiles vaut : $aB(v_2 - v_1)$.



$$aB(v_2 - v_1) = 2Ri$$

L'équation mécanique du mouvement du barreau 2

$$\text{s'écrit : } 2m \frac{dv_2}{dt} = -iaB$$

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{a^2 B^2}{4mR}(v_2 - v_1) \quad \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{\tau} = \frac{v_1}{\tau}$$

Au bout d'un régime transitoire de temps de relaxation $\tau' = 2\tau$, le second barreau se déplace à la vitesse uniforme v_1 du premier barreau.

b. $\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{\tau} = \frac{v_1}{\tau} = \frac{-A\omega \sin \omega t}{\tau}$, si le mouvement du barreau 1 est $x_1 = A \cos \omega t$.

La solution sans second membre correspond au régime transitoire de temps de relaxation τ' . Après un temps de l'ordre de quelques τ' , il ne reste plus que le régime forcé, $x_2 = x_{20} \cos(\omega t + \phi)$. En notation complexe :

$$-\left(\omega^2 + j \frac{\omega}{\tau} \right) x_{20} = \frac{j\omega A}{\tau}$$

L'amplitude du mouvement forcé est donc :

$$A_2 = A \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau'^2}}$$

On retrouve le résultat de la question 4. a. quand $\omega \rightarrow 0$.

5. a. Équation électrique : $aB(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 2Ri$.

b. Équation mécanique du barreau 2 :

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{2m}(x_2 - \ell_0) - \frac{aB}{2m}i = -\frac{k}{2m}(x_2 - \ell_0) - \frac{x_2 - x_1}{\tau'}$$

Équation mécanique du barreau 1 :

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{2m}(x_1 - \ell_0) + \frac{aB}{2m}i = -\frac{k}{2m}(x_1 - \ell_0) + \frac{x_2 - x_1}{\tau'}$$

On découple les équations en faisant la somme et la différence. En posant $u = x_1 + x_2$, et $w = x_1 - x_2$:

$$\ddot{u} + \frac{k}{2m}u = \frac{k}{2m}2\ell_0 \quad \text{et} \quad \ddot{w} + \frac{2w}{\tau'} + \frac{k}{2m}w = 0$$

c. Dans le cas de l'amortissement critique,

$$\frac{k}{2m} = \frac{1}{\tau'^2} = \frac{1}{4\tau^2}$$

$$u(0) = 2\ell_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad u = 2\ell_0 + v_0\tau' \sin \frac{t}{\tau'}$$

$$w(0) = 0, \quad \dot{w}(0) = v_0, \quad w \text{ est de la forme } (\alpha t + \beta)e^{-\frac{t}{\tau'}}$$

$$\beta = 0. \quad \alpha = v_0, \quad w = v_0 t e^{-\frac{t}{\tau'}}$$

On en déduit :

$$x_1 = \frac{u+v}{2} = \ell_0 + \frac{v_0}{2} \left(\tau' \sin \frac{t}{\tau'} + t e^{-\frac{t}{\tau'}} \right)$$

$$x_2 = \frac{u-v}{2} = \ell_0 + \frac{v_0}{2} \left(\tau' \sin \frac{t}{\tau'} - t e^{-\frac{t}{\tau'}} \right)$$

Au bout d'un temps long devant τ' , les deux barreaux oscillent en phase avec la même amplitude. L'intensité est alors nulle dans le circuit, et il n'y a plus aucun effet dissipatif.

d. Pour faire un bilan énergétique, il faut « suivre » les conversions d'énergie à partir des équations couplées électriques et mécaniques.

Au début, l'énergie est sous forme d'énergie cinétique du premier barreau : $\mathcal{E}(0) = mv_0^2$. Cette énergie se transforme :

$$-\frac{k}{2m}(x_1 - \ell_0)\dot{x}_1 + \frac{aB}{2m}i\dot{x}_1$$

$\frac{aB}{2m}i\dot{x}_1$ est le terme de conversion énergétique :

$$aB(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)i = 2Ri^2,$$

$$\text{donc } \frac{aB}{2m}i\dot{x}_1 = -\frac{2R}{2m}i^2 + \frac{aB}{2m}i\dot{x}_2$$

$+\frac{aB}{2m}i\dot{x}_2$ est le terme de couplage entre les deux

$$\text{barreaux : } \frac{aB}{2m}i\dot{x}_2 = -\ddot{x}_2 x_2 - \frac{k}{2m}(x_2 - \ell_0)\dot{x}_2$$

Le bilan global s'écrit donc :

$$\dot{x}_1 \dot{x}_1 = -\frac{k}{2m}(x_1 - \ell_0)\dot{x}_1 - \frac{2R}{2m}i^2 - \dot{x}_2 x_2 - \frac{k}{2m}(x_2 - \ell_0)\dot{x}_2$$

En multipliant par $2m$, on reconnaît

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{mi} = 2m\dot{x}_1 \dot{x}_1 + k(x_1 - \ell_0)\dot{x}_1,$$

où \mathcal{E}_{mi} est l'énergie mécanique du barreau i

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{E}_{m_1} + \mathcal{E}_{m_2}] = -2Ri^2$$

$$\text{À la fin du régime transitoire, } \mathcal{E}_{m_1} + \mathcal{E}_{m_2} = m \frac{v_0^2}{2}$$

La moitié de l'énergie cinétique initiale a été transformée en chaleur par effet Joule, l'autre moitié s'est répartie également sur les deux oscillateurs.

Lors de l'établissement du courant, il y a donc une énergie magnétique $\frac{1}{2}Li^2 = \int_0^i Lidi$ emmagasinée dans le circuit.

2. Lorsqu'un courant parcourt le circuit, il s'exerce sur le barreau une force de Laplace due à l'existence du champ magnétique propre. Ce courant a tendance à augmenter la surface du circuit.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dLi}{dt} = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}$$

La nouvelle équation électrique s'écrit :

$$E - L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dx}\dot{x} = Ri$$

Le bilan énergétique s'écrit donc :

$$Ei = L i \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dL}{dt} + Ri^2$$

$$\text{Comme } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = Li \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dL}{dt},$$

$$Ei = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2 + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt}$$

Il y a donc une partie $\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt}$ de la puissance électrique fournie par le générateur qui est transformée en puissance mécanique.

$$P_{\text{méca}} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \dot{x}$$

On l'identifie à la puissance

$$\text{de la force électromagnétique } F \text{ donnant le mouvement de translation : } P_{\text{méca}} = F\dot{x} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \dot{x} \quad \left[F = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \right]$$

3. a. On décompose la distribution en deux plans $z = \pm \frac{w}{2}$ parcourus par une densité surfacique de courant uniforme.

$$\text{Le plan } z = +\frac{w}{2}, \text{ parcouru par } i_s \vec{e}_x \text{ crée } -\frac{\mu_0 i_s}{2} \vec{e}_y \text{ pour } z > +\frac{w}{2}, \text{ et } \frac{\mu_0 i_s}{2} \vec{e}_y \text{ pour } z < +\frac{w}{2}.$$

$$\text{Le plan } z = -\frac{w}{2}, \text{ parcouru par } -i_s \vec{e}_x \text{ crée } -\frac{\mu_0 i_s}{2} \vec{e}_y \text{ pour } z < -\frac{w}{2}, \text{ et } \frac{\mu_0 i_s}{2} \vec{e}_y \text{ pour } z > -\frac{w}{2}.$$

La superposition de ces deux distributions donne :

$$z < -\frac{w}{2} \text{ ou } z > +\frac{w}{2}, \quad \vec{B} = \vec{0},$$

$$-\frac{w}{2} < z < +\frac{w}{2}, \quad \vec{B} = \mu_0 i_s \vec{e}_y$$

b. L'intensité du courant à travers une section du rail conducteur est $i_s h = i$. Le flux magnétique par unité de longueur dans cette modélisation est $\mu_0 i_s w = \mu_0 \frac{i}{h} w$.

$$\text{On en déduit : } L' = \mu_0 \frac{w}{h}$$

A. N. : $L' = 4,08 \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

c. Si la force est constante, l'énergie fournie après un parcours de $X = 3 \text{ m}$ est FX .

Cette énergie est transformée en énergie cinétique : $\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2}L'i^2X$, où v_e est la vitesse d'éjection.

L'intensité est donc telle que : $i^2 = \frac{mv_e^2}{L'X}$

A. N. : $i = 297 \text{ kA}$.

6 1. a. Les courants induits sont colinéaires au champ électrique induit \vec{E} : $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Les plans de symétrie de \vec{B} sont des plans d'antisymétrie pour \vec{E} , donc pour \vec{j} . En coordonnées cylindriques d'axe Oz , \vec{j} est orthoradial, et est invariant par rotation autour de Oz . \vec{j} est sinusoïdal de fréquence f , et tourne dans le sens positif si $\frac{dB}{dt} < 0$ (loi de Lenz).

b. Dans cette modélisation, $\vec{j} = ne\Omega(z)\vec{e}_z \wedge \vec{OM}$:

$j_x = -ne\Omega(z)y$, et $j_y = +ne\Omega(z)x$.

2. a. $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\text{div} \vec{B} = 0$, $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

$$\text{rot} \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

b. $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Pour 25 kHz, le courant de déplacement est de l'ordre de $\frac{2\pi\epsilon_0 f}{\gamma} j$, soit un rapport de 10^{-12} . Il est donc complètement négligeable.

c. Si l'on néglige le courant de déplacement,

$\text{div} \vec{j} = \text{div}(\text{rot} \vec{B}) = 0$. Il en est donc de même pour $\text{div} \vec{E}$, et $\rho = 0$.

d. En régime établi, on peut résoudre en notation complexe, puisque les équations sont linéaires :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\Delta \vec{E} = -\Delta \frac{\vec{j}}{\gamma} = -i\omega\mu \vec{j},$$

$$\text{soit : } \Delta \vec{j} = i\omega\mu\gamma \vec{j}.$$

On pose $i\omega\mu\gamma = \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2$:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = \sqrt{\frac{2}{8\pi^2 \cdot 10^{-7} \cdot \mu \cdot \gamma f}} = \frac{503,3}{\sqrt{\mu \cdot \gamma f}}$$

En coordonnées cartésiennes, $\Delta \vec{j} = \Delta j_x \vec{e}_x + \Delta j_y \vec{e}_y$, puisque $j_z = 0$,

$$\Delta j_x = \frac{\partial^2 j_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 j_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 j_x}{\partial z^2}$$

car, si $j_x = -ne\Omega(z)y$, les deux premiers termes sont nuls.

$$\text{Donc : } \frac{\partial^2 j_x}{\partial z^2} = \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 j_x.$$

$$\text{De même } \frac{\partial^2 j_y}{\partial z^2} = \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 j_y.$$

$ne\Omega(z)$ est de la forme $\left(Ae^{\frac{1+i}{\delta}z} + Ce^{-\frac{1+i}{\delta}z}\right)e^{i\omega t}$

$$\begin{aligned} j_x &= -\left[Ae^{\frac{1+i}{\delta}z} + Ce^{-\frac{1+i}{\delta}z}\right]ye^{i\omega t} \\ \text{et } j_y &= \left[Ae^{\frac{1+i}{\delta}z} + Ce^{-\frac{1+i}{\delta}z}\right]xe^{i\omega t}. \end{aligned}$$

e. Pour l'acier amagnétique, $\delta = 3,18 \text{ mm}$. Pour l'acier magnétique $\delta = 76,1 \mu\text{m}$, elle est donc beaucoup plus faible. La plaque pourra être considérée comme infinie dès que son épaisseur sera de l'ordre de quelques δ : à partir de 1 cm pour un acier amagnétique, de 0,2 mm pour un acier magnétique.

Cela revient à considérer A comme nul dans les expressions de \vec{j} . En notation réelle, on écrit la partie réelle de l'expression complexe :

$$j_x = -|C|ye^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right),$$

$$j_y = |C|xe^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right) \quad \left[j = j_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\right] \quad j_0 = |C|r.$$

3. a. Circuit de l'inducteur :

$$v_1(t) = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

En notation complexe avec :

$$v_1(t) = \text{Re}(\underline{V}_1 e^{i\omega t}) \underline{V}_1 = R_1 \underline{I}_1 + iL_1 \omega \underline{I}_1 + iM\omega \underline{I}_2.$$

$$\text{Circuit de la plaque : } R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0.$$

$$\text{En notation complexe : } R_2 \underline{I}_2 + iL_2 \omega \underline{I}_2 + iM\omega \underline{I}_1 = 0.$$

De la deuxième équation on déduit :

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\frac{iM\omega}{R_2 + iL_2\omega}.$$

De la première :

$$\underline{V}_1 = (R_1 + iL_1\omega)\underline{I}_1 + iM\omega \left(-\frac{iM\omega}{R_2 + iL_2\omega}\right)\underline{I}_1$$

$$= \left[R_1 + iL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + iL_2\omega}\right]\underline{I}_1$$

$$\underline{Z}_e = R_1 + iL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + iL_2\omega}$$

b. A. N. : $\frac{R_1}{L_1 \omega} = 1,76 \cdot 10^{-3}$, donc R_1 peut être négligé devant $L_1 \omega$.

$\frac{R_2}{L_2 \omega} = 0,22$. On peut négliger les termes du deuxième ordre en $\frac{R_2}{L_2 \omega}$.

$$\left| \frac{Z_2}{Z_1} \right| = \frac{M \omega}{\sqrt{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sim \frac{M}{L_2} = 8,33.$$

$$Z_e = i L_1 \omega + \frac{M^2 \omega^2}{R_2 + i L_2 \omega}$$

$$= \frac{(M^2 - L_1 L_2) \omega^2 + i R_2 L_1 \omega}{R_2 + i L_2 \omega}$$

$$|Z_e| = \sqrt{\frac{[(M^2 - L_1 L_2) \omega^2]^2 + R_2^2 L_1^2 \omega^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \approx \frac{(L_1 L_2 - M^2) \omega^2}{L_2 \omega}$$

au deuxième ordre en $\frac{R_2}{L_2 \omega}$.

A. N. : $|Z_e| = 2,08 \Omega$.

4. a. La puissance dissipée par effet Joule dans l'inducteur est $P_{J1} = R_1 I_{1\text{eff}}^2$. La valeur efficace maximale du courant d'alimentation est donc $I_{1\text{eff max}} = \sqrt{\frac{P_{\text{max}}}{R_1}} = 52,7 \text{ A}$.

La tension d'alimentation a alors une valeur efficace de 110 V. Dans la plaque, l'intensité efficace est alors de 440 A.

La puissance de chauffe est de :

$$P_{J2} = R_2 I_{2\text{eff}}^2 = 1,6 \text{ kW}.$$

Le rendement de la table de cuisson est alors de

$$\rho = \frac{P_{J2}}{P_{J1} + P_{J2}} = 97 \%$$

b. Pour un acier amagnétique, l'effet de peau est moins important, l'intensité du courant se répartit sur une section plus grande du conducteur, ce qui diminue la résistance. Avec les nouvelles valeurs : il n'y a rien de changé pour la valeur de $I_{1\text{eff max}}$.

$$I_{2\text{eff max}} = 870 \text{ A}. P_{J2} = R_2 I_{2\text{eff}}^2 = 756 \text{ W}.$$

Le rendement est de $\rho = \frac{P_{J2}}{P_{J1} + P_{J2}} = 93,8 \%$, encore important.

Le problème du choix de l'ustensile de cuisson n'est donc pas là.

c. Avec une tension de 110 V efficace, l'intensité $I_{1\text{eff}}$ vaut 196 A. La puissance Joule dégagée dans l'inducteur est alors de : $P_{J1} = R_1 I_{1\text{eff}}^2 = 694 \text{ W}$, bien supérieure à la limite de sécurité. Le plus simple pour éviter tout accident est d'insérer dans le circuit un disjoncteur ther-

mique qui coupe l'alimentation de la table de cuisson dès qu'il y a une montée anormale de température.

7 1. a. On oriente le circuit positivement autour de l'axe $A'A$. La circulation du champ électromoteur de Lorentz entre l'axe et la périphérie s'écrit, en coordonnées cylindriques d'axe $Oz = A'A$:

$$e = \int_0^a (\omega r \vec{e}_\theta \wedge \vec{B}(r)) \cdot \vec{e}_z dr = \omega \int_0^a \vec{B}(r) \cdot (\vec{e}_z dr \wedge r \vec{e}_\theta)$$

$$= \omega \int_0^a \vec{B}(r) \cdot \vec{e}_z r dr.$$

b. Le flux de \vec{B} à travers le disque s'écrit

$$\Phi = MI = \iint_{\text{disque}} \vec{B} \cdot r dr d\theta \vec{e}_z = 2\pi \int_0^a \vec{B} \cdot r dr \vec{e}_z.$$

Donc $e = \frac{MI \omega}{2\pi}$.

c. Il y a en plus une f.é.m de Neumann $-L \frac{dI}{dt}$ due aux variations temporelles du flux propre.

L'équation électrique (\mathcal{E}) du circuit s'écrit :

$$e = \frac{MI \omega}{2\pi} = RI + L \frac{dI}{dt}$$

2. La force de Laplace $d\vec{F} = I dr \vec{e}_r \wedge \vec{B}$ sur l'élément dr du rayon a pour moment par rapport à l'axe de rotation Oz : $d\Gamma_L = I [r \vec{e}_r \wedge (dr \vec{e}_r \wedge \vec{B})] \cdot \vec{e}_z$.

On permute les vecteurs du produit mixte :

$$d\Gamma_L = I (\vec{e}_z \wedge r \vec{e}_r) \cdot (dr \vec{e}_r \wedge \vec{B}) = -I r \vec{e}_\theta \cdot (dr \vec{e}_r \wedge \vec{B})$$

$$= -I \vec{B} \cdot r dr \vec{e}_z.$$

donc $\Gamma = -\int_0^a I \vec{B} \cdot r dr \vec{e}_z = -\frac{M}{2\pi} I^2$.

L'équation mécanique (\mathcal{M}) s'écrit :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\frac{M}{2\pi} I^2 + \Gamma_{\text{ext}}$$

3. En régime stationnaire, les dérivées temporelles sont nulles :

$$I_c^2 = \frac{2\pi \Gamma_{\text{ext}}}{M}, \text{ et } \omega_c = \frac{2\pi R}{M}$$

$\Gamma_{\text{ext}} \omega_c = RI_c^2$, le travail du couple extérieur est intégralement dissipé sous forme d'effet Joule.

4. a. $y = 2 \ln \frac{I}{I_c}$. Donc à $t = 0$,

$$y(0) = 2 \ln \frac{I(0)}{I_c} = \frac{MI}{2\pi} \omega = RI + L \frac{dI}{dt},$$

soit $\frac{\omega}{\omega_c} = 1 + \frac{L}{2R} y'(t)$.

À $t = 0$: $\frac{\omega}{\omega_c} = 1 + \frac{L y'(0)}{R \cdot 2}$

$$b. \frac{d\omega}{dt} = -\frac{M}{2\pi} I_c^2 + \Gamma_{\text{ext}} = -\frac{M}{2\pi} I_c^2 (e^{\gamma} - 1) = J \frac{L\omega_c}{2R} \gamma'', \text{ soit :}$$

$$\gamma'' = -\frac{RM}{\pi L J \omega_c} I_c^2 (e^{\gamma} - 1) = \frac{M \Gamma_{\text{ext}}}{\pi L J} (1 - e^{\gamma}) = \frac{(1 - e^{\gamma})}{\lambda^2}$$

λ est donc un temps.

c. En multipliant par γ' et en intégrant une fois, on retrouve bien :

$$\frac{\gamma'^2}{2} = \frac{\gamma - e^{\gamma}}{\lambda^2} + \frac{\gamma'(0)^2}{2} - \frac{\gamma(0) - e^{\gamma(0)}}{\lambda^2}$$

d. À $t = 0$, $\gamma - e^{\gamma} + K > 0$, puisqu'égal à $\gamma'(0)^2$. Quand $\gamma \rightarrow \pm\infty$, $\gamma - e^{\gamma} + K \rightarrow -\infty$. Donc la fonction s'annule deux fois, et la solution oscille entre ces deux zéros.

Le maximum est obtenu pour $e^{\gamma} = 1$, soit $\gamma = 0$. Ce maximum est $\gamma'^2 = \frac{2(K-1)}{\lambda^2}$. Soient γ_{\min} et γ_{\max} la plus petite et la plus grande de ces deux racines :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda^2} [\gamma - e^{\gamma} + K]}, \quad T = \lambda \sqrt{2} \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma - e^{\gamma} + K}} \text{ en}$$

admettant que l'intégrale est convergente.

e. Si $K = 1$, le régime est stationnaire : $\gamma' = 0$, et $\gamma = 0$, donc $I = I_c$ et $\omega = \omega_c$.

8. 1. La vitesse verticale de la masse est égale à $b\Omega$. Pour le système « roue + masse », le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation s'écrit :

$$(J + mb^2) \frac{d\Omega}{dt} = mgb.$$

Le disque est donc en rotation uniformément accélérée :

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{mgb}{J + mb^2} t^2, \text{ si l'on choisit l'origine des temps quand le disque est immobile.}$$

2. D'après les orientations choisies :

$$e = \int_b^a \Omega r dr B = \Omega B \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Soit i l'intensité du courant dans un des $\frac{N\alpha}{2\pi}$ rayons plongés dans le champ magnétique. L'intensité totale est $I = \frac{N\alpha}{2\pi} i$, qui revient par les $\frac{N(2\pi - \alpha)}{2\pi}$ autres rayons, parcourus chacun par $i' = \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} i$.

Sur le circuit constitué par un rayon dans le champ et un rayon de retour, en négligeant la résistance de la circonférence et de l'axe : $\Omega B \frac{a^2 - b^2}{2} = Ri + Ri' = R \frac{2\pi}{2\pi - \alpha} i$.

$$i = \Omega B \frac{a^2 - b^2}{2R} \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}, \text{ en négligeant les effets d'auto-induction.}$$

La force de Laplace exercée en un point P du rayon parcouru par l'intensité i est orthoradiale et vaut :

$$d\vec{F} = -id\tau B \vec{e}_\theta, \text{ de moment par rapport à l'axe } d\Gamma = -iBrd\tau.$$

Pour chaque rayon, le moment total vaut :

$$\Gamma = -\int_b^a iBrd\tau = -iB \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Pour tout le secteur d'angle α :

$$\Gamma_{\text{total}} = -N \frac{\alpha}{2\pi} i B \frac{a^2 - b^2}{2} = -N \frac{\alpha(2\pi - \alpha)}{4\pi^2} B^2 \frac{(a^2 - b^2)^2}{4R} \Omega.$$

La nouvelle équation mécanique s'écrit :

$$(J + mb^2) \frac{d\Omega}{dt} + N \frac{\alpha(2\pi - \alpha)}{4\pi^2} B^2 \frac{(a^2 - b^2)^2}{4R} \Omega = mgb.$$

Le mouvement est donc amorti avec un temps de relaxation :

$$\tau = \frac{16\pi^2 R (J + mb^2)}{N\alpha(2\pi - \alpha) B^2 (a^2 - b^2)^2}$$

La vitesse limite de rotation est :

$$\Omega_c = mgb \frac{16\pi^2 R}{N\alpha(2\pi - \alpha) B^2 (a^2 - b^2)^2}$$

3. La puissance mécanique est fournie par la diminution d'énergie potentielle de pesanteur de la masse.

Pour simplifier les écritures, on pose : $\Phi_0 = \frac{B(a^2 - b^2)}{2}$,

$$P_m = mgb\Omega b = (J + mb^2)\Omega \frac{d\Omega}{dt} + N \frac{\alpha(2\pi - \alpha)}{4\pi^2} \frac{\Phi_0^2}{R} \Omega^2$$

La puissance fournie par la descente de la masse est transformée en puissance cinétique de rotation et en

$$\text{puissance électrique : } N \frac{\alpha(2\pi - \alpha)}{4\pi^2} \frac{\Phi_0^2}{R} \Omega^2.$$

Si l'on calcule la puissance dissipée sous forme d'effet Joule dans les résistances :

$$P_J = \frac{N\alpha}{2\pi} Ri^2 + \frac{N(2\pi - \alpha)}{2\pi} Ri'^2 = \frac{N\alpha}{2\pi} Ri^2 \left[1 + \frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{2\pi - \alpha} \right)^2 \right]$$

$$P_J = \frac{N\alpha}{2\pi - \alpha} Ri^2 = \frac{N\alpha}{2\pi - \alpha} R \Omega^2 \frac{\Phi_0^2}{R^2} \left(\frac{2\pi - \alpha}{2\pi} \right)^2 = \frac{N\alpha(2\pi - \alpha)}{4\pi^2} \frac{\Phi_0^2}{R} \Omega^2.$$

On retrouve bien que l'énergie mécanique non transformée en énergie cinétique se retrouve dissipée par effet Joule dans la roue.

4. La résistance R_0 équivalente à la roue entre l'axe et la circonférence correspond à N résistances R en parallèle :

$$R_0 = \frac{R}{N}$$

On fait donc tendre N vers l'infini en gardant constant le rapport $\frac{R}{N}$.

L'équation du mouvement s'écrit :

$$mgb = (J + mb^2) \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\alpha(2\pi - \alpha)\Phi_0^2}{4\pi^2} \frac{\Phi_0^2}{R_0} \Omega$$

$$\tau = \frac{16\pi^2 R_0 (J + mb^2)}{\alpha(2\pi - \alpha) B^2 (a^2 - b^2)^2}$$

$$\Omega_e = mgb \frac{16\pi^2 R_0}{\alpha(2\pi - \alpha) B^2 (a^2 - b^2)^2}$$

Le meilleur freinage est obtenu pour $\alpha = \pi$.

$$\Omega_{e\min} = mgb \frac{16 R_0}{B^2 (a^2 - b^2)^2}$$

L'avantage d'un tel système est que le freinage est d'autant plus efficace que la vitesse est importante. Il évite tout « emballement » du véhicule dans les descentes. L'énergie est transformée en chaleur et pas en usure des pièces en contact, ce qui évite l'usure dans le cas d'un freinage prolongé.

Pour s'arrêter, il faudra évidemment utiliser en plus un frein classique. Cela nécessite aussi qu'il n'y ait pas de panne de l'alimentation électrique de l'électroaimant.

c. La force de Laplace s'exerçant sur le circuit est nulle suivant Oy et vaut :

$$F = Niab \left(B \left(vt + \frac{b}{2} \right) - B \left(vt - \frac{b}{2} \right) \right) = Niab \frac{dB}{dx} (vt) \\ = -\phi_M \frac{2\pi}{\lambda} i \sin \Omega t.$$

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Omega \phi_M^2}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} (\sin \Omega t \sin(\Omega t + \psi))$$

$$\langle \sin \Omega t \sin(\Omega t + \psi) \rangle = \frac{1}{2} \cos \psi = \frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}}$$

$$\text{et } \Omega = \frac{2\pi}{\lambda} v,$$

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \frac{\phi_M^2 R}{R^2 + L^2 \Omega^2} v \vec{e}_x$$

L'opérateur doit fournir une force égale et opposée pour l'entraîner à vitesse constante, et donc une puissance

$$P = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \frac{\phi_M^2 R}{R^2 + L^2 \Omega^2} v^2.$$

d. La puissance moyenne perdue par effet Joule dans le cadre est :

$$P_J = \frac{1}{2} R |i_0|^2 = \frac{1}{2} \frac{R \phi_M^2}{R^2 + L^2 \Omega^2} \Omega^2 = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \frac{R \phi_M^2}{R^2 + L^2 \Omega^2} v^2 = P.$$

C'est un générateur, avec conversion d'énergie mécanique en énergie électrique dissipée sous forme de chaleur. C'est le principe d'un frein électromagnétique.

2. a. Si l'on considère le point M d'abscisse x_0 à l'instant 0 et se déplaçant à la vitesse $v_0 \vec{e}_x$ par rapport au référentiel considéré, le champ en ce point vaut :

$$\vec{B} = \frac{3}{2} B_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (x_0 + v_0 t) \right) \vec{e}_z.$$

Si $v_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \omega$, $\vec{B}(M) = \frac{3}{2} B_0 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x_0 \right) \vec{e}_z$, indépendant du temps.

b. On peut reprendre le calcul précédent dans le référentiel à la vitesse d'entraînement v_0 . La vitesse relative

est $v - v_0$, $\vec{B}(M) = \frac{3}{2} B_0 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (v - v_0) t \right) \vec{e}_z$, donc Ω

est remplacé par $\Omega' = \Omega - \omega$ et ϕ_M par $\frac{3}{2} \phi_M$:

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \frac{9}{4} \frac{\phi_M^2 R}{R^2 + L^2 \Omega'^2} (v - v_0) \vec{e}_x.$$

- Au démarrage, $\langle \vec{F}_0 \rangle = \frac{9\pi^2}{2\lambda^2} \phi_M \frac{R}{R^2 + L^2 \omega^2} v_0 \vec{e}_x$.

Le cadre démarre sous l'action des forces de Laplace.

9 1. a. Si l'on peut considérer le champ magnétique comme uniforme sur la surface du cadre, le flux du champ magnétique à travers le cadre s'écrit :

$$\phi = Nab B_0 \cos \frac{2\pi vt}{\lambda} = \phi_M \cos \Omega t.$$

b. L'équation électrique du cadre s'écrit alors :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} - L \frac{di}{dt} = Ri : \Omega \phi_M \sin \Omega t = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

On résout en complexe : $(R + jL\Omega) i_0 = \Omega \phi_M$,

en posant $i = \text{Im}(i_0 e^{j\Omega t})$.

$$|i_0| = \frac{\Omega \phi_M}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}}, \quad i(t) = \frac{\Omega \phi_M}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t + \psi),$$

avec $\cos \psi > 0$, et $\tan \psi = \frac{L\Omega}{R}$.

- Le module de la force est maximum pour

$$\frac{R(v_0 - v)}{R^2 + L^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (v - v_0)^2} \text{ maximum, soit}$$

$$\frac{R^2 \lambda^2}{4\pi^2 L^2} = (v - v_0)^2.$$

La force d'entraînement sera positive et maximum pour :

$$\nu_M = v_0 - \frac{\lambda R}{2\pi L} \quad \langle \vec{F} \rangle_M = \frac{9\pi \Phi_M^2}{8\lambda L}$$

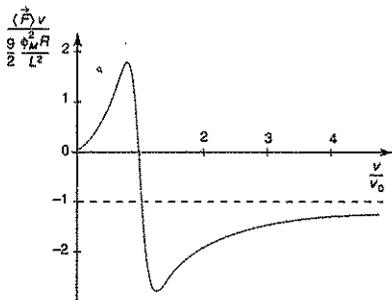
- Le système fonctionne en moteur tant que la force est positive, soit $v < v_0$, et fonctionne en générateur pour $v > v_0$. On retrouve le cas précédent en faisant $v_0 = 0$.

- Lorsque le système fonctionne en générateur, c'est un système de freinage électromagnétique. On peut envisager de stocker l'énergie électrique récupérée lors du freinage au lieu de la dissiper par effet Joule.

$$\langle \vec{F} \rangle v = \frac{9\pi^2 \Phi_M^2}{2\lambda^3} \frac{v(v_0 - v)}{R \left(1 + \frac{4\pi^2 L^2}{\lambda^2 R^2} (v - v_0)^2 \right)} \vec{e}_x.$$

$\langle \vec{F} \rangle v$ représente la puissance fournie au système dans le référentiel d'étude. Elle s'annule pour $v = 0$ et

$$v = v_0. \text{ Quand } v \rightarrow \infty, \langle \vec{F} \rangle v \rightarrow -\frac{9}{2} \frac{\Phi_M^2 R}{L^2}.$$



10.1. a. La circulation du champ électromoteur de Lorentz entre M et N s'écrit :

$$e_{MN} = -\int_a^b \omega r B dr = -\omega B_0 \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$\text{b. } \Gamma = \int_a^b r I dr B_0 = I B_0 \frac{b^2 - a^2}{2}$$

c. La f.é.m est la même pour tous les rayons, n parallèles :

$$-\omega B_0 \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Chaque tige est parcourue par $\frac{I}{2p}$, et les moments des forces de Laplace exercées sur chaque barre s'ajoutent :

$$\Gamma_{\text{total}} = 2p \frac{I}{2p} B_0 \frac{b^2 - a^2}{2} = I B_0 \frac{b^2 - a^2}{2}$$

2. a. Le théorème du moment cinétique s'écrit, pour l'ensemble des $2p$ branches :

$$\frac{2p}{3} m \ell^2 \frac{d\omega}{dt} = I B_0 \frac{b^2 - a^2}{2} - \Gamma_0,$$

puisque d'après le principe de l'action et de la réaction, l'arbre exerce sur le rotor un couple $-\Gamma_0$.

b. L'équation électrique s'écrit, avec les conventions de signe indiquées sur la figure :

$$E - \omega B_0 \frac{b^2 - a^2}{2} = RI. \text{ On pose } \phi_0 = \frac{B_0(b^2 - a^2)}{2} \text{ pour simplifier les écritures.}$$

c. $I = \frac{E}{R} - \frac{\phi_0 \omega}{R}$. On reporte dans l'équation mécanique :

$$\frac{2p}{3} m \ell^2 \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{E}{R} - \frac{\phi_0 \omega}{R} \right) \phi_0 - \Gamma_0, \text{ soit :}$$

$$\frac{2p}{3} m \ell^2 \frac{d\omega}{dt} + \frac{\phi_0^2 \omega}{R} = \frac{E}{R} \phi_0 - \Gamma_0.$$

ω est de la forme : $\omega = \omega_t \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$, avec

$$\omega_t = \frac{E}{\phi_0} - \frac{R\Gamma_0}{\phi_0^2}, \text{ et } \tau = \frac{2p}{3} m \ell^2 \frac{R}{\phi_0^2}$$

ω différera de ω_t de moins de 5 % si $e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{5}{100}$, soit :

$$t = \tau \ln 20 \approx 3\tau.$$

d. Γ_0 est un couple résistant. Il doit donc être en sens contraire de ω et donc de ω_t : $\Gamma_0 < \Gamma_m = \frac{E}{R} \phi_0$.

$$\text{e. A.N. : } \phi_0 = \frac{B_0(b^2 - a^2)}{2} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ Wb,}$$

$$\omega_t = 194 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \Gamma_m = 4,8 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m.}$$

$$t = 260 \text{ s, soit : } 4,3 \text{ min.}$$

11.1. a. $B_0 = 1,55 \text{ T.}$

b. Ce calcul classique a déjà été vu : \vec{B} est à flux conservatif et au premier ordre en $\frac{r}{z}$, $B_z(r, z) = B_z(0, z)$.

Si on considère le flux sortant d'un cylindre de hauteur dz et de rayon r :

$$2\pi r dr B_r + \pi r^2 (B_z(z + dz) - B_z(z)) = 0, \text{ donc :}$$

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} B_z'(z).$$

(La circulation de \vec{B} sur une courbe fermée permettrait de montrer que $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$ entraîne

$$B_z(r, z) = B_z(0, z) + 0 \left(\frac{r}{z} \right)^2.$$

2. a. Lorsque l'on établit le courant, cela induit dans l'anneau des courants dont l'action est de s'opposer à la variation de flux, donc de faire sortir l'anneau du champ magnétique qui se crée.

b. $\phi(t) = \phi_0 Z(z) \sin \omega t$;

$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\omega \phi_0 Z(z) \cos \omega t = -e_0 Z(z) \cos \omega t$;

$i(t) = \frac{e(t)}{S} = -\frac{e_0}{S} Z(z) \cos \omega t$, si l'on ne tient pas compte du champ propre.

Seule la composante radiale de B donne naissance à une force de Laplace de résultante non nulle :

$$\vec{F} = -F_0 Z(z) Z'(z) \cos \omega t \sin \omega t \vec{e}_z.$$

c. La valeur moyenne de cette force est nulle sur une période. Elle ne peut donc pas expliquer le phénomène.

3. a. $\pi a^2 = h(R_2 - R_1)$: l'anneau et son équivalent ont la même section.

Le choix de $R_m = \frac{R_1 + R_2}{2}$ fait qu'ils ont aussi même volume. $R_m = 3,15$ cm, $a = 0,31$ cm.

b. $\phi = B_0 \pi R_m^2 Z(z) \sin \omega t$.

c. $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 \pi R_m^2 \omega Z(z) \cos \omega t = -e_0 Z(z) \cos \omega t$,

avec $e_0 = B_0 \pi R_m^2 \omega = 1,52$ V.

$$S = \frac{1}{\sigma} \frac{2\pi R_m}{\pi a^2} = \frac{2R_m}{\sigma a^2} = 1,72 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

$$L = 9,50 \cdot 10^{-6} \text{ H, et } L\omega = 2,98 \cdot 10^{-3} \Omega.$$

Les deux termes sont du même ordre de grandeur et sont faibles : les intensités seront importantes.

d. En tenant compte de l'auto-induction :

$$-e_0 Z(z) \cos \omega t = Si + L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = i_0 Z(z) \cos(\omega t + \psi), \text{ avec}$$

$$i_0 = \frac{e_0}{\sqrt{S^2 + L^2 \omega^2}} = 509 \text{ A, } \tan \psi = \frac{L\omega}{S}, \text{ et } \cos \psi < 0.$$

e. La force s'écrit à partir de la composante radiale du champ :

$$\vec{F} = 2\pi R_m \frac{R_m}{2} Z'(z) B_0 i_0 Z(z) \cos(\omega t + \psi) \sin \omega t \vec{e}_z$$

$$= \pi R_m^2 B_0 i_0 Z'(z) Z(z) \cos(\omega t + \psi) \sin \omega t \vec{e}_z.$$

f. $\langle \cos(\omega t + \psi) \sin \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin(2\omega t + \psi) - \sin \psi \rangle$
 $= -\frac{1}{2} \sin \psi$

$$\sin \psi = \frac{L\omega}{\sqrt{S^2 + L^2 \omega^2}}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{F} \rangle &= -\frac{1}{2} \pi R_m^2 B_0 i_0 Z'(z) Z(z) \frac{L\omega}{\sqrt{S^2 + L^2 \omega^2}} \vec{e}_z \\ &= -\frac{1}{2} \pi R_m^2 B_0 Z'(z) Z(z) e_0 \frac{L\omega}{S^2 + L^2 \omega^2} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

C'est l'auto-induction qui permet la permanence de l'effet de lévitation.

$$Z(z) = \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \vec{e}_z, \quad Z(0) = 0,5.$$

$$Z'(z) = -\frac{1}{2} \left[\frac{R^2}{z^3} \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] = -\frac{1}{2R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}},$$

$$Z'(0) = -\frac{1}{2R} = -16,7 \text{ m}^{-1},$$

$\langle \vec{F} \rangle(0) = 10 \text{ N}$. $mg = 0,13 \text{ N}$. Il y a effectivement éjection brutale de l'anneau.

g. La puissance Joule dissipée dans l'anneau est

$$\frac{1}{2} S i_0^2 Z(0)^2 = 5,6 \text{ W. Avec une capacité calorifique } c \text{ si}$$

l'on néglige un refroidissement vers l'extérieur, la température s'élèvera de

$$\frac{P_J}{mc} = 0,48 \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}. \text{ L'opérateur}$$

devra relâcher l'anneau après une minute environ, correspondant à une augmentation de température de l'ordre de 30 K.

h. La position d'équilibre correspond à $\langle \vec{F} \rangle(z) = mg$,

soit $\frac{Z'(z)Z(z)}{Z'(0)Z(0)} = 0,013$.

$$\left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0,013.$$

Si l'on suppose $z \gg R$: on développe en $\frac{R}{z}$.

$$\frac{R^3}{z^3} \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 - \left(1 - \frac{R^2}{2z^2} \right) \right] \approx \frac{R^5}{2z^6} = 0,013,$$

soit $\frac{R}{z} = 0,48$, $z \approx 6 \text{ cm}$.

Un calcul plus précis donne $\frac{R}{z} = 0,54$, soit $z = 5,5 \text{ cm}$.

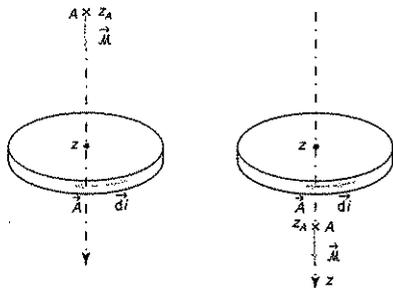
L'effet de lévitation est bien observable.

➤ **12.1 a.** La distance de l'aimant au tronçon de tuyau de cote z variant au cours du temps, le champ magnétique en z est fonction du temps. Le flux envoyé par

L'aimant à travers le circuit varie, et il y a donc un courant induit, créant un champ en sens contraire de celui de l'aimant quand l'aimant se rapproche, et dans le même sens lorsque l'aimant s'en éloigne. La force de Laplace qu'il crée s'oppose à la variation de flux, donc au mouvement relatif de l'aimant.

$di > 0$ si $z < z_A$, $di < 0$ si $z > z_A$:

di a le signe de $z_A - z$.



$$\mathbf{b.} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{\vec{z}_c \wedge \vec{z}_c'}{((z-z_A)^2 + a^2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{\sin\theta}{((z-z_A)^2 + a^2)} \vec{\phi}$$

$$\text{avec } \sin\theta = \frac{a}{((z-z_A)^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{a}{((z-z_A)^2 + a^2)^{3/2}} \vec{\phi}$$

c. \vec{A} dépend du temps par l'intermédiaire de la variable z_A , position de l'aimant : $\frac{dz_A}{dt} = v$.

$$\begin{aligned} \vec{E}_m &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{3\mu_0}{24\pi} M a \frac{-2(z-z_A)v}{((z-z_A)^2 + a^2)^{5/2}} \vec{\phi} \\ &= -\frac{3\mu_0 M}{4\pi} \frac{a(z-z_A)v}{((z-z_A)^2 + a^2)^{5/2}} \vec{\phi} \end{aligned}$$

d. $\vec{j} = \sigma \vec{E}_m$. L'intensité di est le flux de \vec{j} à travers la section edz du tronçon de tuyau :

$$di = \frac{3\mu_0 M}{4\pi} \frac{a(z-z_A)v}{((z-z_A)^2 + a^2)^{5/2}} \sigma edz. \quad \text{On retrouve bien}$$

les signes prévus au 1.a. : di a le signe de $z_A - z$.

La force électromotrice induite est la circulation du champ électromoteur sur le circuit : $e_i = 2\pi a E_m$

$$e_i = \frac{3\mu_0 M}{2} \frac{a^2(z-z_A)v}{((z-z_A)^2 + a^2)^{5/2}}$$

L'admittance du circuit élémentaire est

$$dY = \sigma \frac{e}{\ell} = \sigma \frac{edz}{2\pi a}$$

On retrouve :

$$di = dY e_i = -\frac{3\mu_0 M}{4\pi} \frac{a(z-z_A)v}{((z-z_A)^2 + a^2)^{5/2}} \sigma edz$$

$$2. \text{ a. } \vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos\theta \vec{z}_r + \sin\theta \vec{z}_\theta)$$

$$\begin{aligned} \text{b. } d^2 \vec{F}' &= did\ell \vec{z}_\theta \wedge \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos\theta \vec{z}_r + \sin\theta \vec{z}_\theta) \\ &= \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} did\ell (2 \cos\theta \vec{z}_\theta - \sin\theta \vec{z}_r) \end{aligned}$$

En projection sur Oz : $\vec{z}_r = \cos\theta \vec{z}_z - \sin\theta \vec{z}_\theta$, donc :

$$d^2 F'_z = -3 \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} did\ell \sin\theta \cos\theta$$

$$\text{En sommant sur } d\ell : dF'_z = -3 \frac{\mu_0 M}{2r^3} adi \sin\theta \cos\theta$$

$$\text{c. } \sin\theta = \frac{a}{((z-z_A)^2 + a^2)^{3/2}}, \text{ et}$$

$$\cos\theta = \frac{(z-z_A)}{((z-z_A)^2 + a^2)^{3/2}}, \quad r = ((z-z_A)^2 + a^2)^{3/2}$$

$$dF_z = -dF'_z = 3 \frac{\mu_0 M}{2} adi \frac{a(z-a)}{((z-z_A)^2 + a^2)^{5/2}}$$

En remplaçant di par son expression :

$$dF_z = -dF'_z = -\frac{9\mu_0^2 M^2}{8\pi} \frac{a^3(z-z_A)^2 v}{((z-z_A)^2 + a^2)^5} \sigma edz$$

On somme sur toute la longueur du tuyau :

$$F_z = -\frac{9\mu_0^2 M^2 a^3 \sigma v}{8\pi} \int_0^L \frac{(z-z_A)^2}{((z-z_A)^2 + a^2)^5} dz$$

On fait le changement de variable $x = \frac{z-z_A}{a}$.

d. L'intégrale porte sur x variant de $-\frac{z_A}{a}$ à $\frac{L-z_A}{a}$.

La fonction diminue avec x en $\frac{1}{x^5}$, on peut prolonger l'intégration de $-\infty$ à $+\infty$ sans modifier réellement la valeur du résultat :

$$F_z = -\frac{9\mu_0^2 M^2 \sigma v}{8\pi a^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^5} dx = -\frac{45\mu_0^2 M^2 \sigma v}{1\,024 a^4}$$

$$F_z = -\alpha v, \text{ avec } \alpha = \frac{45\mu_0^2 M^2 \sigma v}{1\,024 a^4}$$

e. A.N. : $\alpha = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

3. a. L'équation du mouvement de l'aimant s'écrit :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \alpha v. \text{ On pose } v_\ell = \frac{mg}{\alpha}, \text{ et } \tau = \frac{m}{\alpha}.$$

La vitesse initiale étant nulle, $v = v_\ell \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, et

$$z_A = v_\ell \left(t - \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right).$$

b. $v_\ell = 7,7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $\tau = 7,8 \text{ ms}$,

$$z_A(\tau) = v_\ell \frac{\tau}{e} = 0,22 \text{ mm}.$$

On peut donc considérer que l'aimant descendra dans le tuyau à la vitesse constante $v_\ell = 7,7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, le régime transitoire étant totalement négligeable.

c. $t_c = \frac{L}{v_\ell} = 13 \text{ s}$, en bon accord avec l'expérience.

Dans un tube de verre, si l'on néglige la résistance de l'air : $t'_c = \sqrt{\frac{2L}{g}} = 0,45 \text{ s}$.

L'expérience est spectaculaire et facile à réaliser.

Propagation et rayonnement

1 Généralités sur les équations de propagation

1.1. Définitions

Une *onde* est une grandeur physique F qui vérifie une équation aux dérivées partielles appelée *équation d'onde*.

Les surfaces sur lesquelles F a partout la même valeur à un même instant sont appelées *surfaces d'onde*.

Si les surfaces d'onde sont les plans perpendiculaires à une direction \vec{u} fixe, F est une *onde plane*.

Si les surfaces d'onde sont des sphères concentriques de centre O , on parle d'*ondes sphériques*.

Les équations aux dérivées partielles du type $\Delta F = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ sont appelées *équations de propagation* de l'onde $F(x, y, z, t)$.

c est alors la vitesse de propagation ou *célérité* de l'onde.

1.2. Recherche de solutions de l'équation de propagation

L'équation de propagation étant une équation linéaire, toute superposition de solutions est aussi solution.

On cherche donc des familles de solutions. Le choix de la solution sera imposé par les conditions initiales et les conditions aux limites.

1.2.1. Solutions sous la forme d'ondes planes progressives

Si l'on choisit pour axe Oz un axe parallèle au vecteur \vec{u} , F sera une fonction uniquement de z et t .

L'équation de propagation s'écrit alors : $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$.

On effectue le changement de variable :

$$\alpha = z - ct, \quad \beta = z + ct, \quad \text{d'où } F(z, t) = F\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\beta - \alpha}{2c}\right) = \Phi(\alpha, \beta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial z} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right] \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = c \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad \text{puisque } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta \partial \alpha}$$

$$\text{De même, } \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} \right).$$

L'équation de propagation s'écrit donc, en fonction de α et β :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \quad \text{de solution générale : } \Phi(\alpha, \beta) = f(\alpha) + g(\beta).$$

$F(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)$ où f et g sont deux fonctions quelconques deux fois dérivables. $f(z - ct)$ est appelée onde plane progressive à la célérité c dans le sens des z positifs. En effet, si $F(z, t) = f(z - ct)$, la donnée de $F(z, 0) = f(z)$ suffit à déterminer l'amplitude

$$\text{de l'onde en tout point à tout instant : } \boxed{F(z, t) = F(z - ct, 0)}.$$

$$\text{De même, si l'on connaît } F(0, t) = f(-ct) = \phi(t), \quad \boxed{F(z, t) = F\left(0, t - \frac{z}{c}\right) = \phi\left(t - \frac{z}{c}\right)}.$$

$g(z + ct)$ est une onde plane progressive à la célérité c dans le sens des z négatifs.

D'une manière générale, une onde plane progressive de plan d'onde perpendiculaire à \vec{u} , solution de l'équation de propagation s'écrit : $f(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) + g(\vec{u} \cdot \vec{r} + ct)$.

La forme générale d'une onde plane solution de l'équation de propagation est la superposition de deux ondes planes progressives se déplaçant en sens inverse à la célérité c , dans la direction \vec{u} perpendiculaire aux plans d'onde.

1.2.2. Solutions sous la forme d'ondes stationnaires

On cherche des solutions de la forme $F(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)\Theta(t)$, où les quatre fonctions X, Y, Z , et Θ sont des fonctions d'une seule variable.

Pour que F vérifie l'équation de propagation :

$$\begin{aligned} [Y(y)Z(z)\Theta(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z)\Theta(t) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \\ + X(x)Y(y)\Theta(t) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - X(x)Y(y)Z(z) \frac{d^2 \Theta(t)}{c^2 dt^2}] = 0. \end{aligned}$$

En divisant par $F(x, y, z, t)$, avec les précautions d'usage :

$$\left[\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\Theta(t)} \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2} \right] = 0.$$

Pour que la somme de quatre fonctions de variables indépendantes soit nulle, il faut que chacune soit une constante. Chacune des fonctions vérifiera donc une équation du type

classique : $\frac{f''}{f} = K$. Si la fonction f doit s'annuler plus d'une fois, la solution sera sinusoidale, et la constante K correspondante négative.

On peut aussi chercher des solutions sous forme d'ondes stationnaires à une ou deux dimensions seulement :

$$X(x)\Theta(t), \quad \text{ou } X(x)Y(y)\Theta(t).$$

1.2.3. Solutions sous la forme d'ondes sphériques

En coordonnées sphériques, l'équation de propagation pour une onde scalaire F ne dépendant que de r et t s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rF(r, t))}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(r, t)}{\partial t^2}, \text{ soit, en posant } G(r, t) = rF(r, t) : \frac{\partial^2 (G(r, t))}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(r, t)}{\partial t^2}.$$

D'après l'étude faite sur les ondes planes, on en déduit que $F(r, t) = \frac{1}{r} \left[f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \right]$ est la somme de deux ondes sphériques progressives se propageant radialement en sens inverse à la célérité c .

1.2.4. Solutions harmoniques

L'analyse de Fourier permet de décomposer une fonction du temps de carré sommable en une superposition de fonctions sinusoïdales, dites harmoniques ou monochromatiques.

Pour mémoire : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{c}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, avec $\underline{c}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$.

On cherche donc des solutions sinusoïdales en fonction du temps, de la forme $F(x, y, z, t) = a(x, y, z) \cos(\omega t + \varphi(x, y, z))$.

ω est appelée *pulsation temporelle*, $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ est la *fréquence* et $T = \frac{1}{\nu}$ la *période*.

On leur associe l'onde complexe $\underline{F}(x, y, z, t) = \underline{a}(x, y, z) e^{i\omega t}$, avec $\underline{a}(x, y, z) = a(x, y, z) e^{i\varphi(x, y, z)}$.

Dans le cas d'une onde plane progressive à la célérité c dans la direction définie par \vec{u} ,

$\underline{F}(x, y, z, t) = a_0 e^{i\omega \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right)} = a_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, où la constante a_0 est l'*amplitude complexe* de l'onde et $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$ le *vecteur d'onde*. La période spatiale $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$ est la *longueur d'onde*.

L'expression générale d'une onde plane progressive monochromatique se propageant à la célérité c dans la direction \vec{u} perpendiculaire aux plans d'onde est

$$\underline{F}(x, y, z, t) = a_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

2 Propagation du champ électromagnétique dans le vide

2.1. Établissement des équations des champs électromagnétiques dans le vide

On considère une région de l'espace sans charges ni courants. Les équations de Maxwell s'y écrivent donc :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

On découple les équations :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Soit, puisque $\text{div} \vec{E} = 0$: $\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, ou $\square \vec{E} = \vec{0}$.

\vec{E} est donc solution d'une équation de propagation de célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, appelée vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

c est une constante universelle qui sert à définir l'unité de longueur à partir de l'éta-
lon de fréquence.

Par définition : $c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ exactement. On rappelle que
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ exactement par définition de l'ampère.

De même : $\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \text{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$, soit

$\Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$, ou $\square \vec{B} = \vec{0}$.

Un champ électromagnétique dans le vide vérifie donc l'un ou l'autre des systèmes d'équations suivants :

$$\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \text{div} \vec{E} = 0, \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{B} = 0.$$

Ou, de manière équivalente :

$$\Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{E} = 0.$$

2.2. Ondes planes électromagnétiques

2.2.1. Propriétés générales des ondes électromagnétiques planes progressives

On étudie l'onde de champ électrique. Si l'on considère que les plans d'onde sont parallèles à xOy , les composantes du champ ne dépendront que de z et t :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_x(z, t) \vec{e}_x + E_y(z, t) \vec{e}_y + E_z(z, t) \vec{e}_z.$$

En coordonnées cartésiennes, l'équation de propagation $\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ se ramène à

trois équations de propagation indépendantes $\Delta E_i = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}$, avec $i = (x, y, z)$ portant sur les trois composantes du vecteur.

$$E_i = f_i(z - ct) + g_i(z + ct).$$

Les équations étant linéaires, on décompose l'onde en ses deux composantes progressives :

$$\vec{E}_1(z - ct) \text{ et } \vec{E}_2(z + ct)$$

$$\vec{E}_1(z - ct) = f_x(z - ct) \vec{e}_x + f_y(z - ct) \vec{e}_y + f_z(z - ct) \vec{e}_z$$

$$\text{div} \vec{E}_1 = 0 \text{ se traduit par } \frac{\partial E_{1z}}{\partial z} = 0, \text{ soit : } \frac{df_z}{d\alpha} = 0.$$

$f_z(\alpha)$ est une constante, donc un champ électrostatique, qui ne fait pas partie de l'onde.

$E_{1z} = 0$: l'onde de champ électrique plane progressive est dite transverse. Sa composante dans la direction de propagation est nulle.

$$\text{rot} \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}; \quad \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\frac{\partial E_{1x}}{\partial z} \vec{e}_y + \frac{\partial E_{1y}}{\partial z} \vec{e}_x = -\frac{df_x}{d\alpha} \vec{e}_y + \frac{df_y}{d\alpha} \vec{e}_x.$$

\vec{B} est donc la somme d'une fonction de α et d'une constante d'intégration qu'on considèrera comme ne faisant pas partie de l'onde progressive étudiée :

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -c \frac{d\vec{B}_1}{d\alpha}, \text{ soit : } \vec{B}_1(\alpha) = \frac{1}{c} (f_y(\alpha) \vec{e}_x - f_x(\alpha) \vec{e}_y) = \frac{1}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_1(\alpha).$$

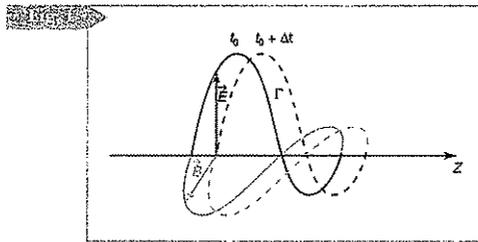
La solution est transverse et vérifie bien $\text{div} \vec{B} = 0$.

On montrerait de même que $\vec{E}_2(\beta)$ est transverse, et que $\vec{B}_2(\beta) = -\frac{1}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_2(\beta)$.

Attention

La superposition de deux ondes planes progressives en sens inverse donne toujours une onde transverse, mais la relation liant les modules des champs n'est plus valable, et \vec{E} et \vec{B} ne sont plus obligatoirement orthogonaux entre eux.

Les ondes électromagnétiques **planes progressives** dans le vide se propagent dans la direction \vec{z} perpendiculaire aux plans d'onde. Les champs électriques et magnétiques \vec{E} et \vec{B} appartiennent aux plans d'onde et vérifient la relation $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}$ (figure 1).



2.2.2. Ondes planes électromagnétiques stationnaires

On cherche des solutions sous la forme $E_i = f_i(z)\Theta_i(t)$, où $i = (x, y \text{ ou } z)$.

$\text{div} \vec{E} = 0$ entraîne que l'onde est transverse.

L'équation de propagation s'écrit : $\frac{1}{f_i} \frac{d^2 f_i}{dz^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\Theta_i} \frac{d^2 \Theta_i}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}$, où ω est quelconque.

(On choisit une constante négative pour que la fonction ne diverge pas au cours du temps.)

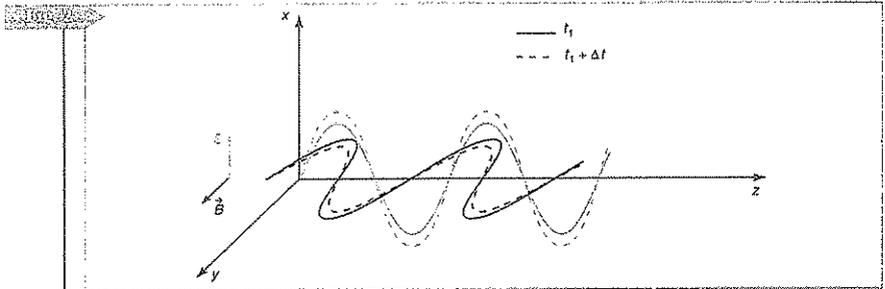
La solution est de la forme : $E_{\omega i} = E_{\omega i 0} \cos(\omega t + \phi_i) \cos\left(\frac{\omega}{c} z + \psi_i\right)$.

Le champ magnétique associé vérifie :

$$\frac{\partial B_{\omega y}}{\partial t} = -\frac{\partial E_{\omega x 0} \cos(\omega t + \phi_x) \cos\left(\frac{\omega}{c} z + \psi_x\right)}{\partial z} \vec{e}_y = -\frac{\omega}{c} E_{\omega x 0} \cos(\omega t + \phi_x) \sin\left(\frac{\omega}{c} z + \psi_x\right), \text{ soit}$$

$$B_{\omega y} = -\frac{1}{c} E_{\omega x 0} \sin(\omega t + \phi_x) \sin\left(\frac{\omega}{c} z + \psi_x\right) \quad B_{\omega x} = \frac{1}{c} E_{\omega y 0} \sin(\omega t + \phi_y) \sin\left(\frac{\omega}{c} z + \psi_y\right).$$

Les champs électriques et magnétiques sont en quadrature de phase dans le temps et dans l'espace (figure 2).



$$E_{\omega t} = E_{\omega t 0} \cos(\omega t + \phi_i) \cos\left(\frac{\omega}{c} z + \psi_i\right)$$

$$= \frac{E_{\omega t 0}}{2} \left[\cos\left(\omega\left(t + \frac{z}{c} + \phi_i + \psi_i\right)\right) + \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c} + \phi_i - \psi_i\right)\right) \right].$$

C'est donc aussi la superposition de deux ondes planes monochromatiques progressives en sens inverse, de même amplitude.

$$\text{Réciproquement, } E_{0i} \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c} + \phi_i\right)\right) = E_{0i} \left[\cos \omega t \cos\left(\omega \frac{z}{c} - \phi_i\right) + \sin \omega t \sin\left(\omega \frac{z}{c} - \phi_i\right) \right].$$

Une onde progressive peut se décomposer en une superposition d'ondes stationnaires. Le choix entre les deux types de solution dépendra des conditions aux limites spatiales et temporelles.

2.2.3. Ondes planes électromagnétiques progressives harmoniques

En notation complexe : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$.

• $\frac{\partial}{\partial x}(e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) = -ik_x(e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})})$, soit, en utilisant le vecteur $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$ (vu au chapitre 1, paragraphe 2.6 du cours) : $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$.

• $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$. On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes :

$$\text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \quad \text{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}, \quad \text{et } \Delta \vec{E} = \vec{\nabla}^2 \vec{E}.$$

Si $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, $\text{rot} \vec{E} = -i\vec{k} \wedge \vec{E}$, $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$, et l'on retrouve rapidement les résultats précédents :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}, \quad \text{avec } \vec{k} = |\vec{k}| \vec{u}.$$

Remarque : Si l'on choisit la notation $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, le raisonnement est identique avec $\vec{\nabla} = i\vec{k}$, et $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$. Les résultats sont évidemment inchangés.

2.2.4. Train d'ondes et paquet d'ondes

Si l'on s'intéresse à la représentation sous la forme d'une fonction $\vec{E}\left(t - \frac{z}{c}\right)$, on parle d'une description en train d'ondes. Une onde plane progressive quelconque est émise à la source pendant une durée τ finie.

Si $t < 0$ où $t > \tau$, $|\vec{E}(t)| = 0$. τ est le *temps d'émission* ou *durée de vie* du train d'ondes. À un instant ultérieur, son extension spatiale suivant la direction de progression sera $L = c\tau$, *longueur du train d'ondes*.

La représentation d'une onde plane progressive quelconque en une superposition d'ondes planes monochromatiques progressives, par transformation de Fourier, s'appelle *paquet d'ondes*.

On montre que l'étendue en fréquence du paquet d'onde est reliée à la durée d'émission par la relation: $\Delta v\tau \approx 1$, soit $\Delta\omega\tau \approx 2\pi$.

Une onde rigoureusement monochromatique $\Delta v = 0$ exigerait une durée d'émission infinie, et n'existe donc pas.

On modélisera par une onde plane monochromatique de direction de propagation \vec{z} une onde électromagnétique réelle d'extension en fréquence $\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1$, formant un faisceau parallèle d'extension spatiale perpendiculairement à \vec{z} très supérieure à sa longueur d'onde λ .

2.3. Énergie transportée par une onde électromagnétique plane progressive

2.3.1. Vecteur de Poynting de l'onde plane progressive

Soit Oz la direction de propagation :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \wedge (\vec{z} \wedge \vec{E}) = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{z} = \epsilon_0 E^2 c \vec{z}.$$

La densité volumique d'énergie s'écrit : $u = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$. À tout instant, $B = \frac{E}{c}$, donc : $u = \epsilon_0 E^2$.

\vec{R} s'interprète bien comme le vecteur densité volumique de courant d'énergie électromagnétique. Cette énergie se propage à la vitesse c perpendiculairement aux plans d'onde : c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Si l'on considère un récepteur plan d'aire orientée \vec{S} , la puissance moyenne détectée sera $I = \iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S}$. I est l'intensité reçue par le détecteur.

2.3.2. Interprétation en termes de photons

Dans les expériences faisant intervenir l'interaction entre une onde électromagnétique et la matière, on peut raisonner en faisant intervenir le double aspect ondulatoire et corpusculaire des ondes électromagnétiques.

Si l'on considère une onde monochromatique progressive de pulsation ω , la moyenne au cours du temps de la densité volumique d'énergie est $\langle u \rangle = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \epsilon_0 \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2}$.

On lui associe des photons d'énergie $\hbar\omega = h\nu$, de densité volumique $n = \epsilon_0 \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\hbar\omega}$.

Ces photons se déplacent dans le vide à la vitesse c dans la direction \vec{z} , produisant une densité volumique de courant d'énergie électromagnétique $n h\nu c \vec{z} = \langle \vec{R} \rangle$.

Les photons ont une quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}\vec{d}_z$.

On peut poursuivre l'interprétation en associant à l'onde une densité volumique de quantité de mouvement $n\frac{h\nu}{c}\vec{d}_z = \frac{\langle \vec{R} \rangle}{c^2} = \frac{\epsilon_0}{c}\langle E^2 \rangle \vec{d}_z$.

Remarque : le raisonnement a été fait pour une onde plane monochromatique progressive. La relation entre champ et énergie n'étant pas linéaire, on ne peut pas *a priori* additionner les énergies des composantes d'une onde électromagnétique plane. Lorsqu'on peut le faire, les composantes sont dites incohérentes. C'est le cas pour des ondes monochromatiques de fréquences différentes, et pour des ondes dont les champs électriques sont constamment orthogonaux entre eux.

2.4. Polarisation des ondes planes électromagnétiques harmoniques progressives

2.4.1. Notion de polarisation d'une onde

On considère à nouveau une propagation suivant la direction Oz .

Le vecteur complexe \vec{E}_0 n'a donc que deux composantes $E_{0x}e^{i\phi_x}$ et $E_{0y}e^{i\phi_y}$. Dans un plan d'onde donné, correspondant à une valeur constante de z , qu'on pourra choisir comme origine de l'axe Oz , le vecteur champ électrique aura donc pour composantes : $E_{0x}\cos(\phi_x - \omega t)$, $E_{0y}\cos(\phi_y - \omega t)$.

L'extrémité du vecteur \vec{E} décrit donc au cours du temps une ellipse. L'onde est dite *polarisée elliptiquement*.

Si l'ellipse se réduit à un segment de droite, l'onde est dite *polarisée rectilignement*. Si l'ellipse est un cercle, l'onde est dite *polarisée circulairement*.

Si dans un plan d'onde, l'onde tourne autour de sa direction de propagation dans le sens conventionnel positif, elle est dite *gauche*. Si elle tourne en sens contraire, elle est dite *droite*.

La méthode est la suivante : un observateur vers qui l'onde se propage, voit le champ électrique dans un plan d'onde fixe tourner vers la droite (resp. : la gauche) lorsque sa polarisation est droite (resp. : gauche).

La connaissance du déphasage $\phi = \phi_y - \phi_x$ entre les composantes permet de déterminer la forme de l'ellipse et son sens de polarisation.

On choisit l'origine des temps pour que $\phi_x = 0$. $E_x = E_{0x}\cos(\omega t)$, $E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \phi)$.

À $t = 0$, E_x est maximum, et $E_y = E_{0y}\cos\phi$. Pour trouver le sens de la polarisation, on

étudie $\left. \frac{\partial E_y}{\partial t} \right|_{t=0} = \omega E_{0y}\sin\phi$. La polarisation sera gauche si $\sin\phi > 0$, soit $0 < \phi < \pi$, et

droite si $\sin\phi < 0$.

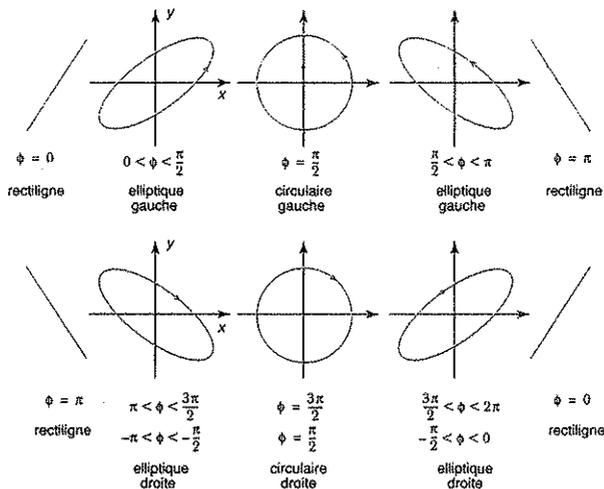
Pour $\phi = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, les axes Ox et Oy coïncident avec les axes de symétrie de l'ellipse.

Si, de plus, les amplitudes E_{0x} et E_{0y} sont égales, la polarisation est circulaire (figure 3).

Remarque

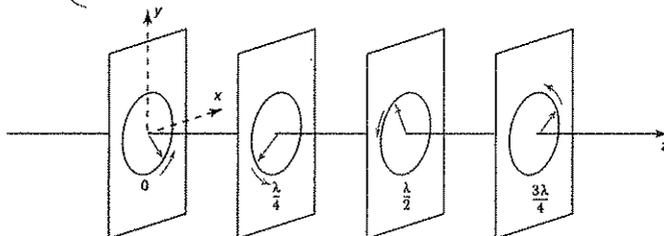
Si la polarisation est circulaire, le choix des axes Ox et Oy est indifférent.

Polarisation d'une onde plane harmonique progressive en fonction du déphasage entre les composantes



Remarque : si maintenant on considère l'onde à un instant donné, la rotation du vecteur \vec{E} lorsqu'on passe d'un plan d'onde à un autre en progressant suivant l'axe Oz se fait dans le sens positif pour une polarisation elliptique droite et en sens inverse pour une polarisation elliptique gauche (figure 4).

Onde elliptique gauche à un instant t_0



Une onde plane monochromatique progressive quelconque est toujours décomposable en la superposition de deux ondes planes monochromatiques progressives polarisées rectilignement suivant deux directions perpendiculaires,

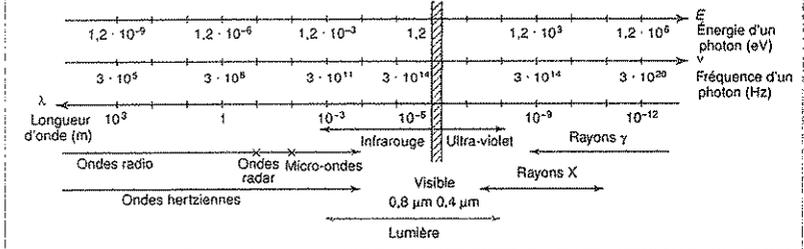
$$\vec{E} = E_{0x} \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) - \phi_x\right) \vec{e}_x + E_{0y} \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) - \phi_y\right) \vec{e}_y,$$

ou en la superposition de deux ondes polarisées circulairement l'une droite, et l'autre gauche.

2.4.2. Réalisation expérimentale de lumière polarisée

La lumière est une onde électromagnétique dont les fréquences sont dans le domaine du visible, c'est-à-dire dont les longueurs d'onde sont de l'ordre de 0,4 à 0,8 μm (voir figure 5).

Rayonnement électromagnétique (échelle logarithmique)



La plupart des sources lumineuses fournissent une lumière dite naturelle ou non polarisée, c'est-à-dire que la phase relative des deux composantes du champ est aléatoire et varie au cours du temps.

Pour obtenir une onde plane lumineuse monochromatique, polarisée rectilignement, on forme un faisceau parallèle en plaçant la source au foyer d'une lentille, puis on limite la largeur du spectre en fréquences à l'aide d'un filtre. L'utilisation de *polariseurs* qui absorbent complètement la composante du champ électrique parallèle à une direction caractéristique permet d'obtenir une onde polarisée rectilignement perpendiculairement à cette direction.

En plaçant un second polariseur à la suite du premier, on réalise un *analyseur* : seule passe la composante du champ électrique suivant la direction non absorbante de l'analyseur. L'intensité lumineuse est proportionnelle à la valeur moyenne du vecteur de Poynting, donc au carré du module du champ électrique : on en déduit la **loi de Malus**.

Si le polariseur et l'analyseur ont leurs directions non absorbantes qui font l'angle α , l'intensité à la sortie, proportionnelle au carré du module du champ électrique, sera de la forme $I = I_0 \cos^2 \alpha$, où I_0 représente le maximum de l'intensité à la sortie de l'analyseur.

3 Ondes électromagnétiques dans un plasma

3.1. Modélisation d'un plasma

Un plasma est un milieu matériel électriquement neutre dans lequel on peut négliger toute interaction entre les ions et les électrons. C'est le cas par exemple lorsque l'énergie cinétique d'agitation thermique est très supérieure aux énergies de liaison des électrons. On soumet le plasma à une onde plane électromagnétique progressive. Les ions et les électrons sont alors soumis à la force de Lorentz. On néglige l'action du champ magnétique de l'onde. Les ions étant beaucoup plus massiques que les électrons, et soumis à une force électrique de même module, sont considérés comme immobiles.

3.2. Relation constitutive du milieu

L'équation mécanique du mouvement des électrons s'écrit : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$.

L'équation étant linéaire, on s'intéresse à l'action d'une composante monochromatique à la pulsation ω : $\vec{E} = \vec{E}_0(x, y, z)e^{i\omega t}$. On suppose que la longueur caractéristique des variations de \vec{E}_0 , soit λ , est grande devant l'amplitude des oscillations des électrons, de manière à considérer que l'électron est soumis à un champ égal à celui qu'il subirait s'il était à sa position d'équilibre. Le régime forcé est une oscillation à la même pulsation ω , et donc $\frac{d\vec{v}}{dt} = i\omega\vec{v}$.

$\vec{v} = -\frac{e}{im\omega}\vec{E}$. Il y a donc une densité volumique de courant $\vec{j} = \frac{ne^2}{im\omega}\vec{E}$.

L'équation de conservation de la charge $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$ s'écrit : $\text{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$,

soit, en notation complexe : $i\omega \left(1 - \frac{ne^2}{m\epsilon_0\omega^2} \right) \text{div} \vec{E} = 0$.

On pose $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$, où ω_p est la *pulsation plasma*.

Si $\omega^2 \neq \omega_p^2$, $\text{div} \vec{E} = 0$.

3.3. Équation des ondes électromagnétiques dans un plasma

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\mu_0 \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right).$$

En notation complexe, pour une onde monochromatique à une pulsation différente de la pulsation plasma :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 (\omega_p^2 - \omega^2) \vec{E}.$$

3.4. Ondes planes monochromatiques progressives dans un plasma

3.4.1. Forme générale des solutions

Si l'on prend l'axe Oz suivant la direction de propagation, on cherche des solutions de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}, \text{ où } k \text{ peut être réel ou complexe.}$$

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} \text{ donc : } k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \text{ l'onde est transverse. } \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}.$$

3.4.2. Relation de dispersion

Si $\omega > \omega_p$, k est réel. Pour ces fréquences, il y a des solutions sous forme d'ondes planes monochromatiques, de célérité $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$, toujours supérieure à c , et dépendant de ω .

$\frac{\omega}{k}$ est la vitesse de phase v_ϕ , et correspond à la vitesse de propagation d'une composante monochromatique. Cette vitesse dépendant de ω , les différentes composantes du signal se propagent à des vitesses différentes. C'est le phénomène de *dispersion*. La relation $k(\omega)$ est appelée *relation de dispersion*.

Il y aura donc déformation du paquet d'onde au cours du passage dans le milieu. Si ce paquet d'onde a une largeur spectrale $\Delta\omega$ centrée autour d'une pulsation ω_0 , chaque composante se déplacera à la vitesse $v_\phi(\omega)$, mais l'enveloppe se déplacera en se déformant à la vitesse $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_0}$ appelée *vitesse de groupe*.

Le fait que v_ϕ soit supérieure à c n'est pas contraire au principe de vitesse limite de transport des informations, car les informations transportées par un paquet d'onde correspondent à l'enveloppe et se propagent donc à la vitesse de groupe. Avec une relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}, \quad \frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = c^2, \quad \text{soit } v_g v_\phi = c^2.$$

La vitesse de groupe est donc égale à $c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$, toujours inférieure à c .

3.4.3. Pulsation de coupure

Si $\omega < \omega_p$, k est imaginaire pur. Pour un plasma occupant le demi-espace $z > 0$, la solution est de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-|k|z} e^{i\omega t} = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\omega t}.$$

L'onde ne se propage pas mais est stationnaire, avec une amplitude qui décroît exponentiellement sur une longueur $\delta = \frac{1}{|k|} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$. Le plasma se comporte comme un filtre

traverse de fréquence de coupure $\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$.

3.4.4. Propagation de l'énergie

Pour $\omega > \omega_p$, il y a propagation. La densité volumique d'énergie électromagnétique

$$s'écrit : u = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \left(1 + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} \right) = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right).$$

En valeur moyenne au cours du temps :

$$\langle u \rangle = \epsilon_0 \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{4} \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right).$$

Les électrons en mouvement dans le plasma ont une densité d'énergie cinétique

$$\text{moyenne : } \langle u_c \rangle = \frac{1}{2} nm \langle v \rangle^2 = \frac{1}{4} \frac{n e^2}{m \omega^2} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) = \frac{1}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \epsilon_0 (E_{0x}^2 + E_{0y}^2).$$

La moyenne au cours du temps de la densité volumique d'énergie dans le milieu est donc :

$$\langle u_{\text{tot}} \rangle = \epsilon_0 \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2}.$$

Le vecteur de Poynting s'écrit : $\vec{R} = \frac{\vec{k} E^2}{\omega \mu_0} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \epsilon_0 c E^2 \vec{z}$.

En valeur moyenne au cours du temps :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{\epsilon_0 (E_{0x}^2 + E_{0y}^2)}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} c \vec{z} = \langle u_{\text{tot}} \rangle \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} c \vec{z}.$$

On retrouve que l'énergie se propage dans le plasma à la vitesse de groupe $\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} c$.

Remarque

Dans tous les cas,

$$\vec{j} = \frac{n e^2}{i m \omega} \vec{E}, \quad \text{et donc}$$

\vec{j} et \vec{E} sont en quadrature de phase :

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0.$$

Quelle que soit la valeur de ω , il n'y a pas d'absorption d'énergie par le plasma ainsi modélisé.

Pour $\omega < \omega_p$, $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{i}{\omega \delta} \wedge \vec{E}$, et est donc en quadrature de phase avec le champ électrique.

$\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$: il n'y a pas de propagation de l'énergie dans le plasma pour des fréquences inférieures à la fréquence de coupure.

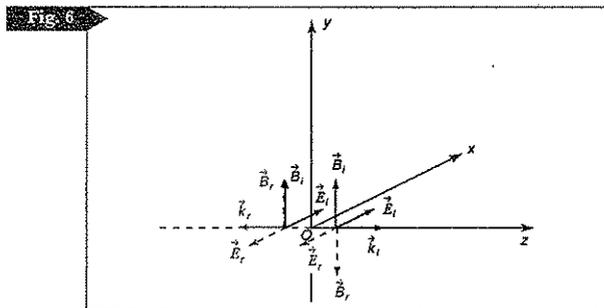
MP

4 Ondes électromagnétiques guidées

4.1. Réflexion sous incidence normale d'une onde plane progressive sur un plan conducteur parfait

4.1.1. Origine du champ réfléchi

Si le plan est parfaitement conducteur (conductivité infinie), les charges sont surfaciques et le champ électromagnétique est nul à l'intérieur du conducteur. On prend les axes xOy dans le plan, et la direction Oz dirigée vers l'intérieur du conducteur (figure 6).



Soit une onde électromagnétique progressive suivant Oz , et polarisée suivant Ox :

$$\vec{E}_{in} = E_{0in} \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \phi\right) \vec{e}_x, \quad \vec{B}_{in} = \frac{E_{0in}}{c} \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \phi\right) \vec{e}_y.$$

Soumis à ce champ en $z = 0$, les charges surfaciques créent un champ électromagnétique de manière à assurer la nullité du champ électromagnétique à l'intérieur du conducteur. La distribution des charges et courants étant dans le plan $z = 0$, ce dernier est plan de symétrie pour le champ électrique, et plan d'antisymétrie pour le champ magnétique.

$$z > 0 : \vec{E}_r = -E_{0in} \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \phi\right) \vec{e}_x, \quad \vec{B}_r = -\frac{E_{0in}}{c} \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \phi\right) \vec{e}_y.$$

$$z < 0 : \vec{E}_r = -E_{0in} \cos\left(\omega\left(t + \frac{z}{c}\right) + \phi\right) \vec{e}_x, \quad \vec{B}_r = +\frac{E_{0in}}{c} \cos\left(\omega\left(t + \frac{z}{c}\right) + \phi\right) \vec{e}_y.$$

Dans le demi-espace $z < 0$, la superposition des deux ondes s'écrit :

$$\vec{E} = E_{0in} \left[\cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \phi\right) - \cos\left(\omega\left(t + \frac{z}{c}\right) + \phi\right) \right] \vec{e}_x = 2E_{0in} \sin(\omega t + \phi) \sin \omega \frac{z}{c} \vec{e}_x,$$

$$\vec{B} = \frac{E_{0in}}{c} \left[\cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \phi\right) + \cos\left(\omega\left(t + \frac{z}{c}\right) + \phi\right) \right] \vec{e}_y = 2 \frac{E_{0in}}{c} \cos(\omega t + \phi) \cos \omega \frac{z}{c} \vec{e}_y.$$

Remarque
On vérifie que ce champ réfléchi a bien la structure d'une onde électromagnétique plane progressive.

C'est donc une onde stationnaire.

4.1.2. Structure de l'onde stationnaire

En un point de cote z donné, les deux champs sont en quadrature de phase. Les champs électriques et magnétiques sont des fonctions sinusoïdales de z , et s'annulent donc périodiquement dans des plans dits *nodaux*, espacés d'une demi-longueur d'onde.

Pour le champ électrique, les plans nodaux correspondent à $z = -n\frac{\lambda}{2}$, et sont des plans où le champ magnétique vibre avec une amplitude maximale : *plans ventraux du champ magnétique*. Les plans nodaux du champ magnétique correspondent à $z = -(2n+1)\frac{\lambda}{4}$, et sont les plans ventraux du champ électrique.

Le plan conducteur est évidemment un plan nodal du champ électrique. C'est donc aussi un plan ventral du champ magnétique. Il y a donc une force de Laplace exercée par l'onde sur le plan conducteur : c'est la pression de radiation.

4.1.3. Aspect énergétique des ondes stationnaires

Le vecteur de Poynting s'annule sur tous les plans nodaux de l'un ou l'autre des champs, donc tous les $\frac{\lambda}{4}$. L'énergie se trouve donc confinée entre des plans distants de $\frac{\lambda}{4}$.

La valeur moyenne au cours du temps du vecteur de Poynting est nulle en tout point puisque les champs \vec{E} et \vec{B} sont en quadrature de phase.

La densité volumique d'énergie électromagnétique en un point de cote z s'écrit :

$$u = 2\varepsilon_0 E_{0in}^2 \left(\cos^2(\omega t + \phi) \cos^2 \frac{\omega}{c} z + \sin^2(\omega t + \phi) \sin^2 \frac{\omega}{c} z \right).$$

En valeur moyenne au cours du temps : $\langle u \rangle = \varepsilon_0 E_{0in}^2 \left(\cos^2 \frac{\omega}{c} z + \sin^2 \frac{\omega}{c} z \right) = \varepsilon_0 E_{0in}^2$ indépendante du point où on la calcule.

4.1.4. Pression de radiation

À la surface du conducteur, la discontinuité du champ magnétique vaut :

$$\mu_0 \vec{i}_s \wedge \vec{e}_z = -\vec{B}_{z=0-} = -2 \frac{E_{0in}}{c} \cos(\omega t + \phi) \vec{e}_y.$$

Le courant surfacique est dû au champ électrique et est donc suivant \vec{e}_x .

$\vec{i}_s = 2 \frac{E_{0in}}{\mu_0 c} \cos(\omega t + \phi) \vec{e}_x$. La force de Laplace s'exerçant sur l'élément de surface dS du conducteur par le champ extérieur (le champ réfléchi est créé par la distribution elle-même et est donc une force intérieure) est donc :

$$d\vec{F} = \vec{i}_s dS \wedge \vec{B}_{in} = 2 \frac{E_{0in}^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t + \phi) dS \vec{e}_z.$$

C'est une force de pression exercée vers l'intérieur du conducteur. Cette pression P est appelée pression de radiation et sa valeur moyenne au cours du temps vaut :

$$\langle P \rangle = \frac{E_{0in}^2}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 E_{0in}^2$$

4.2. Propagation d'une onde monochromatique entre deux plans conducteurs parallèles

Soient deux plans conducteurs parallèles d'abscisses $x = 0$ et $x = a$.

4.2.1. Recherche d'une solution vérifiant les conditions aux limites

Le champ électrique est nul à l'intérieur des conducteurs, et sa composante tangentielle est continue. On cherche une solution monochromatique **non plane** se propageant suivant Oz , polarisée suivant Oy et s'annulant en $x = 0$ et $x = a$, de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y,$$

L'équation de propagation $\frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} + \frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$ donne la relation de dispersion :

$$+k^2 = +\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}.$$

$\text{div} \vec{E} = 0$ est automatiquement vérifié par le choix de la polarisation.

$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ fournit l'expression du champ magnétique : $-i\omega \vec{B} = \frac{\partial E}{\partial x} \vec{e}_z - \frac{\partial E}{\partial z} \vec{e}_x$, soit :

$$\vec{B} = \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \frac{i}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_z - \frac{k}{\omega} E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x.$$

La composante normale du champ magnétique s'annule bien en $x = 0$ et $x = a$. Sa composante suivant Oz , dite **longitudinale**, n'est pas nulle.

En général, une onde non plane n'est pas transverse.

4.2.2. Propriétés de l'onde guidée. Notion de modes

Pour une pulsation ω donnée, il n'y a de solution à vecteur d'onde \vec{k} réel, donc de propagation, que si $\omega > \omega_c = \frac{\pi}{a}$, soit une longueur d'onde dans le vide $\lambda < \lambda_c = 2a$.

Si $\omega > \omega_c$, il peut y avoir plusieurs solutions, $k_n^2 = +\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$ correspondant à des valeurs entières de n différentes.

L'existence de conditions aux limites entraîne une quantification des vecteurs d'onde. À chaque valeur de n correspond un **mode** de propagation différent, et une pulsation de coupure au-dessous de laquelle ce mode ne se propage pas.

D'une manière générale, à chaque solution vérifiant les conditions aux limites, on associe un **mode** de propagation.

Ici, on a choisi un champ électrique transverse. Le champ magnétique a alors une composante longitudinale. On parle de mode transverse électrique.

Les solutions k_n décrites ci-dessus sont notées TE_n . On aurait pu de même chercher un champ magnétique transverse, et les solutions auraient été notées transverses magnétiques : TM_n . Le champ électrique a alors en général une composante longitudinale.

La solution générale sera une superposition de ces différents modes.

4.2.3. Polarisation d'une onde par passage entre deux plans conducteurs

Si l'on cherche une solution polarisée perpendiculairement aux plans métalliques : $\vec{E} = E_0(x)e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_x$, $\text{div}\vec{E} = 0$ impose que ce soit une onde plane. \vec{E} étant normal aux plans conducteurs, peut être non nul en $x = 0$ et $x = a$. Le champ magnétique

$\vec{B} = \frac{E_0}{c}e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_y$, est tangent aux plans conducteurs, il peut donc être non nul.

La solution ($\vec{E} = E_0e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_x$, $\vec{B} = \frac{E_0}{c}e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_y$), avec $k = \frac{\omega}{c}$ est donc toujours solution, quelle que soit la valeur de la pulsation ω .

Une onde plane non polarisée se propageant suivant Oz sortira donc polarisée **perpendiculairement** aux plans conducteurs si l'écart entre les plans est inférieur à sa demi-longueur d'onde.

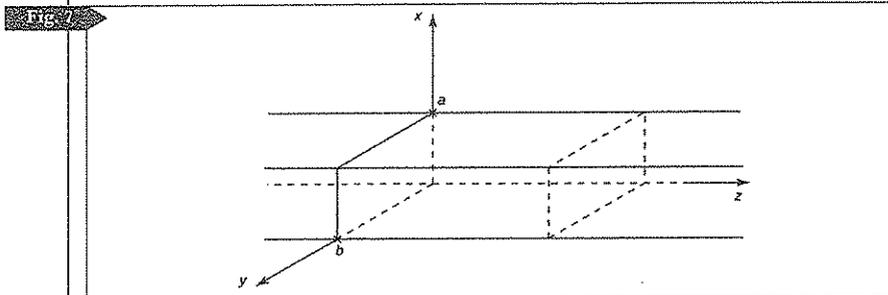
4.3. Guide d'onde infini à section rectangulaire

4.3.1. Définition du guide d'onde

Un guide d'onde est un cylindre métallique soit vide, soit rempli d'un diélectrique, dans lequel une onde électromagnétique se propage parallèlement aux génératrices. Les réflexions sur les parois métalliques empêchent l'énergie électromagnétique de se disperser dans l'espace entre la source et le détecteur.

Le guide d'onde peut être rectangulaire ou cylindrique.

Nous considérerons un guide d'onde rectangulaire, dont le volume intérieur est assimilable au vide, et dont les parois sont des conducteurs parfaits (figure 7).



4.3.2. Étude d'une onde guidée TE

Les plans conducteurs sont les plans $x = 0$ et $x = a$, et $y = 0$ et $y = b$, avec $a < b$.

On s'intéresse à une onde monochromatique transverse électrique se propageant suivant l'axe Oz du guide, et vérifiant les conditions aux limites, donc de la forme :

$$\underline{E}_x = \underline{E}_1(x) \sin \frac{m\pi y}{b} e^{i(\omega t - kz)}, \quad \underline{E}_y = \underline{E}_2(y) \sin \frac{n\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)}, \quad \text{onde TE}_{nm}.$$

Le champ doit vérifier $\text{div}\vec{E} = 0$, donc :

$$\frac{d\underline{E}_1(x)}{dx} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{i(\omega t - kz)} + \frac{d\underline{E}_2(y)}{dy} \sin \frac{n\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)} = 0, \quad \text{quels que soient } x, y, z \text{ et } t$$

$$\underline{E}_1(x) = \underline{E}_{10} \cos \frac{n\pi x}{a}, \quad \underline{E}_2(y) = \underline{E}_{20} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad \text{et, si } m \text{ et } n \text{ non nuls : } \frac{n}{a}\underline{E}_{10} + \frac{m}{b}\underline{E}_{20} = 0.$$

Si $m = 0$, $\vec{E} = E_{20} \sin \frac{n\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y$, si $n = 0$: $\vec{E} = E_{10} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$.

L'équation de propagation, écrite indifféremment sur la composante x ou la composante y donne la relation de dispersion :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right] \left(E_{10} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{i(\omega t - kz)} \right) = 0, \text{ soit :}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right).$$

k est réel et l'onde se propage donc sans absorption si $\omega > \omega_c = c \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}}$. La plus petite valeur de ω possible pour qu'une onde puisse se propager est donc $\omega_c = \frac{\pi c}{a}$, correspondant à une longueur d'onde dans le vide λ égale à $2a$.

Pour une pulsation donnée, le mode pour lequel le module k du vecteur d'onde est le plus grand est le mode TE_{10} dit fondamental. Si $\frac{\pi c}{a} < \omega < \pi c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$, seul ce mode sera excité : le guide sera dit monomode.

4.3.3. Étude de l'onde guidée TE_{10}

$$\underline{E}_x = 0, \underline{E}_y = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)}, \quad k_{10} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

La vitesse de phase vaut : $v_\phi = c \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$, toujours plus grande que c .

La vitesse de groupe vaut : $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$.

Le champ magnétique vaut : $\vec{B} = \frac{\pi}{a\omega} \cos \frac{\pi x}{a} E_0 e^{i(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})} \vec{e}_z - \frac{k}{\omega} E_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$.

On remarque qu'à haute fréquence, la composante longitudinale tend vers 0, et la relation de dispersion tend vers $k = \frac{\omega}{c}$: il n'y a plus de dispersion. On retrouve les caractéristiques d'une onde plane : le guide d'onde est alors suffisamment grand pour qu'on puisse considérer l'onde guidée comme une onde plane.

En notation réelle : $\vec{E} = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - kz + \phi) \vec{e}_y$,

$$\vec{B} = -E_0 \left(\frac{\pi}{a\omega} \cos \frac{\pi x}{a} \right) \sin(\omega t - kz + \phi) \vec{e}_z - \frac{k}{\omega} E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - kz + \phi) \vec{e}_x,$$

et le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left[E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - kz + \phi) \vec{e}_y \wedge \left[-E_0 \left(\frac{\pi}{a\omega} \cos \frac{\pi x}{a} \right) \sin(\omega t - kz + \phi) \vec{e}_z - \frac{k}{\omega} E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - kz + \phi) \vec{e}_x \right] \right]$$

En valeur moyenne au cours du temps, le premier produit est nul, et le second s'écrit avec

$$\omega_c = \frac{\pi c}{a} : \langle \vec{R} \rangle = \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}{2\mu_0 c} \left[E_0^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \right] \vec{e}_z \text{ et, en moyenne sur la section du guide :}$$

$$\langle \langle \vec{R} \rangle \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} c \vec{e}_z.$$

La valeur moyenne au cours du temps de la densité volumique d'énergie est

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{4\mu_0 c^2} E_0^2 \left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right) + \frac{1}{4\mu_0 c^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) E_0^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a}, \text{ soit, en moyenne}$$

sur une section du guide d'ondes (x varie de 0 à a) : $\langle \langle u \rangle \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2.$

On retrouve que l'énergie électromagnétique se propage dans le guide à la vitesse

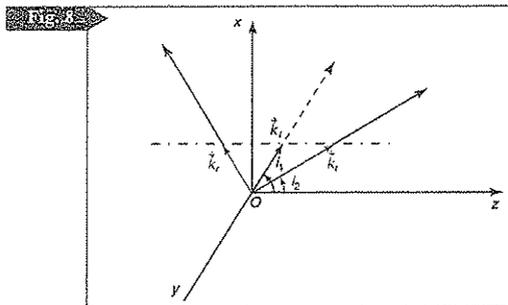
$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}.$$

5 Réflexion et transmission d'une onde plane

5.1. Loix de Descartes

Si une onde plane monochromatique progressive $\vec{E}_i e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$ arrive sur le plan appelé xOy séparant deux milieux (1) et (2) dans lesquels les relations de dispersion $k(\omega)$ permettent de définir les vitesses de phase $v_1(\omega) = \frac{c}{n_1(\omega)}$ et $v_2(\omega) = \frac{c}{n_2(\omega)}$, elle génère une

onde plane réfléchie $\vec{E}_r e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$ et une onde plane transmise $\vec{E}_t e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$ permettant de satisfaire les relations de continuité des champs (figure 8).



Ces relations doivent être vérifiées à tout instant, et les sinusoides forment une famille libre, ce qui impose : $\omega = \omega_r = \omega_t$.

Les ondes réfléchies et transmises ont même pulsation que l'onde incidente.

De même, ces relations doivent être vérifiées quels que soient x et y , donc $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$, et $k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$.

Les composantes tangentielles des vecteurs d'onde des ondes incidentes, réfléchies et transmises sont les mêmes.

Si $\vec{n} = \vec{e}_z$ est le vecteur normal au plan de séparation appelé *dioptre*, l'égalité des composantes tangentielles s'écrit : $\vec{k}_i \wedge \vec{n} = \vec{k}_r \wedge \vec{n} = \vec{k}_t \wedge \vec{n}$. Les normes des vecteurs d'onde s'écrivent $k_i = k_r = \frac{n_1 \omega}{c}$, et $k_t = \frac{n_2 \omega}{c}$. On note i_1 l'angle d'incidence entre \vec{n} et la direction de propagation de l'onde incidente $\vec{u}_i = \frac{\vec{k}_i}{k_i}$, i'_1 l'angle de réflexion entre \vec{n} et $\vec{u}_r = \frac{\vec{k}_r}{k_r}$, et i_2 l'angle de réfraction entre \vec{n} et $\vec{u}_t = \frac{\vec{k}_t}{k_t}$. Les lois de Descartes pour la réflexion et la réfraction s'écrivent alors : $n_1(\vec{u}_i - \vec{u}_r) \wedge \vec{n} = \vec{0}$, $(n_1 \vec{u}_i - n_2 \vec{u}_t) \wedge \vec{n} = \vec{0}$, ou encore :

Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence.

$\sin i'_1 = \sin i_1$; $i'_1 = \pi - i_1$, et $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

5.2. Interprétation des ondes guidées TE₁₀

Dans le cas d'un conducteur parfait, il n'y a pas d'onde transmise, mais seulement une onde réfléchie, de même amplitude.

On s'intéresse à une onde plane incidente polarisée suivant Oy . Son vecteur d'onde est donc dans le plan xOz , et fait l'angle $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ avec Oz . Le vecteur d'onde de l'onde réfléchie par les plans $x = 0$ et $x = a$ fera alors l'angle $-\theta$ avec Oz , dans le plan xOz .

$\vec{k}_i = \frac{\omega}{c}(\cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_x)$, et $\vec{k}_r = \frac{\omega}{c}(\cos \theta \vec{e}_z - \sin \theta \vec{e}_x)$.

$\vec{E}_i = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} \cos \theta z - \frac{\omega}{c} \sin \theta x)} \vec{e}_y$, $\vec{E}_r = \underline{E}_1 e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} \cos \theta z + \frac{\omega}{c} \sin \theta x)} \vec{e}_y$, avec $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{0}$ en $x = 0$, donc $\underline{E}_1 = -\underline{E}_0 = -E_0 e^{i\phi}$.

Leur superposition s'écrit :

$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} \cos \theta z)} \left[e^{-i \frac{\omega}{c} \sin \theta x} - e^{i \frac{\omega}{c} \sin \theta x} \right] \vec{e}_y = -2i \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} \cos \theta z)} \sin \left(\frac{\omega}{c} \sin \theta x \right) \vec{e}_y$.

$\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{0}$ en $x = a$, donc $\sin \theta = \frac{n\pi c}{\omega a}$, avec n entier.

Seules les ondes faisant un angle θ vérifiant cette relation pourront se propager dans le guide, avec le vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \cos \theta \vec{e}_z$.

$$k = \frac{\omega}{c} \cos \theta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$$

On retrouve la pulsation de coupure : $\sin \theta < 1$ entraîne $\omega > \omega_c = \frac{\pi}{a}$.

En notation réelle : $\vec{E} = 2E_0 \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{c} \cos \theta z + \phi \right) \sin \left(\frac{\omega}{c} \sin \theta x \right) \vec{e}_y$
 $= 2E_0 \cos \left(\omega t - kz + \phi - \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \vec{e}_y$.

Le champ magnétique associé peut être calculé comme somme des champs magnétiques des deux ondes planes incidentes et réfléchies :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \vec{E}_i = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} \cos \theta z - \frac{\omega}{c} \sin \theta x)} (-\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z),$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r}{\omega} \wedge \vec{E}_r = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} \cos \theta z + \frac{\omega}{c} \sin \theta x)} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z)$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} \cos \theta z)} \left[\cos \theta \vec{e}_x \left(e^{i \frac{\omega}{c} \sin \theta x} - e^{-i \frac{\omega}{c} \sin \theta x} \right) + \sin \theta \vec{e}_z \left(e^{-i \frac{\omega}{c} \sin \theta x} + e^{i \frac{\omega}{c} \sin \theta x} \right) \right]$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} \cos \theta z)} \left[\left(2i \sin \frac{\omega}{c} \sin \theta x \right) \cos \theta \vec{e}_x + \left(2 \cos \frac{\omega}{c} \sin \theta x \right) \sin \theta \vec{e}_z \right]$$

En notation réelle :

$$\vec{B} = -2 \frac{E_0 \cos \theta}{c} \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{c} \cos \theta z + \phi \right) \sin \left(\frac{\omega}{c} \sin \theta x \right) \vec{e}_x + 2 \frac{E_0 \sin \theta}{c} \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c} \cos \theta z + \phi \right) \cos \left(\frac{\omega}{c} \sin \theta x \right) \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = -2 E_0 \frac{k}{\omega} \cos \left(\omega t - kz + \phi - \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \vec{e}_x - 2 E_0 \frac{n\pi}{a\omega} \sin \left(\omega t - kz + \phi - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \vec{e}_z.$$

Les résultats sont conformes à ceux trouvés précédemment pour une onde TE₁₀ au paragraphe 4.3.

6 Rayonnement dipolaire

6.1. L'approximation dipolaire

Les sources d'ondes électromagnétiques sont des charges en mouvement.

Les équations de Maxwell permettent de calculer les champs électriques et magnétiques qu'elles créent en un point M , à partir des potentiels dont ils dérivent, qui, si l'on utilise la jauge de Lorentz, ont la forme des potentiels retardés donnée dans le chapitre sur « les équations de Maxwell ».

Ces potentiels font intervenir les charges et les vitesses définies au point P à l'instant

$$t - \frac{PM}{c}.$$

L'approximation dipolaire consiste à considérer des distributions de charges équivalentes à un dipôle, d'extension spatiale a autour d'un point O suffisamment petite

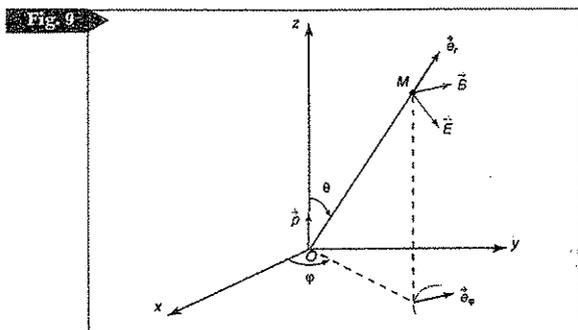
pour que l'on puisse confondre les temps $t - \frac{PM}{c}$ et $t - \frac{OM}{c} = t - \frac{r}{c}$.

Pratiquement, cela signifie que le temps caractéristique des mouvements des charges est petit devant $\frac{a}{c}$.

Pour des mouvements sinusoïdaux de fréquence ν , cela revient à supposer $a \ll \lambda = \frac{c}{\nu}$ longueur d'onde dans le vide à cette fréquence. On peut encore considérer que les vitesses des particules, de l'ordre de $a\nu$, sont très inférieures à c : particules non relativistes.

6.2. Calcul du rayonnement dipolaire

Les équations étant linéaires, on peut toujours décomposer un mouvement quelconque en trois mouvements suivant les trois axes de coordonnées. On considérera donc un mouvement de charges suivant la direction fixe Oz (figure 9).



L'expression du potentiel vecteur dans l'approximation dipolaire est alors :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P, t - \frac{r}{c})}{PM} d\tau_P$$
 On pose $t'(t, r) = t - \frac{r}{c}$. À grande distance, le développement à l'ordre 1 en a/r donne l'expression : $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint \vec{j}(P, t') d\tau_P$ et, en faisant intervenir le moment dipolaire $\vec{p} = p\vec{e}_z$ de la distribution : $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{dp}{dt'}(t')\vec{e}_z$.

On en déduit immédiatement le champ magnétique par $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$.

Si une fonction f dépend des variables x, y et z des coordonnées cartésiennes uniquement par l'intermédiaire de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{xd f}{r dr} = \frac{r}{r} \frac{df}{dr} \cdot \vec{e}_x$.

Le calcul se fait en coordonnées cartésiennes, et on peut donc utiliser le vecteur nabla (voir chapitre 1).

Pour une fonction ne dépendant que de r : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{r}{r} \frac{d}{dr} = \vec{e}_r \frac{d}{dr}$.

$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, soit : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{dp}{dt'} \right) \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z$.

$\frac{\partial}{\partial r} g(t') = \frac{dg}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{dg}{dt'}$ et $\frac{\partial}{\partial t'} g(t') = \frac{dg}{dt'}$.

On pose $\dot{p} = \frac{dp}{dt'}(t')$ et $\ddot{p} = \frac{d^2 p}{dt'^2}(t')$

$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{rc} \right) \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{rc} \right) \sin\theta \vec{e}_\phi$.

On ne s'intéresse qu'au champ rayonné à grande distance. Si T est le temps caractéristique des variations de p , $r \gg cT = \lambda$, donc les termes en $\frac{1}{r^2}$ sont négligés devant ceux en $\frac{1}{r}$.

Les termes du premier ordre en $\frac{1}{r}$ proviennent uniquement des dérivations de $t' = t - \frac{r}{c}$ par rapport à r .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi r c} \sin\theta \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{p} \wedge \vec{e}_r.$$

Pour calculer $\vec{E}(M, t)$, il faut connaître le potentiel V . On l'obtient à partir de la jauge de Lorentz :

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}, \text{ soit } \frac{z}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{p}(t') \right) = \frac{\mu_0 z}{4\pi r} \left(-\frac{1}{r^2} \dot{p}(t') - \frac{1}{rc} \ddot{p}(t') \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}.$$

$$V = \frac{\mu_0 c^2 z}{4\pi r} \left(\frac{\dot{p}(t')}{r^2} + \frac{1}{rc} \dot{p}(t') \right) = \frac{\mu_0 c^2 \cos\theta}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}(t')}{r^2} + \frac{1}{rc} \dot{p}(t') \right) \text{ en coordonnées sphériques d'axe } Oz.$$

$$\text{En ne gardant que les termes en } \frac{1}{r} : V = \frac{\mu_0 c \cos\theta}{4\pi r} \dot{p}(t').$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \text{ En ne gardant que les termes du premier ordre en } \frac{1}{r} :$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 \cos\theta}{4\pi r} \dot{p} \vec{e}_r - \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{p} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r} \dot{p} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi r} (\dot{p} \wedge \vec{e}_r) \wedge \vec{e}_r.$$

L'onde rayonnée à grande distance en M par un dipôle variable \vec{p} a donc pour caractéristiques : $\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin\theta \vec{e}_\theta$, $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \dot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin\theta \vec{e}_\phi = \frac{1}{c} \vec{e}_r \wedge \vec{E}$.

C'est une onde transverse, qui a localement la même structure que l'onde plane :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_r \wedge \vec{E}.$$

Elle est polarisée rectilignement dans le plan contenant le dipôle et le point d'observation.

Elle se propage suivant \vec{e}_r à la vitesse c comme une onde sphérique, mais elle est anisotrope puisque les amplitudes des champs varient en $\sin\theta$: l'amplitude rayonnée dans la direction du dipôle source est nulle, et elle est maximale dans la direction perpendiculaire.

6.3. Puissance rayonnée

6.3.1. Expression de la puissance rayonnée

Le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left(\vec{e}_r \wedge \frac{\vec{E}}{c} \right) = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c r^2} \left[\dot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]^2 \sin^2\theta \vec{e}_r.$$

La puissance rayonnée à travers une sphère de rayon R centrée en O est donc :

$$P = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \iint \frac{1}{R^2} \left[\dot{p} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]^2 \sin^2\theta R^2 \sin\theta d\theta d\phi, \text{ soit :}$$

$$P = \frac{\mu_0}{8\pi c} \left[\dot{p} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left[\dot{p} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]^2.$$

6.3.2. Conséquences du rayonnement dipolaire

Si le moment dipolaire \vec{p} modélise un système de deux charges opposées, dont l'une est immobile, $P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$, où a est l'accélération de la charge mobile à l'instant $t - \frac{r}{c}$.

▶ Toute charge accélérée rayonne de l'énergie électromagnétique, proportionnellement au carré de son accélération.

En particulier toute charge en mouvement circulaire rayonne de l'énergie.

Cela rend instable le modèle « planétaire » de l'atome de Bohr.

La courbure des trajectoires des particules accélérées dans les synchrotrons entraîne un rayonnement X intense qui est parasite pour un accélérateur de particules, mais qui est mis à profit comme source de rayons X.

Si l'on considère le mouvement du dipôle comme une superposition de mouvements

sinusoïdaux, $\vec{p}(t) = \int_0^\infty \vec{z}(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega \vec{e}_z$, les puissances rayonnées s'ajoutent : la

puissance rayonnée en moyenne au cours du temps est $\langle P \rangle = \int_0^\infty \frac{\mu_0 \omega^4 s^2(\omega)}{12\pi c} d\omega$ de den-

sité spectrale : $\langle \frac{dP}{d\omega} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 s^2(\omega)}{12\pi c}$.

6.3.3. Phénomène de diffusion

Si une onde électromagnétique plane polarisée rectilignement, de pulsation ω , arrive sur un milieu contenant des particules petites devant sa longueur d'onde, elles vont se comporter comme des dipôles en vibration à la pulsation ω parallèlement au champ électrique de l'onde.

Il y aura donc émission par ces particules d'ondes diffusées à la même pulsation ω dans toutes les directions, mais préférentiellement perpendiculairement au champ électrique de l'onde incidente. La puissance rayonnée est cédée par l'onde incidente qui est donc absorbée en partie. C'est ce qu'on appelle la *diffusion Rayleigh*.

S'il y a superposition d'ondes à des pulsations différentes, les puissances diffusées seront proportionnelles à ω^4 , les amplitudes d'oscillation des charges dépendant peu de la pulsation en dehors de l'existence de phénomènes de résonance.

Pour de la lumière blanche, cela signifie que le bleu est plus diffusé que le rouge, et donc aussi plus absorbé.

La lumière émise par le Soleil est ainsi diffusée dans toutes les directions par les molécules de l'atmosphère préférentiellement dans le bleu, ce qui explique la couleur du ciel. Lorsque le Soleil est bas sur l'horizon, la couche d'atmosphère traversée est plus importante, si bien que la composante bleue du spectre solaire disparaît presque entièrement au profit du rouge moins absorbé. On interprète ainsi les aspects colorés des lever et coucher du soleil (voir exercice 2 de « Savoir résoudre les exercices »).

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ Corrigés p. 232

1 On considère l'onde électromagnétique dans le vide de champ électrique, en notation complexe : $\vec{E} = E_0[\vec{e}_x + i\vec{e}_y]e^{i\omega t - ikz}$, avec k réel positif.

a. Choisir parmi les réponses ci-dessous.

- 1. C'est une onde plane.
- 2. C'est une onde progressive.
- 3. C'est une onde stationnaire.
- 4. C'est une onde polarisée rectilignement.
- 5. C'est une onde polarisée circulairement.

b. Son champ magnétique vaut :

- 1. $\vec{B} = -i\frac{E_0}{c}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)e^{i(\omega t - kz)}$.
- 2. $\vec{B} = \frac{E_0}{c}(\vec{e}_y + i\vec{e}_x)e^{i(\omega t - kz)}$.
- 3. $\vec{B} = \frac{E_0}{c}[\cos(\omega t - kz)\vec{e}_y + \sin(\omega t - kz)\vec{e}_x]$.

2 À partir d'une source d'onde électromagnétique placée en O , on peut émettre dans le vide une onde électromagnétique sphérique transverse dont le champ électrique \vec{E} a pour amplitude $\frac{1}{r}f(r - ct)$, et dont le champ magnétique s'écrit $\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{e}_r \wedge \vec{E}$.

- a. Vrai. b. Faux.

3 Donner, à partir des relations de continuité, les caractéristiques de l'onde plane mono-

chromatique réfléchi par un plan métallique parfaitement conducteur, pour une onde incidente polarisée rectilignement dans le plan d'incidence.

4 Expliquer : dans un plasma, on néglige l'action de la force exercée par le champ magnétique de l'onde sur les électrons en mouvement, et le mouvement des ions positifs. Pourquoi ces approximations sont-elles légitimes ?

5 La lumière diffusée par l'atmosphère à 90° de la direction du Soleil est polarisée. Expliquer pourquoi et donner la direction de polarisation.

6 a. Montrer qu'il peut exister un mode longitudinal d'onde plane monochromatique progressive dans un plasma à une pulsation ω que l'on précisera. Que vaut son champ magnétique ?

b. Dans un plasma, que devient l'énergie transportée par une onde incidente de pulsation inférieure à la fréquence de coupure ?

7 a. Comment peut-on interpréter une solution de l'équation de dispersion donnant une valeur de k complexe : $k = k' + ik''$? Discuter suivant le signe de k'' , en considérant k' positif.

b. Dans le cas où l'équation de dispersion a pour solution $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$ y a-t-il absorption d'énergie par le milieu ?

1 Écrire le champ électrique et le champ magnétique d'une onde monochromatique plane progressive se propageant dans le vide suivant une direction faisant l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec la direction Ox dans le plan xOy , et polarisée circulairement droite.

2 Une onde plane monochromatique progressive polarisée circulairement droite, se propage dans la direction \vec{e}_z et est réfléchie sous incidence normale par un plan métallique conducteur parfait placé en $z = 0$.

a. Écrire le champ électrique et le champ magnétique de l'onde réfléchie. Quelle est sa polarisation ?

b. Écrire les champs électrique et magnétique de l'onde résultante dans le demi-espace $z < 0$.

Ces champs sont-ils transverses ? Sont-ils orthogonaux ? Sinon, quel angle font-ils entre eux ? Que peut-on en déduire pour le vecteur de Poynting ?

3 Dans un milieu dispersif de relation de dispersion $k(\omega)$, on superpose deux ondes planes monochromatiques progressives de même amplitude, polarisées suivant Ox et se propageant suivant \vec{e}_z , de pulsations $\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}$ et $\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}$.

a. Écrire au premier ordre en $\frac{\delta\omega}{\omega_0}$ les vecteurs d'onde $k_1\vec{e}_z$ et $k_2\vec{e}_z$ de ces deux ondes. On posera $k_0 = k(\omega_0)$.

b. Écrire le champ électrique de l'onde résultante, et montrer que c'est une onde qui se propage avec la célérité $v_p = \frac{\omega_0}{k_0}$ suivant Oz , et dont l'enveloppe se déplace suivant la même direction à la vitesse $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

c. On généralise en prenant un paquet d'ondes de la forme :

$$f(t, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega, \text{ avec}$$

$$g(\omega) = 0 \text{ si } |\omega - \omega_0| > \delta\omega, \text{ et } \frac{\delta\omega}{\omega_0} \ll 1.$$

Montrer que l'on peut encore le mettre sous la forme du produit d'une fonction harmonique de $\omega_0 t - k_0 z$ et d'une amplitude fonction de $t - \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega_0} z$. Interpréter en termes de vitesse de phase et vitesse de groupe.

4 On s'intéresse à une onde guidée transverse magnétique TM, monochromatique, se propageant suivant Oz dans un guide d'onde rectangulaire limité par les plans $x = 0$ et $x = a$, $y = 0$ et $y = b$ avec $a < b$. L'expression générale des champs électrique et magnétique est alors :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (\underline{E}_x(x, y)\vec{e}_x + \underline{E}_y(x, y)\vec{e}_y) \\ &\quad + \underline{E}_z(x, y)\vec{e}_z e^{i(\omega t - kz)} \\ \vec{B} &= (\underline{B}_x(x, y)\vec{e}_x + \underline{B}_y(x, y)\vec{e}_y) e^{i(\omega t - kz)}. \end{aligned}$$

a. À l'aide des équations de Maxwell, écrire les composantes transverses $\underline{E}_x(x, y)\vec{e}_x$ et $\underline{E}_y(x, y)$ du champ électrique, et $\underline{B}_x(x, y)\vec{e}_x$ et $\underline{B}_y(x, y)$ du champ magnétique uniquement en fonction de la composante longitudinale $\underline{E}_z(x, y)$.

b. Écrire l'équation de propagation de la composante $\underline{E}_z(x, y)$.

c. Expliciter les conditions aux limites pour \vec{E} et \vec{B} sur les plans conducteurs. On cherche $\underline{E}_z(x, y)$ sous la forme d'un produit $X(x)Y(y)$. Montrer que les conditions aux limites font intervenir deux entiers m et n , et en déduire l'expression de $\underline{E}_z(x, y)$ du mode TM_{mn} d'amplitude E_0 .

d. À quelle condition sur ω le guide est-il mono-mode ? Donner explicitement les champs électrique et magnétique de ce mode TM_{10} .

5 On envoie sur un plasma occupant le demi-espace $z > 0$, sous incidence normale, une onde monochromatique polarisée rectilignement suivant Ox de pulsation $\omega < \omega_p$,

a. Donner le champ électrique et le champ magnétique de l'onde incidente dans le vide.

b. Rappeler l'équation de dispersion dans un plasma et donner l'expression du champ électrique et du champ magnétique de l'onde

dans le plasma. On posera $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$.

c. En déduire les caractéristiques de l'onde réfléchie, et montrer que toute l'énergie de l'onde incidente est réfléchie.

d. Donner les caractéristiques de l'onde dans le plasma, dite « évanescente ».

e. La profondeur de pénétration sera-t-elle la même pour une onde polarisée suivant Ox en incidence oblique d'angle $0 < i < \frac{\pi}{2}$ dans le plan d'incidence yOz ? Donner la dépendance en y et z du champ électrique dans le plasma.

6 Dans un plasma dense, les collisions entre ions et électrons peuvent être modélisées par une force de frottement fluide $-\frac{m\vec{v}}{\tau}$.

a. Montrer qu'en régime harmonique, en notation complexe, la densité volumique de courant \vec{j} est reliée au champ électrique \vec{E} par une relation de proportionnalité $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Exprimer la conductivité γ en fonction de la densité volumique n des électrons libres de charge $-e$ et de masse m , de τ et ω .

b. Exprimer la densité volumique moyenne de puissance cédée au plasma. Sous quelle forme se trouve cette puissance ?

c. Trouver l'équation que doit vérifier en tout point la représentation complexe de la densité volumique de charge ρ en fonction de ω , γ et ϵ_0 . Montrer que $\rho = 0$ sauf dans un cas particulier pour lequel on donnera l'expression générale de la fonction $\rho(t)$ en utilisant les notations : $\gamma_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \gamma$

et $\omega_p = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\epsilon_0 \tau}}$.

Étudier le cas particulier $\omega_p \tau \gg 1$.

7 En procédant par analogie entre dipôle électrique et dipôle magnétique, donner les caractéristiques de l'onde rayonnée en M à grande distance par un moment magnétique variable placé en O $\vec{M} = M(t)\vec{e}_z$.

8 On envoie sur un diélectrique d'indice n une onde sous l'incidence i_1 , polarisée rectilignement dans le plan d'incidence.

a. Quelle est la direction de l'onde dans le diélectrique ?

b. Le champ électrique excite des dipôles qui lui sont parallèles. Ce sont eux qui sont à la source de la lumière réfléchie. Montrer que pour une valeur i_B de l'angle d'incidence (incidence de Brewster), il n'y a pas d'onde réfléchie.



1 – Ondes électromagnétiques dans l'océan

- 1 a. L'eau de mer est un milieu polaire caractérisé par une polarisation $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$ en régime permanent. Quand le champ électrique varie au cours du temps, la polarisation du milieu ne suit pas instantanément les variations du champ électrique. \vec{P} vérifie alors une équation de la forme :

$$\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}. \text{ En supposant que } \vec{E} \text{ s'écrit en notation complexe}$$

$\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t}$, donner l'expression de la polarisation complexe en régime forcé, et introduire une permittivité relative complexe dont on déterminera les parties réelles et imaginaires ϵ'_r et ϵ''_r .

b. Donner l'allure des courbes de ϵ'_r et ϵ''_r en fonction de ω .

Pour l'eau, $\tau = 1,0 \cdot 10^{-11}$ s. Donner les valeurs numériques du rapport $\frac{\epsilon''_r}{\epsilon'_r}$ pour les deux fréquences $f_1 = 500$ kHz et $f_2 = 500$ MHz, en prenant $\epsilon_r = 81$.

Dans la suite, on supposera ϵ_r réel et égal à 81.

- 2 a. La conductivité γ de l'eau de mer est faible et vaut $\gamma = 4 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

On rappelle que dans un milieu de polarisation \vec{P} , les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère s'écrivent :

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{libre}}, \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right], \text{ avec } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Écrire ρ_{libre} en régime sinusoïdal forcé, puis les équations de Maxwell simplifiées dans l'eau de mer.

b. En déduire l'équation de propagation du champ électrique dans l'eau de mer.

c. On considère une onde électromagnétique émise par un avion ou un bateau situé à la verticale du lieu où se trouve un sous-marin. Le champ électrique de l'onde sera représenté en complexe par : $\vec{E} = E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$ (onde polarisée rectilignement). L'axe z est l'axe vertical, orienté de haut en bas, et la surface de l'océan est en $z = 0$. L'air sera assimilé au vide.

Donner le champ magnétique de l'onde émise, calculer son vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et sa moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$.

d. Cette onde arrive à la surface de l'eau, et on étudie sa propagation éventuelle dans l'eau de mer. On cherche une solution de l'équation de propagation sous la forme $\vec{E} = E_0 e^{-i(\omega t - k_z z)} \vec{e}_x$.

Montrer que cela n'est possible que si k_z^2 vérifie une équation dont la solution conduit nécessairement à un vecteur d'onde complexe.

Simplifier cette expression en comparant numériquement les parties réelles et imaginaires pour les deux fréquences f_1 et f_2 . En déduire l'expression de k_z en fonction de ω , μ_0 et γ .

- 3 L'onde électromagnétique arrive à la surface de l'océan sous un angle d'incidence nul. Elle se réfléchit à la surface de l'eau en donnant une onde caractérisée par le champ électrique $\vec{E}_r = r E_0 e^{-i(\omega t + k_z z)} \vec{e}_x$, et est partiellement transmise en donnant une onde caractérisée par le champ électrique $\vec{E}_t = t E_0 e^{-i(\omega t - k_z z)} \vec{e}_x$; r et t sont des coefficients complexes.
- Donner les expressions de \vec{k}_r et \vec{k}_t en fonction de $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$. Déterminer les expressions des champs magnétiques réfléchi et transmis.
 - Rappeler les conditions de passage des champs électriques et magnétiques au niveau de la surface de séparation eau-océan. En déduire les coefficients complexes de réflexion r et de transmission t en fonction de k et k_z , puis en fonction de $\alpha = \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\gamma}}$.
 - Déduire des expressions précédentes l'expression de \vec{E}_t et \vec{B}_t en faisant apparaître un terme d'amplitude, un terme d'atténuation et un terme de propagation.
 - Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à l'onde transmise.
 - On définit le facteur de transmission T comme le rapport de l'énergie transmise par l'onde incidente sur l'énergie contenue dans l'onde incidente. Calculer T en fonction de α . Quelle est l'énergie transmise à la profondeur z ?
 - Calculer de même le facteur de réflexion énergétique R , et vérifier la conservation de l'énergie.
 - Calculer numériquement la fraction de l'énergie incidente captée par le sous-marin à la profondeur d'un mètre pour les deux fréquences précédentes.

résolution méthodique

Pour toute opération linéaire effectuée sur les grandeurs physiques harmoniques, la notation complexe simplifie beaucoup les choses. La multiplication par une constante, même complexe, fait partie de ces opérations linéaires.

Les équations différentielles se ramènent à des équations linéaires entre les amplitudes par élimination du facteur en $e^{i\omega t}$ ou $e^{-i\omega t}$. Ce choix est arbitraire, mais l'élimination impose qu'il soit le même partout. Il faut donc faire attention au choix dans l'énoncé de la notation en $e^{-i\omega t}$ ou $e^{i\omega t}$. Le choix de e^{ikz} ou e^{-ikz} en découle, et est conditionné par le sens de propagation.

Ici, la notation choisie est en $e^{-i\omega t}$. Les expressions complexes obtenues seront complexes conjuguées de celles correspondant à une notation en $e^{i\omega t}$.

L'apparition de coefficients complexes entre les amplitudes signifie simplement un déphasage entre ces amplitudes.

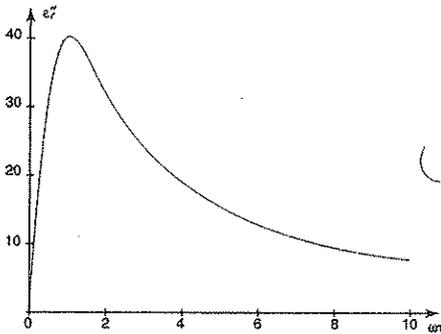
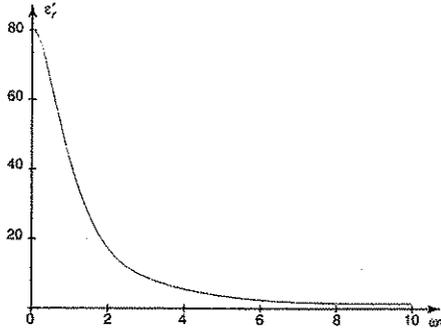
a. La polarisation complexe \vec{P} vérifie l'équation : $\vec{P}(1 - i\omega\tau) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$.

La permittivité complexe est définie par $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$, donc :

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\epsilon_r - 1}{1 - i\omega\tau} = \frac{\epsilon_r - i\omega\tau}{1 - i\omega\tau} = \frac{\epsilon_r + \omega^2\tau^2 + i\omega\tau(\epsilon_r - 1)}{(1 + \omega^2\tau^2)}$$

$$\boxed{\varepsilon_r' = \frac{\varepsilon_r + \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varepsilon_r'' = \frac{\omega \tau (\varepsilon_r - 1)}{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

À basse fréquence, $\omega \tau \ll 1$, $\varepsilon_r \approx \varepsilon_r$. À haute fréquence, $\omega \tau \gg 1$, $\varepsilon_r \approx 1$ comme dans le vide.



b. A. N. : Il faut comparer la fréquence de l'onde à $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} = 16 \text{ GHz}$ (soit une longueur d'onde dans le vide de 1,9 cm).

Les deux fréquences considérées vérifient $f \ll f_0$.

Pour $f_1 = 500 \text{ kHz}$, $\omega_1 = 3,14 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega_1 \tau = 3,14 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_r' = 81$ à 10^{-9} près,

$$\left| \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} \right| = 3,1 \cdot 10^{-5}.$$

Pour $f_2 = 500 \text{ MHz}$, $\omega_2 = 3,14 \cdot 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega_2 \tau = 3,14 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon_r' = 81$ à 10^{-3} près,

$$\left| \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} \right| = 3,1 \cdot 10^{-2}.$$

Pour ces deux fréquences, dans le plan complexe, ε_r se confond avec la permittivité en régime statique.

2 a. $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$.

savoir résoudre les exercices

L'équation de conservation de la charge s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \gamma \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \rho = 0$.

En régime sinusoïdal forcé, $\rho = 0$, et donc $\text{div} \vec{D} = 0$ et $\text{div} \vec{E} = 0$;

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

b. L'équation de propagation s'obtient en éliminant le champ électrique :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \gamma \vec{E} + \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{div} \vec{E} = 0. \text{ L'équation de propagation s'écrit donc : } \Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

L'obtention de l'équation de propagation se fait toujours de la même manière, mais il ne faut pas oublier de vérifier que $\text{div} \vec{E} = 0$, ce qui est toujours le cas lorsqu'il y a proportionnalité entre la densité volumique de courant et le champ électrique, et se démontre à partir de l'équation de conservation de la charge.

c. L'air est assimilé au vide. L'onde émise par l'avion est donc une onde électromagnétique plane monochromatique polarisée rectilignement :

$$\vec{E} = E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \vec{e}_x, \quad \text{donc } \vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{-i(\omega t - kz)} \vec{e}_y.$$

Le calcul du vecteur de Poynting instantané, ou de toute grandeur énergétique, est une opération non linéaire, il faut donc repasser en notation réelle.

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x, \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y.$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) c \vec{e}_z$$

$$\text{En moyenne, au cours du temps : } \langle \vec{\Pi} \rangle = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} c \vec{e}_z.$$

Remarque : ce résultat peut aussi s'obtenir à partir de $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$.

d. En remplaçant \vec{E} par son expression complexe $\vec{E} = E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$ dans l'équation de propagation, l'équation linéaire obtenue est : $k_i^2 E_0 = i\omega \mu_0 \gamma E_0 + \frac{\epsilon_r}{c^2} \omega^2 E_0$, ce qui n'a de solution non nulle que si $k_i^2 = i\omega \mu_0 \gamma + \frac{\epsilon_r}{c^2} \omega^2$, équation de dispersion du milieu.

k_i^2 étant complexe, k_i l'est nécessairement aussi.

Le rapport des parties réelles et imaginaires de k_i^2 est $\frac{\epsilon_r \omega}{c^2 \mu_0 \gamma} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \omega}{\gamma}$.

Pour $f_1 = 500 \text{ kHz}$: le rapport vaut $5,63 \cdot 10^{-4}$; pour $f_2 = 500 \text{ MHz}$, le rapport vaut 0,563.
 Pour f_1 , k_i^2 peut être considéré comme imaginaire pur, ce qui n'est plus possible pour f_2 .

Pour prendre la racine carrée d'un nombre complexe, et plus généralement lorsqu'il s'agit d'opérations de multiplication et de division, il est plus simple d'utiliser l'expression en module et argument. S'il s'agit d'addition ou de soustraction, il est préférable d'utiliser l'expression en partie réelle et partie imaginaire.

Pour f_1 , $k_i^2 = i\omega\mu_0\gamma = \omega\mu_0\gamma e^{i\frac{\pi}{2}}$, soit : $k_i = \pm \sqrt{\omega\mu_0\gamma} e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}} (1+i) = \pm \frac{(1+i)}{\delta}$.

On retrouve l'effet de peau vu en induction, puisque l'on néglige le courant de déplacement.

Pour f_2 , $k_i^2 = i\omega\mu_0\gamma + \frac{\epsilon_r}{c^2}\omega^2 = \omega\mu_0\gamma(i + \epsilon)$, avec $\epsilon = 0,56$.

$k_i = \pm \sqrt{\omega\mu_0\gamma\sqrt{1 + \epsilon^2}} e^{i\frac{\phi}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}} \sqrt{2} \left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2} \right)$: on confond $(1 + \epsilon^2)^{1/4}$ avec 1.

Rigoureusement on trouverait 1,07.

$k_i = \pm \sqrt{2} \frac{\left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2} \right)}{\delta}$, avec $\tan\phi = \frac{1}{\epsilon}$, soit :

$k_i = \pm \sqrt{2} \frac{(0,86 + i0,50)}{\delta} = \pm \frac{(1,2 + i0,71)}{\delta}$, peu différent de la formule obtenue pour la fréquence f_1 .

3 a. Le champ réfléchi est dans le vide et a pour vecteur d'onde $\vec{k}_r = -\frac{\omega}{c}\vec{z} = -k_i\vec{z}$.

Le champ transmis se propage suivant Oz dans la mer et a pour vecteur d'onde $\vec{k}_t = \frac{(1+i)}{\delta}\vec{z}$. Il faut prendre la racine avec le signe + pour que le champ ne diverge pas.

Le champ magnétique réfléchi a donc pour expression $\vec{B}_r = -r \frac{E_0}{c} e^{-i(\omega t + k z)} \vec{z}$.

Le champ magnétique de l'onde transmise a pour expression :

$$\vec{B}_t = \frac{k_i}{\omega} \vec{z} \wedge \vec{E}_t = \frac{1+i}{\delta\omega} t E_0 e^{-i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} e^{-\frac{z}{\delta}} \vec{z}$$

b. Au niveau de la surface de séparation, il n'y a aucune discontinuité des champs électriques et magnétiques, les densités volumiques de charge et de courant étant finies dans cette modélisation.

Les calculs des coefficients de réflexion et de transmission se font toujours de la même manière, à partir des relations de continuité. Il faut écrire le champ électrique et le champ magnétique résultant dans chacun des milieux, de part et d'autre de la surface de séparation. Il n'y a de discontinuité que s'il y a des charges ou des courants surfaciques : conducteurs parfaits, diélectriques isolants parfaits. Sinon, il n'y a aucune discontinuité. C'est le cas ici.

Donc, en $z = 0$: $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t$; $1 + r = t$, $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t$: $k(1-r) = k_i t$.

savoir résoudre les exercices

En éliminant r entre les deux équations : $t = \frac{2k}{k+k_i}$, et $r = t-1 = \frac{k-k_i}{k+k_i}$.

$$\frac{k}{k_i} = \frac{\omega\delta}{c(1+i)} = \frac{1}{1+i} \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma c^2}} = \frac{\alpha}{1+i}. \text{ Donc : } t = \frac{2\alpha}{\alpha+1+i}, \text{ et } r = \frac{\alpha-(1+i)}{\alpha+(1+i)}$$

$$c. \vec{E}_i = \frac{2\alpha E_0 \vec{e}_x}{\alpha+(1+i)} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i(\omega t - \frac{z}{\delta})}, \text{ et } \vec{B}_i = \frac{1+i}{c} \frac{2E_0 \vec{e}_y}{\alpha+(1+i)} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i(\omega t - \frac{z}{\delta})}$$

d.

On ne demande que la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Il est donc possible de rester en

notation complexe, en utilisant la formule : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{2\alpha}{\alpha+(1+i)} \frac{1-i}{\mu_0 c} \frac{2}{\alpha+(1-i)} \right] E_0^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \vec{e}_z = \frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2+1} \varepsilon_0 c E_0^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \vec{e}_z$$

e. $T = \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2+1}$, car la valeur moyenne du vecteur de Poynting de l'onde incidente est $\frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$.

Il est utile de vérifier que pour $k = k_r$, soit $\alpha = 1+i$, on trouve bien un coefficient de transmission énergétique égal à 1, puisqu'il n'y a pas de changement de milieu.

f. De même, la valeur moyenne du vecteur de Poynting de l'onde réfléchie s'écrit

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 r r^* c \vec{e}_z, \text{ soit : } R = \left| \frac{\alpha-(1+i)}{\alpha+(1+i)} \right|^2 = \frac{(\alpha-1)^2+1}{(\alpha+1)^2+1}$$

On vérifie la conservation de l'énergie : $R+T=1$.

g. Cette fraction s'écrit : $T e^{-\frac{2z}{\delta}}$.

$$\text{Pour } f_1, \alpha_1 = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 f_1}{\gamma}} = 3,73 \cdot 10^{-3}, T_1 = 2\alpha = 7,4 \cdot 10^{-3}.$$

$$\text{Pour } f_2, \alpha_2 = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 f_2}{\gamma}} = 0,18, T_2 = 0,3.$$

$$\text{Pour } f_1, \delta_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi\mu_0\gamma f_1}} = 0,36 \text{ m. Pour } f_2, \delta_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi\mu_0\gamma f_2}} = 0,013 \text{ m.}$$

Donc à un mètre, la fraction de l'énergie incidente est $2,9 \cdot 10^{-5}$, pour une fréquence de 500 kHz, et complètement négligeable pour 500 MHz.

La transmission d'ondes électromagnétiques entre l'air et la mer se heurte à deux obstacles. La conductivité non nulle, même si elle est faible, de l'eau de mer, entraîne un effet de peau d'autant plus important que la fréquence est élevée.

Si l'épaisseur de peau est grande, et donc la fréquence plus faible, le module du vecteur d'onde est faible, ce qui entraîne une faible valeur du champ magnétique transmis, et donc de l'énergie transmise : l'énergie est essentiellement réfléchiée.

en conclusion

• Un milieu réel, soumis à une amplitude de champ électrique harmonique pas trop élevée aura un comportement linéaire. La densité volumique de charge est alors nulle. On cherche des solutions de l'équation de propagation sous forme d'ondes planes monochromatiques progressives dont le vecteur d'onde, en général complexe, vérifiera une équation de dispersion.

• À l'interface entre deux milieux, l'écriture des équations de continuité permet d'obtenir les coefficients de réflexion et de transmission pour une pulsation donnée. Il faut écrire d'une part la somme des ondes incidente et réfléchiée dans le premier milieu, et d'autre part l'onde transmise.

• La valeur moyenne du vecteur de Poynting représente l'intensité transportée par chaque onde. La loi de conservation s'écrit :

intensité incidente = intensité réfléchiée + intensité transmise.

Attention : Ne pas confondre les relations de continuité et les lois de conservation.

2 – Diffusion des ondes électromagnétiques par des particules (d'après Mines-Ponts)

Partie A – Cas général

1 Le moment électrique dipolaire $\vec{p}(t)$ placé en O , pointe dans une direction quelconque fixe. Le champ rayonné en un point M quelconque dérive, dans la

jauge de Lorentz, du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \vec{p}(\tau)$, où $\vec{R} = \vec{OM} = R\vec{u}$,

$\vec{p}(\tau)$ est la dérivée par rapport au temps du moment dipolaire, prise au « temps retardé » $\tau = t - \frac{R}{c}$.

a. Montrer qu'à l'ordre le plus bas en $\frac{1}{R}$, le champ magnétique en M s'écrit :

$$\vec{B}(\vec{R}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c R} \vec{u} \wedge \dot{\vec{p}}(\tau).$$

b. Si la dépendance $\vec{p}(t)$ est sinusoïdale, quelle est la distance caractéristique au-delà de laquelle la formule ci-dessus peut être considérée comme valable ?

c. En admettant que la structure du champ magnétique rayonné à grande distance est localement celle d'une onde plane, montrer que le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \dot{\vec{p}}(\tau)).$$

Quelle méthode pourrait-on utiliser pour démontrer directement cette expression ?

savoir résoudre les exercices

2 On s'intéresse désormais au champ diffusé par un ensemble de N particules placées dans le vide, à l'intérieur d'un volume V . Ces molécules sont caractérisées par leur polarisabilité $\alpha(\omega)$ où ω est la pulsation de l'onde incidente ; le moment dipolaire de la $i^{\text{ème}}$ molécule est alors : $\vec{p}_i(t) = 4\pi\epsilon_0\alpha(\omega)\vec{E}(\vec{r}_i, t)$, où $\vec{E}(\vec{r}_i, t)$ est le champ électrique au point m_i où se trouve la $i^{\text{ème}}$ molécule. ($\vec{Om}_i = \vec{r}_i$). \vec{E} est aussi le champ associé à une onde électromagnétique plane monochromatique polarisée rectilignement : $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0\vec{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$. $\|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}$, et \vec{e} est le vecteur unitaire qui définit la direction de polarisation. On suppose que la vitesse de propagation de l'onde dans le volume V reste égale à c , vitesse de la lumière dans le vide.

a. Montrer qu'en un point M situé à grande distance à l'extérieur du volume V , la contribution de la $i^{\text{ème}}$ molécule à $\vec{j}(\vec{r}, t)$ est : $\vec{j}_i(\vec{r}, t) = -4\pi\epsilon_0\omega^2\alpha(\omega)E_0e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{R}-\vec{Q}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, où $\vec{R} = \vec{OM} = R\vec{u}$, $\vec{k}' = \frac{\omega}{c}\vec{u}$, et $\vec{Q} = \vec{k}' - \vec{k}$.

b. En déduire la contribution de la $i^{\text{ème}}$ molécule au champ électrique diffusé, puis au champ magnétique diffusé.

c. Quelle est la signification physique du terme $e^{(-i\vec{Q}\cdot\vec{r}_i)}$?

3 a. Montrer que la valeur moyenne du vecteur de Poynting de l'onde rayonnée dans la direction \vec{u} peut s'écrire : $\langle \vec{\Pi} \rangle = I_0|\alpha(\omega)|^2\frac{\omega^4}{c^4}(\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{e}))^2 \langle |S(\vec{Q}, t)|^2 \rangle$.

I_0 est l'intensité de l'onde incidente, $\langle |S(\vec{Q}, t)|^2 \rangle$ est la valeur moyenne au carré du module du « facteur de structure » $S(\vec{Q}, t) = \sum_{i=0}^n e^{(-i\vec{Q}\cdot\vec{r}_i)}$.

b. Préciser brièvement l'anisotropie de la puissance diffusée.

Partie B – Diffusion par les molécules d'un gaz à basse pression

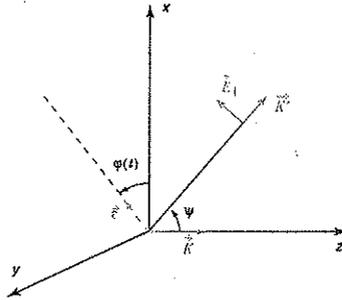
On considère un gaz à basse pression. Les molécules qui le constituent sont disposées de façon aléatoire. Dans la gamme de fréquence considérée, la polarisabilité sera considérée comme constante : $\alpha(\omega) = \alpha_0$.

L'onde incidente n'est plus polarisée : c'est de la « lumière naturelle » pour laquelle la distribution du vecteur \vec{e} peut être considérée comme uniforme dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation \vec{R} .

1 a. Calculer la valeur moyenne $\langle |S(\vec{Q}, t)|^2 \rangle$ et montrer qu'elle prend une forme particulièrement simple.

b. Donner la puissance diffusée dans une direction \vec{u} pour une polarisation \vec{e} .

2 On se propose d'étudier la polarisation de la lumière diffusée. Pour cela, on choisit dans le trièdre orthonormé $Oxyz$, la disposition suivante (voir ci-après) :



- l'onde incidente se propage suivant Oz ;
- à un instant donné, sa polarisation est repérée par le vecteur unitaire \vec{e} dans le plan xOy et fait avec Ox un angle $\phi(t)$ qui peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 2π ;
- on observe la diffusion dans la direction \vec{u} appartenant au plan xOz dit plan de diffusion. L'angle de \vec{K} et \vec{u} est noté ψ ;
- la polarisation de l'onde diffusée est caractérisée par deux vecteurs unitaires orthogonaux à \vec{u} : \vec{e}_1 dans le plan de diffusion, et \vec{e}_2 perpendiculaire à ce plan.

- a. Exprimer \vec{e} en fonction de \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{u} , ψ et ϕ .
- b. Exprimer, à partir des résultats précédents, et en moyennant sur l'angle ϕ , la puissance $\left(\frac{dP_d}{d\Omega}\right)_{//} = \Pi_{//}$ diffusée par unité d'angle solide avec une polarisation \vec{e}_1 parallèle au plan de diffusion.

Exprimer de même la puissance $\left(\frac{dP_d}{d\Omega}\right)_{\perp} = \Pi_{\perp}$ diffusée par unité d'angle solide avec une polarisation \vec{e}_2 perpendiculaire au plan de diffusion.

En déduire que la puissance totale diffusée dans l'espace est : $P_d = \frac{8\pi}{3} \alpha_0^2 \frac{\omega^4}{c^4} N I_0$.

3 On veut appliquer ces résultats à la diffusion par l'atmosphère terrestre de la lumière venant du Soleil.

a. Montrer en faisant un bilan sur un cylindre de base S et de longueur dz suivant la direction de propagation, que l'intensité à la traversée d'une couche diffusante contenant N_0 molécules par unité de volume s'écrit : $I(z) = I_0 e^{-az}$. Exprimer a en fonction de N_0 , ω et α_0 .

b. L'indice n d'un diélectrique peu dense peut s'écrire $n = \sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0 N_0 \alpha_0}$.

Montrer, en supposant que n est très voisin de 1, que $a = \frac{2}{3\pi} \frac{(n-1)^2 \omega^4}{N_0 c^4}$. Quelle est la signification physique de $\Lambda = \frac{1}{a}$?

c. Calculer Λ pour les longueurs d'ondes de 650 nm, 520 nm, 450 nm, sachant que $n-1 = 2,78 \cdot 10^{-4}$ (indépendant de la longueur d'onde) et $N_0 = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$. En déduire pourquoi le ciel est bleu en plein jour. Justifier son aspect au coucher du soleil.

savoir résoudre les exercices

- 4 On définit le degré de polarisation de la lumière diffusée par $\xi(\psi) = \frac{|\Pi_{\perp} - \Pi_{\parallel}|}{|\Pi_{\perp} + \Pi_{\parallel}|}$.
- a. Justifier la définition de $\xi(\psi)$ et donner son expression dans le cas de la diffusion par les molécules d'un gaz.
- b. Tracer $\xi(\psi)$. La partie $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ a-t-elle un sens physique ? Le tracé vous suggère-t-il des vérifications faciles à mettre en œuvre ?

résolution méthodique

Partie A

Les premières questions sont des questions de cours. Les réponses doivent être brèves et précises, pour prouver que le cours est connu, sans perdre de temps à refaire les démonstrations.

- 1 a. Les opérateurs différentiels agissent sur des fonctions du type $\frac{f(t - \frac{R}{c})}{R}$. Si l'on ne

garde que les termes du premier ordre en $\frac{1}{R}$, on néglige $\frac{f(\tau)}{R^2}$ devant $\frac{1}{c} \frac{df(\tau)}{d\tau}$, et donc seules interviennent les dérivations par rapport à R par l'intermédiaire de $\tau = t - \frac{R}{c}$. En utilisant les coordonnées cartésiennes, on peut utiliser la notation du vecteur nabla, en remarquant que dans ce cas : $\vec{\nabla} = -\frac{1}{c} \vec{u} \frac{d}{d\tau}$.

$$\text{Donc } \vec{B}(\vec{R}, t) = \text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = -\frac{1}{c} \vec{u} \wedge \frac{d}{d\tau} \vec{A} = -\frac{1}{c} \vec{u} \wedge \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \vec{p}.$$

b. Si $\vec{p}(\tau)$ est sinusoïdal de fréquence ν , cela revient à négliger $\frac{1}{R}$ devant $\frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$. La formule sera donc valable à des distances grandes devant la longueur d'onde λ de l'onde émise.

c. Pour une onde plane, $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre direct, et $B = \frac{E}{c}$.

$$\text{Donc } \vec{E} = \vec{B} \wedge c\vec{u}, \text{ soit : } \vec{E} = \vec{u} \wedge \left(\vec{u} \wedge \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \vec{p} \right)$$

Pour démontrer directement cette expression, il faudrait utiliser la jauge de Lorentz $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ pour calculer le potentiel scalaire, puis calculer \vec{E} à partir de

$$\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

- 2 a. $\vec{p}_i(\tau) = 4\pi\epsilon_0\alpha(\omega)E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\tau)} \hat{e}$, donc $\vec{p}_i(\tau) = -4\pi\epsilon_0\omega^2\alpha(\omega)E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\tau)} \hat{e}$.

τ est le temps t retardé du temps $\frac{m_i M}{c}$ de propagation à la célérité c entre m_i et le point éloigné M .

Le calcul de $m_i M$ au premier ordre en $\frac{Om_i}{OM}$ doit être connu sans hésitation. Il faut connaître une méthode et s'y tenir : développement limité, ou usage du gradient, par exemple.

$$m_i M = \sqrt{R^2 - 2\vec{r}_i \cdot R\vec{u} + r_i^2} = R - \vec{r}_i \cdot \vec{u} = \vec{R} \cdot \vec{u} - \vec{r}_i \cdot \vec{u} \text{ au premier ordre en } \frac{r_i}{R}.$$

Ou encore : $Mm_i = MO + \overrightarrow{\text{grad}}(MO) \cdot \overrightarrow{Om_i} = R - \vec{u} \cdot \vec{r}_i$. (Attention au signe, M est ici fixe, et c'est O qui se déplace en m_i !)

$$\vec{K} \cdot \vec{r}_i - \omega\tau = \vec{K} \cdot \vec{r}_i - \omega t + \omega \frac{\vec{u} \cdot R}{c} - \omega \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}_i}{c}.$$

$$\text{Avec } \vec{K}' = \frac{\omega}{c} \vec{u} : \vec{K} \cdot \vec{r}_i - \omega\tau = \vec{K}' \cdot \vec{R} - \vec{Q} \cdot \vec{r}_i - \omega t.$$

$$\vec{p}_i(\tau) = -4\pi\epsilon_0\omega^2\alpha(\omega)E_0 e^{i(\vec{K}' \cdot \vec{R} - \vec{Q} \cdot \vec{r}_i - \omega t)} \vec{e}$$

Ce calcul correspond à un calcul classique de déphasage entre deux ondes planes issues de deux sources O et m_i se propageant dans la même direction \vec{u} .

b. La contribution de ce dipôle au champ électrique diffusé en M est donc :

$$\vec{E}_i(\vec{R}, t) = -\frac{1}{Rc^2}\omega^2\alpha(\omega)E_0 e^{i(\vec{K}' \cdot \vec{R} - \vec{Q} \cdot \vec{r}_i - \omega t)} \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{e})$$

$$\vec{B}_i(\vec{R}, t) = \frac{1}{Rc^3}\omega^2\alpha(\omega)E_0 e^{i(\vec{K}' \cdot \vec{R} - \vec{Q} \cdot \vec{r}_i - \omega t)} (\vec{u} \wedge \vec{e})$$

c. Le terme $e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i}$ représente le déphasage entre les ondes diffusées par une source en O et une source en m_i excitées par la même onde plane incidente. C'est le terme interférentiel que l'on retrouve en optique physique.

$$\gg \mathbf{3 a.} \vec{E}(\vec{R}, t) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{R}, t) = -\frac{1}{Rc^2}\omega^2\alpha(\omega)E_0 e^{i(\vec{K}' \cdot \vec{R} - \omega t)} \sum_i (e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i}) \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{e}), \text{ et}$$

$$\vec{B}(\vec{R}, t) = -\frac{1}{Rc^3}\omega^2\alpha(\omega)E_0 e^{i(\vec{K}' \cdot \vec{R} - \omega t)} \sum_i (e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i}) (\vec{u} \wedge \vec{e}), \quad \vec{B}(\vec{R}, t) = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}(\vec{R}, t).$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting de l'onde rayonnée dans la direction \vec{u} s'écrit :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}((\vec{E}_i(\vec{R}, t)) \wedge \vec{B}_i^*(\vec{R}, t)) = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}(\vec{R}, t) \wedge \left[\vec{u} \wedge \frac{\vec{E}^*(\vec{R}, t)}{c} \right] = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 \vec{u}.$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \frac{1}{R^2 c^4} |\alpha(\omega)|^2 \left| \sum_i (e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i}) \right|^2 |\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{e})|^2 \vec{u}, \text{ et } I_0 = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}.$$

Ici, la moyenne a été faite sur un temps grand devant la période de l'onde. Il faut encore faire la moyenne sur les déplacements des molécules diffusantes :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = I_0 \frac{1}{R^2} \frac{\omega^4}{c^4} |\alpha(\omega)|^2 \left| \sum_i (e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i}) \right|^2 |\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \hat{\epsilon})|^2 \vec{u}$$

b. L'anisotropie est donnée par le facteur :

$$|\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \hat{\epsilon})|^2 = (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \hat{\epsilon})) \cdot (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \hat{\epsilon})) = (\vec{u} \wedge \hat{\epsilon}) \wedge (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \hat{\epsilon})) \cdot \vec{u}$$

\vec{u} est orthogonal à $(\vec{u} \wedge \hat{\epsilon})$, donc $|\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \hat{\epsilon})|^2 = (\vec{u} \wedge \hat{\epsilon})^2$. La puissance varie donc comme le carré du sinus de l'angle entre la direction d'émission et celle du champ de l'onde incidente. Elle est nulle dans la direction du champ, et maximale perpendiculairement à sa direction.

Partie B

$$\gg 1 \text{ a. } \langle |S(\vec{Q}, t)|^2 \rangle = \left\langle \left| \sum_i (e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i}) \right|^2 \right\rangle = \left\langle N + \sum_i \sum_{j>i} 2 \cos(\vec{Q} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)) \right\rangle$$

Il faut multiplier par le complexe conjugué. On fait d'une part la somme des carrés, puis on regroupe les produits $e^{-i\vec{Q} \cdot r_i} e^{i\vec{Q} \cdot r_j}$ et $e^{-i\vec{Q} \cdot r_j} e^{i\vec{Q} \cdot r_i}$. La notation $j > i$ permet de ne compter chaque couple qu'une seule fois.

Si les molécules sont disposées de manière aléatoire au cours du temps, la valeur moyenne des cosinus est nulle. (On exclut le cas où $\vec{Q} = \vec{0}$, $|S(\vec{0}, t)|^2 = N^2$ qui correspondrait à l'onde diffusée dans la direction de l'onde incidente.)

Ce résultat correspond à une addition des puissances diffusées par chacune des molécules : leur répartition aléatoire dans le temps en fait des sources « incohérentes » même si elles sont issues d'une même source primaire.

$$\langle |S(\vec{Q}, t)|^2 \rangle = N.$$

$$\text{b. } \langle \vec{\Pi} \rangle = I_0 \frac{1}{R^2} \frac{\omega^4}{c^4} N \alpha_0^2 (\vec{u} \wedge \hat{\epsilon})^2 \vec{u}$$

$\gg 2 \text{ a.}$

Lorsque les projections d'un vecteur sur un repère ne sont pas évidentes, le plus simple est souvent d'écrire ses composantes sur un repère plus adapté, ainsi que celles des vecteurs unitaires du trièdre, puis de calculer les projections en effectuant les produits scalaires.

Pour être sûr qu'un trièdre est direct, on peut toujours calculer le troisième vecteur comme produit vectoriel des deux premiers.

$\vec{u} = \cos \psi \vec{e}_z + \sin \psi \vec{e}_x$. \vec{e}_z est orthogonal au plan de diffusion et donc parallèle à Oy .

Choisissons $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$. \vec{e}_1 est le troisième vecteur du trièdre orthonormé. Pour que

$(\vec{e}_2, \vec{u}, \vec{e}_1)$ soit direct : $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{u} = \cos \psi \vec{e}_x - \sin \psi \vec{e}_z$.

$\vec{\varepsilon} = \cos\phi\vec{\varepsilon}_x + \sin\phi\vec{\varepsilon}_y$. Ses projections sur les vecteurs $(\vec{u}, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ s'obtiennent en faisant les produits scalaires :

$$\vec{\varepsilon} \cdot \vec{u} = \cos\phi \sin\psi, \quad \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}_1 = \cos\phi \cos\psi, \quad \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}_2 = \sin\phi$$

$$\vec{\varepsilon} = \cos\phi \sin\psi \vec{u} + \cos\phi \cos\psi \vec{\varepsilon}_1 + \sin\phi \vec{\varepsilon}_2$$

b. La direction du champ électrique diffusé est $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{\varepsilon}) = -(\cos\phi \cos\psi \vec{\varepsilon}_1 + \sin\phi \vec{\varepsilon}_2)$.

La puissance $\Pi_{//}$ diffusée avec une polarisation parallèle à $\vec{\varepsilon}_1$ correspond à

$$[\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{\varepsilon}) \cdot \vec{\varepsilon}_1]^2 = \cos^2\phi \cos^2\psi = \frac{1}{2} \cos^2\psi \text{ en moyennant sur les angles } \phi.$$

$$\Pi_{//} = I_0 \frac{1}{2} \frac{\omega^4}{R^2 c^4} N \alpha_0^2 \cos^2\psi$$

De même, la puissance Π_{\perp} diffusée avec une polarisation perpendiculaire à $\vec{\varepsilon}_1$ correspond à

$$[\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{\varepsilon}) \cdot \vec{\varepsilon}_2]^2 = \sin^2\phi, \text{ de valeur moyenne } \frac{1}{2} : \Pi_{\perp} = I_0 \frac{1}{2} \frac{\omega^4}{R^2 c^4} N \alpha_0^2$$

La puissance totale diffusée dans l'espace est la somme des flux des deux vecteurs de Poynting à travers une sphère de rayon R centrée en O . La surface élémentaire correspondant à une valeur donnée de ψ est : $dS \cdot \vec{u} = 2\pi R^2 \sin\psi d\psi$.

$$P_d = I_0 \frac{\omega^4}{2c^4} N \alpha_0^2 \int_0^{\pi} 2\pi (\cos^2\psi + 1) \sin\psi d\psi = \frac{8\pi}{3} \alpha_0^2 \frac{\omega^4}{c^4} N I_0$$

3 a. La conservation de l'énergie électromagnétique transportée par l'onde plane incidente à l'intérieur du cylindre de base S et de longueur dz s'écrit, en régime forcé :

Flux du vecteur de Poynting de l'onde incidente à travers la base S en $z + dz$ = Flux du vecteur de Poynting de l'onde incidente à travers la base S en z - puissance cédée aux $N_0 S dz$ molécules du cylindre qui la diffusent dans toutes les directions.

$$I(z + dz) - I(z) = -N_0 \frac{8\pi}{3} \alpha_0^2 \frac{\omega^4}{c^4} I(z) dz, \quad \frac{dI}{I dz} = -a, \text{ avec } a = N_0 \frac{8\pi}{3} \alpha_0^2 \frac{\omega^4}{c^4}, \text{ soit}$$

$I = I_0 e^{-az}$, où I_0 représente l'intensité de l'onde incidente avant la traversée de l'atmosphère.

b. La valeur de l'indice n est directement reliée à la valeur de la polarisabilité.

L'indication n est très voisin de 1 signifie toujours qu'il convient de faire un développement limité du premier ordre en $n - 1$ pour simplifier les expressions.

$$n = \sqrt{1 + 4\pi N_0 \alpha_0} = 1 + 2\pi N_0 \alpha_0, \quad \alpha_0 = \frac{n-1}{2\pi N_0}, \text{ et donc } a = \frac{2(n-1)^2 \omega^4}{3\pi N_0 c^4}$$

$\Lambda = \frac{1}{a}$ représente donc la longueur caractéristique de l'atténuation de l'intensité de l'onde incidente lors de la traversée de l'atmosphère.

$$c. a = \frac{2(n-1)^2 \omega^4}{3\pi N_0 c^4} = \frac{2(n-1)^2 (2\pi)^4}{3\pi N_0 (\lambda)^4}, \quad \Lambda = \frac{3\pi N_0 (\lambda)^4}{2(n-1)^2 (2\pi)^4}$$

L'homogénéité de la formule se voit immédiatement puisque N_0 est l'inverse d'un volume.

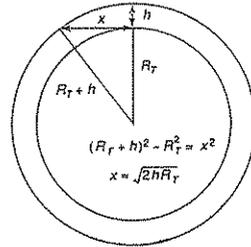
A. N. : $\lambda = 650 \text{ nm} : \Lambda = 1,9 \cdot 10^5 \text{ m} = 190 \text{ km}$, $\lambda = 520 \text{ nm} : \Lambda = 7,7 \cdot 10^4 \text{ m} = 77 \text{ km}$,
 $\lambda = 450 \text{ nm} : \Lambda = 4,3 \cdot 10^4 \text{ m} = 43 \text{ km}$.

La puissance diffusée varie en fonction inverse de la puissance quatrième de la longueur d'onde. Le bleu est donc beaucoup plus diffusé que le rouge de longueur d'onde plus grande.

Au coucher du soleil, l'atmosphère est traversée en lumière rasante (voir figure). L'épaisseur traversée passe ainsi d'environ $h = 10 \text{ km}$ au zénith, à environ

$\sqrt{2hR_T} = 500 \text{ km}$ au coucher du soleil. L'intensité du rouge orangé de longueur d'onde 650 nm n'est alors plus que $2/1\,000$ et celle du bleu de longueur d'onde

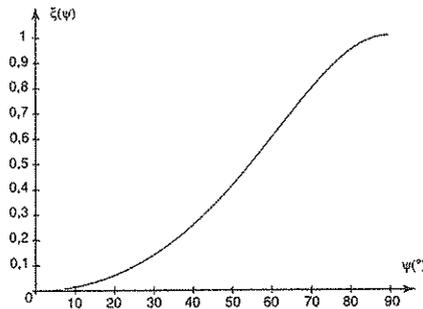
450 nm que $9 \cdot 10^{-6}$ de l'intensité incidente. Au zénith ces facteurs étaient de $0,95$ pour le rouge orangé, et de $0,79$ pour le bleu, ce qui modifiait peu la couleur du Soleil.



- 4 a. Avec cette définition, $\xi(\psi)$ passe de la valeur nulle pour une lumière « naturelle » non polarisée à la valeur 1 pour une lumière totalement polarisée.

Pour la diffusion par un gaz, on obtient :
$$\xi(\psi) = \frac{1 - \cos^2 \psi}{1 + \cos^2 \psi}$$

- b. La partie $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ correspond à des ondes diffusées vers les $z < 0$, donc non observables depuis la Terre.



Pour vérifier ce résultat, on peut analyser avec un polariseur la lumière diffusée par le bleu du ciel. On trouve une direction d'extinction pour une direction faisant 90° avec la direction du Soleil, et une variation de plus en plus faible de l'intensité lumineuse lorsque l'on tourne le polariseur en se rapprochant de la direction du Soleil.



20 min

> Corrigé p. 232

Rayonnement de l'électron dans le modèle de Thomson

Dans le modèle de Thomson, ou modèle de l'électron élastiquement lié, on modélise l'interaction entre un ion de charge $+e$ placé en O et un électron périphérique placé en M par une force de rappel élastique $\vec{F} = -k\vec{OM}$.

On considère le rayonnement à grande distance de cet électron de charge $-e$ en rotation à la vitesse angulaire constante $\omega\vec{z}$ autour de l'ion, sur un cercle du plan xOy de rayon a .

1. On rappelle l'expression du champ à grande distance rayonné dans le vide par un dipôle

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \dot{\vec{p}})$$

Donner l'expression du champ magnétique et de la puissance totale rayonnée par ce dipôle.

2. Décomposer le système de deux charges en deux dipôles de même amplitude p_0 oscillant suivant les axes Ox et Oy .

a. À l'aide d'un schéma, donner les composantes du champ \vec{E} associé aux deux dipôles en un point M du plan (xOy) , repéré par les coordonnées polaires r et α . En déduire que l'onde dans ce plan est polarisée rectilignement.

b. À l'aide d'un schéma, donner les composantes du champ \vec{E} associé aux deux dipôles en un point P de l'axe Oz de l'orbite. En déduire que l'onde en P est polarisée circulairement.

3. Donner la puissance rayonnée par l'électron en mouvement dans le modèle classique de l'atome de Bohr.

4. Donner en fonction de ω et p_0 l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de l'électron.

5. On admet que ω reste constant et que p_0 décroît suffisamment lentement pour que le mouvement reste circulaire sur chaque période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Montrer que l'énergie mécanique \mathcal{E}_m décroît suivant

$$\text{la relation : } \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_m}{\tau}$$

Calculer τ pour l'hydrogène, et comparer à T sachant que la longueur d'onde de la radiation émise est $\lambda = 434,1 \text{ nm}$.



20 min

> Corrigé p. 239

Couche anti-reflet (d'après ENSI)

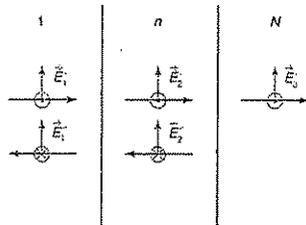
L'espace est rapporté à un trièdre $Oxyz$. Cet espace est constitué de trois milieux :

- le milieu 1 d'indice 1 pour $z < 0$,
- le milieu 2 d'indice n , pour $0 < z < e$,
- le milieu 3 d'indice N pour $z > e$.

Les indices 1, n et N sont différents.

Toutes les ondes considérées sont planes, progressives, polarisées rectilignement suivant Ox , et de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. Une onde plane, de champ

électrique $\vec{E}'_1 = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - kz)$ se propage dans le milieu 1 dans le sens des z croissants, et donne naissance à quatre ondes (voir ci-dessous) :



– une onde, de champ électrique \vec{E}'_1 , se propageant dans le milieu 1 dans le sens des z décroissants ;

– une onde, de champ électrique \vec{E}'_2 , se propageant dans le milieu 2 dans le sens des z croissants ;

– une onde, de champ électrique \vec{E}'_3 , se propageant dans le milieu 2 dans le sens des z décroissants ;

– une onde, de champ électrique \vec{E}'_4 , se propageant dans le milieu 3 dans le sens des z croissants.

a. Écrire le champ électrique et le champ magnétique de chacune de ces cinq ondes en notation complexe en $e^{i\omega t}$, en fonction de z , t et des amplitudes complexes $\underline{E}'_1 = E_0$, \underline{E}'_2 , \underline{E}'_3 et \underline{E}'_4 .

b. En écrivant les relations de continuité des champs à la traversée des plans $z = 0$, et $z = e$, déterminer le rapport r de l'amplitude complexe

E_1' sur E_1 en fonction de ε , n , N , et $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$ longueur d'onde dans le vide de l'onde.

c. Trouver les conditions sur n , N et ε pour que le rapport soit nul. Quelle est l'application de ce système ?



30 min

> Corrigé p. 240

Modes d'une cavité résonante (d'après ENGEES)

On considère une cavité parallélépipédique vide limitée par des plans métalliques parfaitement conducteurs : $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$, $z = d$. On cherche une solution stationnaire harmonique dans cette cavité de la forme :

$$\vec{E} = (E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \vec{e}_x + E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \vec{e}_y + E_{0z} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \vec{e}_z) \sin(\omega t + \phi).$$

1. a. Quelle(s) condition(s) doivent vérifier les différents paramètres pour que le champ vérifie les équations de Maxwell ?

b. Montrer que k_x , k_y et k_z sont respectivement liés à trois entiers arbitraires m , n et p .

c. Quelle est en fonction de m , n , p , a , b , d , c l'expression de la fréquence ν_{mnp} ?

A.N. $a = b = 2$ cm, $c = 10$ cm.

Quelle est la plus petite fréquence possible (mode fondamental) ?

d. Pour une combinaison (m , n , p) donnée, quel est le degré de liberté du système ?

2. On se place dans l'espace orthonormé O , k_x , k_y , k_z .

a. Placer, sur une figure, les premières valeurs possibles des grandeurs k_x , k_y , k_z matérialisant ainsi un parallélépipède élémentaire.

b. Quel est, dans cet espace, l'expression du « volume » de ce parallélépipède ?

c. Quel est le nombre de parallélépipèdes contenus dans le $1/8$ de la sphère de centre O et de rayon k ?

d. Montrer que, pour une fréquence ν donnée, le nombre total de modes possibles de fréquence inférieure ou égale à ν est, pour la cavité définie précédemment de volume V : $N = \frac{8\pi\nu^3 V}{3c^3}$.

e. Quelle est la densité spectrale de modes possibles, exprimée en nombre de modes par unité de volume et de fréquence : $\frac{1}{V} \frac{dN}{d\nu}$?

f. On considère un rayonnement de longueur d'onde 632 nm, presque monochromatique

($\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 3 \cdot 10^{-6}$). Exprimer l'ordre de grandeur du volume de la cavité pour avoir une fonction mono-mode.

3. La cavité précédente est maintenant ouverte : seuls les plans réfléchissants $z = 0$ et $z = d$ sont maintenus.

Une bonne approximation du fonctionnement peut être obtenue en considérant que m et n sont alors très inférieurs à p dans les résultats précédents.

Quelle est l'expression approchée de la fréquence ν possible en fonction de c , p , m , n , d , a et b ?



30 min

> Corrigé p. 241

Ondes électromagnétiques dans un plasma, soumises à un champ magnétique longitudinal (d'après ENSSET)

L'ionosphère est assimilable à un plasma, dans lequel on ne tiendra compte que du mouvement des électrons de densité volumique n .

Les électrons sont soumis :

- d'une part à l'action du champ magnétique terrestre \vec{B}_T supposé constant et uniforme, de direction parallèle à Oz et de même sens ;

- d'autre part à l'action des champs d'une onde électromagnétique transversale se propageant suivant la direction Oz . Soient $\vec{E}(E_x, E_y, 0)$ et $\vec{B}(B_x, B_y, 0)$, les champs de cette onde.

Dans tout ce qui suit, on négligera encore l'action du champ magnétique \vec{B} de l'onde sur le mouvement des électrons, et on considèrera que l'amplitude des mouvements de l'électron est négligeable devant la longueur d'onde dans le milieu.

a. Écrire les équations différentielles donnant les composantes v_x, v_y, v_z de la vitesse \vec{v} de l'électron. On pose $v^* = v_x + \varepsilon i v_y$, avec $\varepsilon = \pm 1$ $j^* = -nev^* = j_x + \varepsilon i j_y$, $E^* = E_x + \varepsilon i E_y$ et $B^* = B_x + \varepsilon i B_y$.

En déduire la relation $\frac{dv^*}{dt} + K v^* = -\frac{e}{m} E^*$ où K est une constante à déterminer.

Quelle est la signification physique du module $|K|$ de K ?

Application numérique : calculer $|K|$ pour

$$B_T = 10^{-5} \text{ T}, n = 10^{12} \text{ m}^{-3}, m = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ kg}.$$

b. À partir des équations de Maxwell, écrire deux équations différentielles entre j^* , E^* et B^* .

On rappelle l'expression de la pulsation plasma :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}.$$

En supposant que les grandeurs complexes E^* , B^* et v^* sont de la forme $X^* = X e^{i(kz - \omega t)}$, établir la relation de dispersion de ce type d'onde :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \varepsilon \omega_B)} \right], \text{ où } \omega_B = |K|.$$

c. Quelle est la polarisation des ondes se propageant avec le vecteur d'onde $k\vec{z}$ vérifiant cette équation de dispersion pour $\varepsilon = +1$ et pour $\varepsilon = -1$?

Étudier la variation de la vitesse de phase en fonction de ω . Y a-t-il propagation quelle que soit ω ?

d. On considère une lame de plasma limitée par les plans $z = 0$ et $z = L$. On envoie en $z = 0$ sous incidence nulle une onde électromagnétique plane progressive de pulsation ω supérieure aux pulsations de coupure, polarisée rectilignement suivant Ox . Quelle sera la polarisation de l'onde à la sortie, en $z = L$?

5

30 min

> Corrigé p. 262

Ondes électromagnétiques dans un plasma soumises à un champ magnétique transversal : effet Cotton-Mouton (d'après EIVP)

On considère un plasma dans lequel une onde se propage perpendiculairement à un champ magnétique uniforme et constant.

On appelle Oz la direction de propagation, et le champ magnétique est, suivant Oy : $\vec{B} = B_1 \vec{z}$.

On ne tiendra compte que du mouvement des électrons de densité volumique n .

On négligera l'action du champ magnétique de l'onde sur le mouvement de l'électron, et on considèrera que l'amplitude des mouvements de l'électron est négligeable devant la longueur d'onde dans le milieu.

On cherche une onde dont le champ électrique soit de la forme : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$.

a. Donner les équations donnant les composantes de la vitesse \vec{v} des électrons en fonction de celles de \vec{E} , de ε, m, ω et $\omega_c = \frac{eB_1}{m}$.

b. En déduire le système satisfait par les composantes cartésiennes de \vec{j} en fonction de celles de \vec{E} , de $\varepsilon_0, \omega, \omega_c$ et $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$.

c. À l'aide de l'une des équations de Maxwell et de la loi de conservation de la charge, calculer la densité volumique de charge en fonction de \vec{j} , puis en fonction de \vec{E} , des inconnues précédentes, de k et des données. En déduire l'expression de la composante longitudinale du champ électrique, en fonction de j_z compte tenu de la forme particulière de \vec{E} appelée ci-dessus.

d. Éliminer le champ magnétique de l'onde des équations de Maxwell, et écrire le système d'équations liant les composantes de \vec{E} et de \vec{j} .

e. Montrer que E_x et j_x sont solutions d'un système de deux équations linéaires et homogènes qui n'a de solution non triviale que si k a une valeur k' solution d'une équation de dispersion dont on donnera la forme.

f. Montrer que E_y est non nul seulement si k a une valeur k'' que l'on précisera.

g. On suppose $\omega \gg \omega_p$. Donner des expressions approchées de k' et k'' (on prendra k' et k'' positifs).

h. Montrer alors que deux ondes de vecteurs d'onde $k'\vec{z}$ et $k''\vec{z}$ en phase dans le plan $z = 0$ prennent après le parcours z une différence de phase proportionnelle à z et à B_1^2 . Ce phénomène est appelé « effet Cotton-Mouton ».



50 min

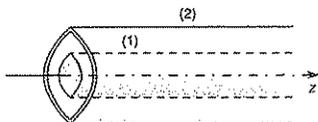
Chapitre 21

Onde TEM dans un câble coaxial

(d'après CCP)

I. Onde TEM guidée

1. Les conducteurs (1) et (2) représentés sur la figure ci-dessous guident les ondes suivant la direction de l'axe Oz



En notation complexe, on écrit le champ électromagnétique à un instant t , en un point $M(x, y, z)$ de l'espace inter-conducteurs sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0(x, y)e^{j(\omega t - kz)} \text{ et}$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_0(x, y)e^{j(\omega t - kz)}.$$

Le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_z$ est réel, et $k > 0$.

On introduit les composantes transversales des champs :

$$\vec{E}_{0t} = E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y, \text{ de norme } E_{0t} \text{ et}$$

$$\vec{B}_{0t} = B_{0x}\vec{e}_x + B_{0y}\vec{e}_y, \text{ de norme } B_{0t}.$$

On pose $\alpha(x, z) = e^{j(\omega t - kz)}$, et on donne les relations :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}A) = \vec{\text{grad}}(\text{div}A) - \Delta A;$$

$$\text{div}(\alpha A) = \alpha \text{div}A + A \cdot \vec{\text{grad}}\alpha;$$

$$\vec{\text{rot}}(\alpha A) = \alpha \vec{\text{rot}}A - A \wedge \vec{\text{grad}}\alpha.$$

a. Montrer que $\vec{\text{grad}}\alpha = -j\alpha\vec{k}$.

b. Donner à partir des équations de Maxwell et des relations précédentes les expressions vectorielles de $\vec{\text{div}}(\vec{E}_0)$ et $\vec{\text{rot}}(\vec{E}_0)$ en fonction de $\omega, c, \vec{k}, \vec{E}_0$ et \vec{B}_0 .

Donner de même les expressions vectorielles de $\vec{\text{div}}(\vec{B}_0)$ et $\vec{\text{rot}}(\vec{B}_0)$ en fonction de $\omega, c, \vec{k}, \vec{E}_0$ et \vec{B}_0 .

c. On suppose que l'onde est transverse électrique (TE) : $E_{0z} = 0$. Montrer, à partir des composantes de $\vec{\text{rot}}(\vec{E}_0)$, que l'expression vectorielle de \vec{B}_{0t} en fonction de ω, \vec{k} et \vec{E}_{0t} est analogue à

celle qui lie les champs \vec{B} et \vec{E} pour une onde plane progressive. En déduire le rapport des normes $\frac{E_{0t}}{B_{0t}}$.

d. On suppose que l'onde est transverse magnétique (TM) : $B_{0z} = 0$. À partir des composantes de $\vec{\text{rot}}(\vec{B}_0)$, exprimer vectoriellement \vec{E}_{0t} en fonction de ω, \vec{k} et \vec{B}_{0t} . En déduire le rapport des normes $\frac{E_{0t}}{B_{0t}}$.

2. On suppose que l'onde est transverse électrique et magnétique (TEM) : $E_{0z} = 0$ et $B_{0z} = 0$.

a. À partir des deux expressions de $\frac{E_{0t}}{B_{0t}}$ trouvées, exprimer k en fonction de ω et c .

Donner l'expression vectorielle de \vec{B}_0 . Donner l'expression vectorielle de \vec{B}_0 en fonction de $\omega, \vec{k}, \vec{E}_0$.

b. Montrer que $\text{div}(\vec{E}_0), \text{div}(\vec{B}_0), \vec{\text{rot}}(\vec{E}_0)$, et $\vec{\text{rot}}(\vec{B}_0)$ sont nuls.

c. On choisit comme potentiel vecteur $\vec{A}(M, t) = A_0(x, y)e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_z$ et comme potentiel scalaire :

$$V(M, t) = V_0(x, y)e^{j(\omega t - kz)}.$$

Exprimer le champ $\vec{E}(M, t)$ en fonction des potentiels $\vec{A}(M, t)$ et $V(M, t)$.

En déduire que $\vec{E}_0(x, y) = -\vec{\text{grad}}V_0(x, y)$, comme en électrostatique, et que

$$A_0(x, y) = \frac{V_0(x, y)}{c}.$$

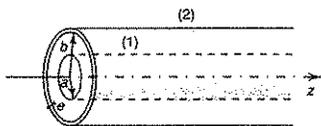
Montrer que $\Delta V_0(x, y) = 0$ dans l'espace inter-conducteurs.

d. En déduire qu'une onde électromagnétique TEM ne peut pas être guidée par un seul conducteur.

II. Onde TEM dans un guide coaxial

1. Une ligne électrique est constituée par deux conducteurs cylindriques de conductivité infinie, coaxiaux, séparés par un isolant parfait, assimilable au vide.

Le rayon du conducteur intérieur (1) est a , le conducteur extérieur (2) a pour rayon intérieur b et pour rayon extérieur $b + \epsilon$. Un point M de l'espace inter-conducteurs sera repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z .



Le potentiel en un point M de l'espace inter-conducteurs est $V(M, t) = V_0(r)e^{i(\omega t - kz)}$. On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques pour une fonction $U(r)$ ne dépendant que de r : $\Delta U(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dU}{dr} \right]$.

a. Déterminer l'expression de $V_0(r)$. On posera $v_0 = V_0(a) - V_0(b)$.

b. En déduire que $\vec{E}_0(r) = E_0(r)\vec{e}_r = \frac{K}{r}\vec{e}_r$ et $\vec{B}_0(r) = B_0(r)\vec{e}_\theta = \frac{K'}{r}\vec{e}_\theta$ et exprimer K et K' en fonction de v_0, a, b et c .

c. Calculer l'impédance de l'onde TEM définie par le rapport $\eta = \mu_0 \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|}$, et vérifier que η a bien la dimension d'une impédance électrique.

2. a. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique $w(M, t)$ en un point M de l'espace inter-conducteurs.

b. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}(M, t)$ en ce même point, en fonction de $\epsilon_0, E_0(r), z, t$ et \vec{z} . En déduire la vitesse de propagation de l'énergie définie par la relation $\vec{v}_e = \frac{\vec{R}(M, t)}{w(M, t)}$.

c. Calculer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ qui traverse une section droite $z = \text{Cte}$ du guide, en fonction de ϵ_0, a, b, c et v_0 .

3. Les densités linéiques de charges sont $\lambda_1(z, t)$ sur le conducteur central (1) et $\lambda_2(z, t)$ sur la surface interne du conducteur extérieur (2).

a. À partir du théorème de Gauss, montrer que $\lambda_1(z, t)$ est de la forme $\lambda_0 e^{i(\omega t - kz)}$, et exprimer λ_0 en fonction de ϵ_0, a, b et v_0 .

b. Calculer la densité surfacique de charge associée à $\lambda_1(z, t)$, et vérifier que les conditions aux limites sont satisfaites pour le champ \vec{E} à la surface du conducteur (1).

c. Préciser la relation qui lie $\lambda_1(z, t)$ et $\lambda_2(z, t)$.

4. Du fait du passage de l'onde électromagnétique, les surfaces en regard des conducteurs (1) et (2) sont parcourues par des courants surfaciques parallèles à Oz , d'intensité $i_1(z, t)$ et $i_2(z, t)$. $i_1(z, t)$ est de la forme $i_0 e^{i(\omega t - kz)}$.

a. À partir du théorème d'Ampère, exprimer i_0 en fonction de μ_0, a, b, c et v_0 . Préciser la relation qui lie i_0 et λ_0 .

b. Après avoir calculé la densité surfacique de courant associée à $i_1(z, t)$, vérifier que les conditions aux limites sont satisfaites pour le champ \vec{B} à la surface du conducteur (1).

c. Préciser la relation qui lie $i_1(z, t)$ et $i_2(z, t)$.

d. Exprimer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ transmise par l'onde en fonction de v_0 et i_0 .

5. Vérifier que $i_1(z, t)$ et $\lambda_1(z, t)$ vérifient l'équation de conservation de la charge.

6. Exprimer la différence de potentiel entre les conducteurs (1) et (2) à la cote z et à l'instant t : $v(z, t) = V(a, z, t) - V(b, z, t)$. En déduire la capacité linéique de la ligne $C_0 = \frac{\lambda_1(z, t)}{v(z, t)}$.

7. Calculer le flux élémentaire $d\Phi = \Phi_0(z, t) dz$ de $\vec{B}(z, t)$ dans l'espace inter-conducteurs, à travers une surface située dans un plan axial, de section rectangulaire, comprise entre $r = a$ et $r = b$ et de longueur dz suivant l'axe Oz . En déduire l'auto-inductance linéique de la ligne :

$$L_0 = \frac{\Phi_0(z, t)}{i_1(z, t)}$$

8. Établir la relation liant L_0, C_0, ϵ_0 et μ_0 . Calculer l'impédance de la ligne $Z_C = \frac{v(z, t)}{i_1(z, t)}$ en fonction de L_0 et C_0 , puis en fonction de η, a et b . Application numérique : calculer L_0, C_0, η et Z_C pour $a = 3 \text{ mm}, b = 9 \text{ mm}$ et $\epsilon = 2 \text{ mm}$.



30 min

> Corrigé p. 245

Effet Zeeman

Un atome d'hydrogène est modélisé par un noyau fixe de charge $+e$ placé en O , et un électron mobile en M , de charge $-e$, soumis de la part du noyau à une force de rappel $-k\vec{r}$, avec

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. En l'absence de champ magnétique, l'électron est en mouvement de rotation circulaire de rayon a autour de son noyau, à la vitesse angulaire $\omega_0 = 4,34 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

À $t = 0$, $\overrightarrow{OM}_0 = a \sin \theta \vec{e}_z - a \cos \theta \vec{e}_y$,
 $\vec{v}_0 = \omega_0 a \vec{e}_x$, et on le soumet à un champ magnétique uniforme constant $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

1. a. Projeter les équations du mouvement de l'électron sur les trois axes du trièdre $Oxyz$. On posera $\Omega = \frac{eB_0}{2m}$.

- Déterminer $z(t)$ pour $t > 0$.
 On introduit le nombre complexe $Z = x + iy$.
 b. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$.
 c. Pour $\Omega \ll \omega_0$, montrer que :

$$Z(t) = \frac{ia}{2} e^{i\omega_0 t} \{ ((1 - \cos \theta) e^{-i\omega_0 t} - (1 + \cos \theta) e^{i\omega_0 t}) \}$$

En déduire les fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
 d. Déduire de ces résultats que le mouvement de l'électron est la superposition d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_0 suivant Oz et de deux mouvements circulaires directs dans le plan xOy de pulsations $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$ et $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$.

2. On peut admettre que ce mouvement confère à l'atome un moment dipolaire $\vec{p} = -e\vec{r}$.
 a. Donner les composantes de ce dipôle suivant le trièdre $Oxyz$.

b. On observe le rayonnement de l'atome dans la direction du champ magnétique, en un point de l'axe Oz . Montrer que l'onde émise en présence de \vec{B}_0 est la superposition de deux ondes polarisées circulairement de fréquence $\nu_0 + \Delta\nu$ et $\nu_0 - \Delta\nu$ très voisines. C'est l'effet Zeeman longitudinal.

Donner l'expression de $\Delta\nu$. Calculer $\Delta\nu$ et $\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$ pour $B = 0,1 \text{ T}$ et une fréquence ν_0 correspondant à la radiation $\lambda_0 = 434,1 \text{ nm}$ de l'hydrogène.

c. On observe le mouvement dans une direction perpendiculaire au champ magnétique, c'est-à-dire dans le plan xOy . Montrer que l'onde émise est la superposition de trois ondes polarisées rectilignement comportant trois fréquences très voisines. C'est l'effet Zeeman transversal.



40 min

> Corrigé p. 246

Lévitation d'une sphère dans un faisceau laser

L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct $Oxyz$, de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

Une onde électromagnétique plane monochromatique progressive, de pulsation ω , polarisée rectilignement suivant Oz , de vecteur d'onde $\vec{k}_i = k \cos i \vec{e}_x + k \sin i \vec{e}_y$, se propageant dans le demi-espace vide $x < 0$, est caractérisée par son vecteur champ électrique $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \vec{e}_z$ et son champ magnétique \vec{B}_i . Cette onde incidente rencontre en $x = 0$, sous l'incidence i , un conducteur métallique parfait.

- Caractériser complètement l'onde incidente en donnant l'expression de k en fonction de ω et l'expression complète de \vec{B}_i .
- Calculer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{\pi}_i$ de l'onde incidente. Dans quelle direction se propage l'énergie ? Quelle est alors la puissance moyenne rayonnée par l'onde incidente à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation ?
- Déterminer la densité volumique d'énergie u_i correspondant à l'onde incidente, ainsi que sa moyenne temporelle $\langle u_i \rangle$.
- Rappeler les conditions de passage du champ électromagnétique du vide au métal conducteur parfait. En déduire l'existence d'une onde réfléchie, plane, monochromatique, de pulsation ω , polarisée suivant Oz , de vecteur d'onde :

$\vec{k}_r = -k \cos i \vec{e}_x + k \sin i \vec{e}_y$. Donner l'expression du champ électrique \vec{E}_r et du champ magnétique \vec{B}_r de cette onde.

5. Caractériser l'onde obtenue dans le demi-espace $x < 0$ par superposition des ondes incidentes et réfléchies. On notera $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$, et $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r$.

6. Déterminer \vec{B} pour $x = 0$. En déduire la valeur de \vec{j}_s , densité surfacique du courant sur le conducteur.

7. On désire calculer la force qui s'exerce sur un élément de courant $\vec{j}_s dS$. On considèrera le champ \vec{B} au voisinage de dS comme la superposition du champ \vec{B}_1 , créé par l'élément $\vec{j}_s dS$ et du champ \vec{B}_2 créé par les autres courants. En un point M très voisin de dS , \vec{B}_1 peut être considéré comme le champ créé par une nappe de courant plane de densité surfacique $\vec{j}_s dS$. En déduire le champ \vec{B}_2 agissant sur $\vec{j}_s dS$. Donner l'expression de la force de Laplace $d\vec{F}$ s'exerçant sur dS , et en préciser le sens. Calculer sa moyenne temporelle $\langle d\vec{F} \rangle$ et en déduire la pression correspondante sur dS , appelée pression de radiation $\langle p_r \rangle$. Exprimer $\langle p_r \rangle$ en fonction de $\langle u_i \rangle$.

8. À l'onde plane incidente, on peut associer un faisceau de photons de fréquence ν , se propageant dans la direction de \vec{k}_i .

a. Quelles sont l'énergie et la quantité de mouvement d'un de ces photons ?

b. À l'aide de la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique $\langle u_i \rangle$, déterminer le nombre moyen N de photons par unité de volume dans le faisceau incident en fonction de E_0 et ν .

c. Le faisceau de photons rencontre le conducteur métallique parfait. L'angle entre la direction incidente et la normale au conducteur est i . En supposant que les chocs des photons sur le conducteur sont élastiques, calculer la quantité de mouvement transférée au conducteur par chaque photon qui se réfléchit. En déduire la force moyenne à laquelle est soumis un élément d'aire dS du conducteur pendant le temps dt , et retrouver ainsi l'expression de la pression de radiation.

9. Une bille sphérique, de centre O , de rayon R et de masse m , parfaitement réfléchissante, est plongée dans un faisceau laser cylindrique, homogène, vertical, se propageant vers le haut, parallèlement à Oz . Le rayon du faisceau est supérieur à R .

a. Calculer la force totale exercée par le faisceau sur la bille. Montrer que l'on peut écrire son module sous la forme : $F = \frac{I}{c} \pi R^2$, où I est l'intensité du faisceau lumineux (puissance transportée par unité de surface).

b. Calculer l'intensité minimum I_m nécessaire pour soulever la bille, et la puissance P_m qui arrive alors sur la bille.

c. Application numérique : calculer I_m et P_m sachant que $R = 0,1$ mm et que la masse volumique de la bille est $\mu = 2,7 \cdot 10^3$ kg. On prendra l'intensité de la pesanteur $g = 9,8$ m \cdot s $^{-2}$.



40 min

> Corrigé p. 247

Onde gaussienne (d'après E3A)

L'onde électromagnétique émise par un laser de section w^2 inférieure à 1 mm 2 ne peut être considérée comme plane qu'au premier ordre en kz . Dans un modèle plus réaliste, on la représente comme une onde de profil gaussien, dont le champ électrique en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) peut être mis sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \underline{E}(r, z) e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_z, \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ où } \lambda$$

est la longueur d'onde dans le vide. Dans cette expression, l'amplitude complexe $\underline{E}(r, z)$ du champ électrique dépend de r et z et s'écrit :

$$\underline{E}(r, z) = E_0 \frac{iz_0}{z + iz_0} \exp\left(-ik \frac{r^2}{2(z + iz_0)}\right), \text{ où } z_0 \text{ est}$$

une constante positive appelée distance de Rayleigh, et E_0 un réel positif. On admet que sous cette forme, cette expression vérifie l'équation de propagation.

1. a. Montrer que cette expression vérifie bien l'équation de propagation si l'on considère que

$$kE(r, z) \gg \frac{\partial E}{\partial r} \gg \frac{\partial E}{\partial z}.$$

(On rappelle que, en coordonnées cylindriques,

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.)$$

b. Quelle composante du champ électrique a été négligée ? Quel est l'ordre de grandeur de son amplitude par rapport à E_0 ?

2. a. Montrer que le carré du module de $\underline{E}(r, z)$ peut se mettre sous la forme :

$$|\underline{E}(r, z)|^2 = A^2(z) \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right), \text{ avec}$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}.$$

b. Déterminer la constante w_0 ($w_0 > 0$) en fonction de z_0 et λ , puis montrer que $A(z)w(z) = E_0 w_0$.

c. Représenter les graphes des fonctions $A(z)$ et $w(z)$ pour $z > 0$.

d. Représenter les graphes du module $|\underline{E}(r, z)|$ du champ électrique en fonction de r lorsque $z = 0$, puis pour une valeur $z > 0$. Quelle interprétation physique peut-on donner à $w(z)$?

3. En pratique, l'amplitude complexe du champ électrique est une fonction lentement variable de r et z , ce qui signifie qu'à l'échelle de la longueur d'onde λ , les variations de $\underline{E}(r, z)$ sont négligeables.

a. Justifier que cela revient à écrire $\left|\frac{\partial \underline{E}}{\partial r}\right| \ll k|E|$, et $\left|\frac{\partial \underline{E}}{\partial z}\right| \ll k|E|$.

b. Compte tenu de l'approximation précédente, montrer à l'aide des équations de Maxwell que le champ magnétique de l'onde peut se mettre sous

$$\text{la forme approchée : } \vec{B}(M, t) \approx \frac{E(r, z)}{c} e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_\theta.$$

4. a. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting ($\vec{\Pi}$) et déterminer la densité de puissance de cette onde $J(r, z) = \langle \vec{\Pi} \rangle$.

On étudie la répartition de $J(r, z)$ dans un plan perpendiculaire à Oz et situé à la cote z . Soit $J_{\max}(z)$ la valeur maximale de J dans ce plan.

Le rayon $R(z)$ du faisceau laser à la cote z est défini comme la valeur de r pour laquelle

$$J = \frac{J_{\max}}{e^2}, \text{ où } e \text{ est la base du logarithme népérien.}$$

b. Déterminer l'expression de ce rayon en fonction de $w(z)$.

Montrer que lorsque $z \gg z_0$, le faisceau a la forme d'un cône de sommet O et de demi-angle au sommet β qui sera exprimé en fonction de w_0 et z_0 , puis en fonction de w_0 et λ . L'angle β est appelé divergence du faisceau laser.

Application numérique : dans le cas d'un laser YAG-Nd³⁺, possédant pour caractéristiques

$w_0 = 0,50 \text{ mm}$ et $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$, déterminer z_0 et β en degrés.

Même calcul pour un laser à CO₂ possédant le même w_0 , mais de longueur d'onde $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$.
Conclusion.



30 min

• Corrigé p. 248

Rayonnement d'une antenne demi-onde (d'après Mines-Ponts)

1. Un dipôle élémentaire variable $d\vec{p}(t)\vec{e}_z$, placé en O , rayonne à grande distance un champ électromagnétique de composante

$$\text{électrique } d\vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \sin\theta \vec{e}_\theta,$$

avec $OM = r$ et \vec{e}_θ et \vec{e}_z vecteurs unitaires associés

aux coordonnées θ et z . $d\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ représente la dérivée seconde de $d\vec{p}$ par rapport au temps retardé $t - \frac{r}{c}$.

a. Une antenne est constituée d'une tige métallique rectiligne fine, de longueur $2L$, parcourue par le courant $I(z, t) = I_0 f(z) \cos\omega t$, où la fonction $f(z)$ est ici quelconque.

Exprimer $d\vec{p}(t)$ dérivée temporelle du moment dipolaire élémentaire associé à l'élément dz d'antenne placé en P ($\vec{OP} = z$), en fonction de $I(z, t)$ et de dz .

b. On s'intéresse au champ rayonné à grande distance par cette antenne, avec notamment $r \gg L$.

On adopte la notation complexe en $e^{i\omega t}$. Montrer que le déphasage entre le champ élémentaire

$d\vec{E}_P(M, t)$ produit en M par le dipôle $d\vec{p}$ placé

en P , et le champ $d\vec{E}_O(M, t)$ produit en m par le

dipôle placé en O est, à l'ordre le plus bas en $\frac{z}{r}$,

$$\phi = \frac{\omega}{c} z \cos\theta.$$

c. En déduire l'expression, sous forme d'une intégrale faisant intervenir $f(z)$, du champ $\vec{E}(M, t)$ produit à grande distance par l'antenne entière. Identifier ainsi une onde quasi-sphérique.

2. On s'intéresse aux antennes demi-ondes, ainsi nommées parce que leur longueur $2L$ est égale à la demi-longueur d'onde $\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}$ du rayonnement qu'elles émettent.

On choisit $f(z) = \cos\left(\pi \frac{z}{2L}\right) = \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$.

a. En quel point de l'antenne a-t-on pris l'origine des coordonnées ?

b. Montrer que, dans ces conditions,

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c} \frac{I_0}{r} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin\theta} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{e}_\theta,$$

ce qui, en notation complexe, s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{i}{2\pi\epsilon_0 c} \frac{I_0}{r} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin\theta} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{e}_\theta.$$

c. Rappeler la structure du champ rayonné à grande distance et justifier de ce fait la relation

$$\vec{B}(M, t) = \frac{1}{c} \vec{e}_r \wedge \vec{E}(M, t), \text{ avec } \vec{OM} = r\vec{e}_r.$$

d. Donner l'expression du vecteur de Poynting.

e. Établir l'expression de la puissance totale rayonnée par l'antenne demi-onde :

$$P_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin\theta} d\theta = \frac{A}{4\pi\epsilon_0 c} I_0^2.$$

f. Calculer l'intégrale A à partir de l'approximation $\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right] \approx 0,95\sin^2\theta$.

g. Calculer la résistance d'antenne \mathcal{R} définie par

$$P_r = \frac{1}{2} \mathcal{R} I_0^2.$$

h. On note $\langle \Pi \rangle_t$ la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting, et $\langle \Pi \rangle_{tmax}$ sa valeur maximale par rapport aux variables angulaires. Le diagramme de rayonnement (on dit aussi indicatrice) est défini comme le graphe, en coordonnées polaires (ρ, θ) de la fonction $\rho(\theta) = \frac{\langle \Pi \rangle_t}{\langle \Pi \rangle_{tmax}}$.

Tracer sommairement le diagramme de rayonnement de l'antenne demi-onde.

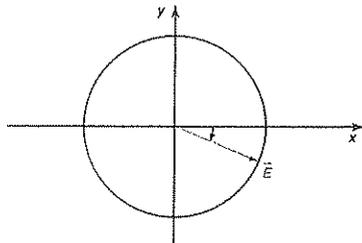


Tester ses connaissances

1 a. 1, 2 et 5 vrais. 3 et 4 faux. En notation réelle,

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz), \quad E_y = -E_0 \sin(\omega t - kz).$$

C'est donc une onde plane qui se propage suivant Oz , transverse, dont les composantes sont de même amplitude et déphasées de $\frac{\pi}{2}$. Elle est polarisée circulairement droite (voir schéma ci-dessous).



Attention : en notation complexe, l'expression se présente sous la forme du produit d'une fonction de z et d'une fonction du temps, mais ce n'est pas une onde stationnaire. La partie réelle d'un produit n'est pas égale au produit des parties réelles.

b. 1 et 3 vrais. 2 faux. Le champ magnétique associé s'écrit :

$$B_y = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz), \quad B_x = \frac{E_0}{c} \sin(\omega t - kz),$$

soit, en notation complexe :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} (\hat{y} - i\hat{x}) e^{i(\omega t - kz)} = -i \frac{E_0}{c} (\hat{x} + i\hat{y}) e^{i(\omega t - kz)}.$$

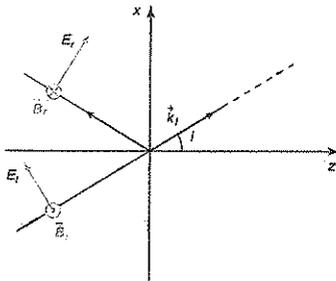
2 b. C'est faux pour une source individuelle. Pour que l'onde ait la symétrie sphérique, \vec{E} et \vec{B} devraient être des vecteurs de direction radiale, ne dépendant que de r . \vec{B} étant un vecteur axial ne peut être que nul. Donc $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$. \vec{E} ne peut être qu'un champ statique.

Cependant, s'il y a superposition en O de sources dipolaires incohérentes pointant dans toutes les directions, on observe une émission isotrope de puissance électromagnétique. L'onde émise, superposition de toutes les ondes individuelles de direction aléatoire, et de phase quelconque, est alors une onde

sphérique transverse, non polarisée, dont l'amplitude peut être représentée par $\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$, qui se propage

suivant le rayon vecteur. C'est le cas de la « lumière naturelle ». Les champs électriques et magnétiques sont transverses et ont la même amplitude dans toutes les directions du plan perpendiculaire au rayon vecteur.

3



La normale au plan définit l'axe Oz , et le plan d'incidence est le plan xOz .

Si i est l'angle d'incidence, le champ incident s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - (k \sin i)x - (k \cos i)z)} (-\sin i \hat{y} + \cos i \hat{z}).$$

Le champ réfléchi s'écrit, d'après les lois de Descartes :

$$\vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega t - (k \sin r)x + (k \cos r)z)} (\sin r \hat{y} + \cos r \hat{z}).$$

En $z = 0$, la composante tangentielle E_x du champ résultant est nulle : $E_{0i} + E_{0r} = 0$.

L'onde plane réfléchie s'écrit donc :

$$\vec{E}_r = -E_{0i} e^{i(\omega t - (k \sin r)x + (k \cos r)z)} (\sin r \hat{y} + \cos r \hat{z}),$$

$$\vec{B}_r = \frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - k \sin r x + k \cos r z)} \hat{y}.$$

On peut remarquer qu'il y aura sur le plan une densité surfacique de charge $\sigma = -2\epsilon_0 E_{0i} e^{i(\omega t - k \sin i x)} \sin i$, et une densité surfacique de courant :

$$\vec{i}_s = -2 \frac{E_{0i}}{\mu_0 c} e^{i(\omega t - k \sin i x)} \hat{x}. \text{ On retrouve la conservation}$$

de la charge :

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial i_x}{\partial x}$$

$$= -2j\omega\epsilon_0 E_{0i} e^{i(\omega t - k \sin i x)} \sin i + 2jk \sin i \frac{E_{0i}}{\mu_0 c} e^{i(\omega t - k \sin i x)}$$

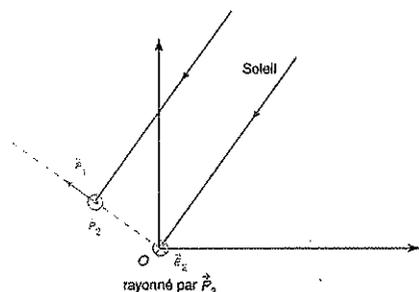
$$= 0 \text{ puisque } \omega = ck.$$

4 La force de Lorentz s'écrit : $\vec{F} = -q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

Dans le plasma, $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{v_\phi}$, avec une vitesse de phase supérieure à c . Donc, si la vitesse des électrons reste petite devant c (non relativistes), la force d'origine magnétique est toujours négligeable devant la force d'origine électrique.

Les électrons et les ions ont même charge, et sont donc soumis à des forces électriques de même module. Les accélérations subies sont alors dans le rapport inverse de leurs masses : la masse d'un proton est environ 1840 fois la masse d'un électron. L'amplitude du mouvement des ions est donc inférieure à 1/1840 de l'amplitude du mouvement des électrons. On peut donc le négliger.

5 L'observateur est placé en O (voir figure ci-dessous). Les molécules de l'atmosphère excitées par le rayonnement solaire forment des dipôles oscillant perpendiculairement à la direction OS . Si l'observateur observe dans la direction perpendiculaire à OS , il ne recevra d'énergie diffusée que des dipôles perpendiculaires au plan contenant OS et la direction d'observation. Le champ électrique qu'ils émettent est polarisé dans le plan contenant O et ces dipôles, donc perpendiculairement au plan contenant OS et la direction d'observation.



Cet effet est facile à observer avec un simple polariseur. On voit nettement un minimum de lumière lorsqu'on tourne le polariseur en observant le ciel dans la direction orthogonale à la direction du Soleil un jour de beau temps.

6 a. Le caractère transversal des ondes planes est lié à la nullité de la divergence des champs. Pour le champ électrique, dans un milieu, la divergence de \vec{E} s'obtient à partir de la conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \text{ soit, d'après l'équation de Maxwell-}$$

$$\text{Gauss : } \text{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Dans un plasma, en notation complexe en $e^{i\omega t}$, $\vec{j} = N \frac{e^2}{im\omega} \vec{E}$, donc $\text{div} \left(\left(N \frac{e^2}{im\omega} + \epsilon_0 i\omega \right) \vec{E} \right) = 0$.

$\text{div} \vec{E} = 0$ et le champ est transverse, sauf si

$$\omega^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = \omega_p^2$$

Il peut donc exister une onde longitudinale si $\omega = \omega_p$,

$$\text{de la forme : } \vec{E} = E_0 e^{i(\omega_p t - kz)} \vec{e}_z.$$

Son rotationnel est nul, et donc le champ magnétique est nul. Cette onde engendre une onde de densité

$$\text{volumique de charge } \rho = -ik\epsilon_0 E_0 e^{i(\omega_p t - kz)} \text{ et de}$$

densité volumique de courant :

$$\vec{j} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 i\omega_p E_0 e^{i(\omega_p t - kz)} \vec{e}_z.$$

La valeur de k est quelconque.

Le vecteur de Poynting est nul, et il n'y a donc pas de propagation d'énergie.

b. Dans un plasma, les vecteurs \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature de phase, donc, en régime sinusoïdal forcé aucune énergie n'est absorbée par le plasma. Puisqu'il n'y a pas non plus propagation à travers le plasma, il y a création d'une onde réfléchie qui emporte toute l'énergie incidente.

7 a. Il y a équation de dispersion lorsque l'on recherche une solution onde plane monochromatique progressive. Le champ électrique s'écrit alors, en notation complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k'x - ik''z)} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k'x)} e^{ik''z}.$$

Si k'' est du même signe que k , il y a amplification de l'amplitude de l'onde dans la traversée du milieu. C'est ce que l'on rencontre par exemple dans les milieux optiquement actifs des cavités laser.

Plus fréquemment, k'' est du signe contraire de k , ce qui traduit une atténuation de l'amplitude sur une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{k''}$. C'est le cas en particu-

lier des milieux absorbants dans lesquels $(\vec{j} \cdot \vec{E}) \neq 0$.

b. $(\vec{j} \cdot \vec{E}) = 0$, et donc il n'y a pas d'absorption d'énergie si \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature de phase, c'est-à-dire, en notation complexe, si le facteur de proportionnalité est imaginaire pur. Ici \vec{j} représente l'ensemble des courants, libres et liés.

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ s'écrit } \frac{1}{\mu_0 i \omega} (\omega^2 - k^2) \vec{E} = \vec{j}.$$

Si $\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)$ est réel, soit k^2 réel, $(\vec{j} \cdot \vec{E}) = 0$.

En posant $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$, cela revient à $\vec{k}' \cdot \vec{k}'' = 0$: \vec{k}' réel, \vec{k}'' imaginaire pur, ou encore si la partie réelle et la partie imaginaire du vecteur \vec{k} sont orthogonales : c'est le cas pour les ondes évanescentes que l'on rencontre lorsqu'il y a réflexion totale.

Savoir appliquer le cours

1. Le vecteur d'onde s'écrit $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$, avec

$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$. Le champ électrique sera transverse, et donc dans le plan (\vec{u}_1, \vec{e}_z) , avec

$$\vec{u}_1 = \vec{e}_z \wedge \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_y - \vec{e}_x).$$

$(\vec{u}_1, \vec{e}_z, \vec{u})$ forment un trièdre direct, comme $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. La polarisation circulaire droite s'écrit, en $z = 0$, pour une propagation suivant Oz :

$$\vec{E} = E_0 [\cos \omega t \vec{e}_x - \sin \omega t \vec{e}_y], \text{ donc}$$

$$\vec{E} = E_0 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\omega t - \frac{\omega \sqrt{2}}{2c} (x+y) \right) (\vec{e}_y - \vec{e}_x) - \sin \left(\omega t - \frac{\omega \sqrt{2}}{2c} (x+y) \right) \vec{e}_z \right].$$

2 a. Le champ électrique de l'onde incidente s'écrit, en choisissant l'origine des temps quand E_x est maximal en $z = 0$:

$$\vec{E}_i = E_0 (\cos(\omega t - kz) \vec{e}_x - \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y).$$

Le champ magnétique est

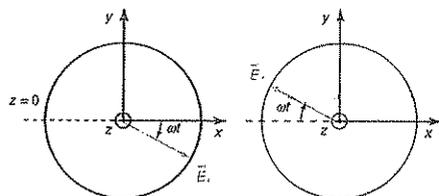
$$\vec{B}_i = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} (\sin(\omega t - kz) \vec{e}_x + \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y).$$

Le champ réfléchi est tel que, en $z = 0$, $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{0}$ à tout instant :

$$\vec{E}_r = -E_0 (\cos(\omega t + kz) \vec{e}_x - \sin(\omega t + kz) \vec{e}_y).$$

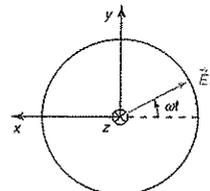
Elle est polarisée **circulairement gauche**.

Attention : le vecteur de propagation est maintenant suivant $-\vec{e}_z$ (voir ci-après).



Circulaire droite
Propagation suivant +Oz

$$\vec{E}_r = -\vec{E}_i$$



Circulaire gauche
Propagation suivant -Oz

Le champ magnétique est :

$$\vec{B}_r = -\frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} (\sin(\omega t + kz) \vec{e}_x + \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y).$$

$$\text{b. } \vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 [(\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz)) \vec{e}_x - (\sin(\omega t - kz) - \sin(\omega t + kz)) \vec{e}_y]$$

$$\vec{E} = 2E_0 [\sin \omega t \sin kz \vec{e}_x + \cos \omega t \sin kz \vec{e}_y]$$

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} [(\sin(\omega t - kz) + \sin(\omega t + kz)) \vec{e}_x + (\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)) \vec{e}_y]$$

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c} [\sin \omega t \cos kz \vec{e}_x + \cos \omega t \cos kz \vec{e}_y]$$

\vec{E} et \vec{B} , somme de deux champs perpendiculaires à Oz , sont aussi transverses.

$\frac{\vec{E}}{c} = \vec{B} \tan k z$. Les champs \vec{E} et \vec{B} sont donc colinéaires.

Remarque : \vec{E} et \vec{B} perpendiculaires est une propriété des ondes planes progressives, et non de leur superposition.

Il en résulte que le vecteur de Poynting est nul en tout point et à tout instant.

3 a. Au premier ordre en $\delta\omega$,

$$k_1 = k_0 - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} \frac{\delta\omega}{2}, \text{ et } k_2 = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} \frac{\delta\omega}{2}.$$

b. Les champs électriques des deux ondes s'écrivent donc, en notation complexe en $e^{i\omega t}$:

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{i\left(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}\right)t - i\left(k_0 - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} \frac{\delta\omega}{2}\right)z}$$
 et

$$\vec{E}_2 = E_0 e^{i\left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right)t - i\left(k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} \frac{\delta\omega}{2}\right)z}$$

La superposition de ces deux champs s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \left[e^{i\left[\frac{\delta\omega}{2}\left(t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} z\right)\right]} + e^{-i\frac{\delta\omega}{2}\left(t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} z\right)} \right],$$

soit :

$$\vec{E} = 2E_0 \cos\left[\frac{\delta\omega}{2}\left(t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} z\right) + \frac{\phi}{2}\right] e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}$$

On trouve donc une onde qui se propage à la vitesse de phase moyenne $v_\phi = \frac{\omega_0}{k_0}$, dont l'amplitude est

une fonction de $t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} z$, et se propage donc à la vitesse de groupe $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}$.

c. On effectue le même développement limité pour exprimer le module k du vecteur d'onde puisque

$$\frac{|\omega - \omega_0|}{\omega_0} \ll 1.$$

On pose $\Omega = \omega - \omega_0$. $k(\Omega) = k_0 + \Omega \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}$.

$$\begin{aligned} f(t, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{g}(\omega) e^{i(\omega t - k z)} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{g}(\omega_0 + \Omega) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} e^{i\Omega \left(t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} z\right)} d\Omega. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $\Omega = \omega - \omega_0$:

$$f(t, z) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{g}(\omega_0 + \Omega) e^{i\Omega \left(t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} z\right)} d\Omega.$$

L'intégrale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{g}(\omega_0 + \Omega) e^{i\Omega \left(t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} z\right)} d\Omega$ est

une fonction de $t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} z$:

$$f(t, z) = \underline{a}\left(t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} z\right) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}.$$

On l'interprète comme une onde plane monochromatique de vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega_0}{k_0}$, dont l'amplitude se propage à la vitesse de groupe $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}$.

4 a. Les dérivations par rapport à z se traduisent par une multiplication par $-ik$, celles par rapport à t par une multiplication par $i\omega$.

$$\text{div } \vec{E} = 0 \text{ s'écrit } \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} - ik E_z = 0 \quad (1).$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}.$$

$$\text{Comme } B_z = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (2).$$

$$-i\omega B_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik E_y, \text{ et } -i\omega B_y = -\frac{\partial E_z}{\partial x} - ik E_x.$$

En dérivant les équations (1) et (2) par rapport à x et par rapport à y , on obtient des relations sur les dérivées secondes, qui interviennent dans l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} - ik \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \text{ et } \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 0,$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - ik \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0.$$

$$\text{De même } \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - ik \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} = 0, \text{ donc } \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - ik \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0.$$

Les équations de propagation des composantes x et y

du champ \vec{E} s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - k^2 E_x = -\frac{\omega^2}{c^2} E_x, \text{ soit :}$$

$$E_x \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = ik \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - k^2 E_y = -\frac{\omega^2}{c^2} E_y, \text{ soit :}$$

$$E_y \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = ik \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$B_x = -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{k}{\omega} E_y = -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{k^2}{\omega} \frac{1}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

soit :
$$B_x = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial y} \frac{\frac{\omega^2}{c^2}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$B_y = \frac{k}{\omega} E_x + \frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{k^2}{\omega} \frac{1}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

soit :
$$B_y = \frac{i}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\frac{\omega^2}{c^2}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

b. L'équation de propagation de la composante z s'écrit de même :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - k^2 E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} E_z$$

c. E_z est tangent aux plans xOz et aux plans yOz , et s'annule donc en $x = 0$ et $x = a$ quel que soit y , et en $y = 0$ et $y = b$ quel que soit x .

On cherche E_z sous la forme d'un produit $X(x)Y(y)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

Pour que la somme d'une fonction de x seul et de y seul soit égale à une constante, il faut et il suffit que chacune de ces fonctions soit une constante.

$X(x)$ et $Y(y)$ ne peuvent alors être que des fonctions sinusoidales, si la constante est négative, ou exponentielles si la constante est positive. Seules les fonctions sinusoidales peuvent s'annuler deux fois. Donc :

$$E_{zmn}(x, y) = E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Les autres composantes des champs s'en déduisent immédiatement à partir des expressions trouvées précédemment.

d. L'équation de dispersion s'écrit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)$$

Il faut donc que $\frac{\omega^2}{c^2} > \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)$ pour que ce mode puisse exister. Pour que le guide soit mono-

mode, il faut donc $\frac{\pi c}{a} < \omega < \pi c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

Pour le mode TM_{10} : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$

$$E_{z10}(x, y) = E_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

En reportant dans les équations trouvées en a, on trouve :

$$E_{x10} = -\frac{ika}{\pi} E_0 \cos \frac{\pi x}{a}, \quad E_{y10} = 0,$$

$$B_{x10} = 0, \quad B_{y10} = -\frac{ia\omega}{\pi c^2} E_0 \cos \frac{\pi x}{a}$$

En notation réelle :

$$\vec{E}_{10} = E_0 \left[\frac{ka}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x + \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z \right],$$

$$\vec{B}_{10} = -\frac{a\omega}{\pi c^2} E_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

5 a. Dans le vide, en notation complexe, les champs d'une onde polarisée suivant Ox et se propageant suivant Oz s'écrivent :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y, \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

b. La relation de dispersion dans un plasma s'écrit :

$$k_p^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = -\frac{1}{\delta^2} \quad \text{avec} \quad \delta \text{ réel si } \omega < \omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{m \epsilon_0}}$$

Les champs électrique et magnétique s'écrivent donc, pour une onde polarisée suivant Ox et de vecteur

$$d'onde suivant Oz $\vec{k}_p = -\frac{i}{\delta} \vec{e}_z$:$$

$$\vec{E}_p = E_{0p} e^{i(\omega t)} e^{-\frac{z}{\delta}} \vec{e}_x, \quad \vec{B}_p = -\frac{i}{\delta \omega} E_{0p} e^{i(\omega t)} e^{-\frac{z}{\delta}} \vec{e}_y$$

($\vec{k}_p = \frac{i}{\delta} \vec{e}_z$ correspondrait à une amplification de l'amplitude, incompatible avec un plasma occupant tout le demi-espace $z > 0$.)

c. Onde réfléchie, polarisée suivant Ox et se propageant dans le vide avec le vecteur d'onde $-\vec{k}_r$, à pour champs électrique et magnétique :

$$\vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = -\frac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y$$

À l'interface entre le vide et le plasma, il n'y a pas de charges surfaciques, donc il y a continuité de \vec{E} et \vec{B} en $z = 0$:

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0p}, \quad \text{et} \quad \vec{E}_0 - \vec{E}_{0r} = -\frac{ic}{\delta \omega} \vec{E}_{0p}$$

Donc, en éliminant \vec{E}_{0p} entre les deux équations :

$$\vec{E}_{0r} = \frac{1 + \frac{ic}{\delta \omega}}{1 - \frac{ic}{\delta \omega}} \vec{E}_0, \quad \text{de même module que } \vec{E}_0$$

L'onde réfléchie propage donc la même énergie que l'onde incidente.

d. Dans le plasma : $\vec{E}_{0p} = \frac{2}{1 - \frac{ic}{\delta\omega}} \vec{E}_0$.

En notation réelle :

$$\vec{E}_p = \frac{2E_0}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{\delta^2\omega^2}}} \cos(\omega t + \phi) e^{-\frac{z}{\delta}\hat{z}_x}$$

$$= \frac{2\omega}{\omega_p} E_0 \cos(\omega t + \phi) e^{-\frac{z}{\delta}\hat{z}_x}$$

$$\vec{B}_p = 2 \frac{E_0}{\delta\omega_p} \sin(\omega t + \phi) e^{-\frac{z}{\delta}\hat{z}_y}$$

Les deux champs sont en quadrature de phase et ne propagent donc aucune énergie en valeur moyenne, ce qui explique que toute l'énergie incidente soit réfléchi.

e. Les relations de continuité imposent l'identité entre les composantes tangentielles des vecteurs d'onde des ondes incidentes, réfléchies et transmises. Dans le plasma, on aura donc $k_p^2 = -\frac{1}{\delta^2} = k_{py}^2 + k_{pz}^2$, avec

$$k_{py} = \frac{\omega}{c} \sin i.$$

$$\vec{k}_p = \frac{\omega}{c} \sin i \hat{z}_y - \frac{i}{\delta} \hat{z}_z, \text{ avec}$$

$$\frac{1}{\delta'} = \sqrt{\frac{1}{\delta^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 i} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2 \cos^2 i}{c^2}}, \delta' < \delta.$$

Le champ dans le plasma est de la forme :

$$\vec{E}_p = E_{0p} \cos\left(\omega t - \frac{\omega \sin i}{c} y + \phi\right) e^{-\frac{z}{\delta'} \hat{z}_x}.$$

C'est la forme caractéristique d'une onde évanescente.

Il y a propagation parallèlement à la surface de séparation avec le vide, avec une amplitude qui diminue exponentiellement lorsque l'on pénètre dans le plasma.

6 a. L'équation mécanique du mouvement macroscopique des électrons s'écrit alors : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m \frac{\vec{v}}{\tau} - e\vec{E}$. En notation complexe en $e^{i\omega t}$:

$$\vec{v} = -\frac{e}{m} \frac{\vec{E}}{1 + i\omega\tau}, \text{ et } \vec{j} = \frac{ne^2}{m} \frac{\vec{E}}{1 + i\omega\tau}$$

$$\vec{l} = \gamma \vec{E} = \frac{ne^2}{m} \frac{\vec{E}}{1 + i\omega\tau} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \vec{E}$$

b.

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{j} \cdot \vec{E}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\gamma) |\vec{E}|^2 = \frac{\gamma_0}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{|\vec{E}|^2}{2}.$$

Cette puissance est cédée aux charges lors des collisions et se retrouve sous forme de chaleur.

On retrouve que, si $\omega\tau \gg 1$, cette puissance tend vers 0.

c. La conservation de la charge $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$ s'écrit en notation complexe :

$$(i\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}) \rho = 0. \text{ La solution est nulle sauf si}$$

$$i\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = 0, \text{ soit } \omega_p^2 \frac{1}{1 + i\omega\tau} + i\omega = 0.$$

$$\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} - \omega_p^2 = 0. \text{ Sur le corps des complexes,}$$

l'équation a pour racine de partie réelle positive :

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 - \frac{1}{4\tau^2} + \frac{i}{2\tau}}, \quad \rho = \rho_0 e^{\left(\sqrt{\omega_p^2 - \frac{1}{4\tau^2}} t - \frac{t}{2\tau}\right)}, \text{ soit,}$$

en notation réelle :

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos\left(\sqrt{\omega_p^2 - \frac{1}{4\tau^2}} t + \phi\right). \text{ Si } \omega_p\tau \gg 1, \text{ on}$$

retrouve l'oscillation à la fréquence plasma.

Si $\omega_p\tau \ll 1$, $\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, on a l'analogie d'un conducteur, et on retrouve le temps τ de relaxation du conducteur.

\vec{M} est un vecteur axial alors que \vec{p} est un vecteur polaire. Le plan (\vec{OM}, \vec{M}) sera donc plan de symétrie pour le champ magnétique \vec{B} et plan d'antisymétrie pour le champ électrique \vec{E} . \vec{B} sera dans le plan, et \vec{E} lui sera perpendiculaire.

La correspondance entre le champ électrique créé par \vec{p} et le champ magnétique créé par \vec{M} s'écrit en électrostatique $\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} M$, soit : $p \leftrightarrow \frac{M}{c^2}$.

Les champs rayonnés par le dipôle électrique s'écrivent :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin\theta \vec{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \hat{p}_0$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \sin\theta \vec{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \hat{p}_\phi,$$

les champs rayonnés par le dipôle magnétique s'écrivent :

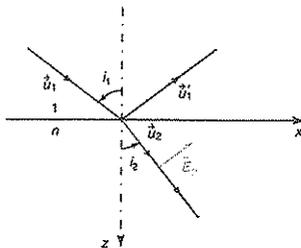
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r} \sin\theta \vec{M} \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta \quad \text{et}$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi cr} \sin\theta \vec{M} \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\phi, \quad \text{le signe - provenant}$$

de ce que la structure locale doit être celle d'une onde plane, donc $\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{e}_r$.

a. Dans le diélectrique, la direction de propagation de l'onde est donnée par les lois de la réfraction : $n \sin i_2 = \sin i_1$, soit, si l'on appelle xOz le plan d'incidence, avec Oz normale au dioptre dirigée dans le sens de propagation : $\vec{u}_2 = (\cos i_2 \vec{e}_z + \sin i_2 \vec{e}_x)$.

b. Le champ électrique aura donc pour direction $-\sin i_2 \vec{e}_z + \cos i_2 \vec{e}_x$ puisqu'il est transverse et polarisé dans le plan d'incidence. Ce sera aussi la direction des dipôles excités par ce champ, qui n'émettront donc pas d'ondes dans cette direction.



D'après les lois de la réflexion, l'onde réfléchie a pour direction $\vec{u}'_1 = (-\cos i_1 \vec{e}_z + \sin i_1 \vec{e}_x)$. Il n'y aura donc pas d'onde réfléchie si : $-\sin i_2 \vec{e}_z + \cos i_2 \vec{e}_x$ est colinéaire à \vec{u}'_1 :

$$\sin i_1 \sin i_2 - \cos i_1 \cos i_2 = -\cos(i_1 + i_2) = 0,$$

c'est-à-dire $i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Couplé avec la relation $\sin i_1 = n \sin i_2$, on trouve : $\tan i_B = n$.

Pour une réflexion sur un verre d'indice 1,5, l'incidence de Brewster vaut 56° . La lumière réfléchie est alors polarisée perpendiculairement au plan d'incidence. Cela est facile à mettre en évidence, et constitue une méthode simple pour trouver la direction des axes d'un polariseur.

S'entraîner

1. L'onde diffusée à grande distance par un dipôle oscillant a localement la structure d'une onde plane :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_r \wedge \vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi rc} \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \vec{p})$$

On simplifie en utilisant le développement du double produit vectoriel :

$$\vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \vec{p})) = -(\vec{e}_r \wedge \vec{p}) : \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi rc} (\vec{e}_r \wedge \vec{p})$$

Le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{e}_r = \varepsilon_0 c \frac{\mu_0^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2} \dot{p}^2 \vec{e}_r$$

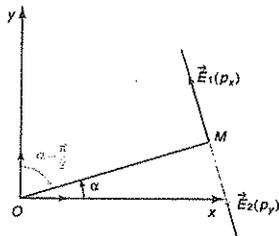
La puissance totale rayonnée est son flux à travers une sphère centrée en O de rayon r :

$$P = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \dot{p}^2 \int_0^\pi 2\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 \dot{p}^2}{6\pi c}$$

2. Si le rayon de la trajectoire est r_0 ,

$$\vec{p} = -p_0 \cos \omega t \vec{e}_x - p_0 \sin \omega t \vec{e}_y, \quad \text{avec } p_0 = er_0.$$

a. Les deux composantes du champ \vec{E} sont orthogonales à \vec{e}_r , dans le plan xOy , et sont donc colinéaires.



Le champ électrique est donc polarisé rectilignement dans le plan xOy .

La composante suivant Ox rayonne un champ

$$\vec{E}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \omega^2 p_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\alpha (\sin\alpha \vec{e}_x - \cos\alpha \vec{e}_y),$$

La composante suivant Oy rayonne un champ

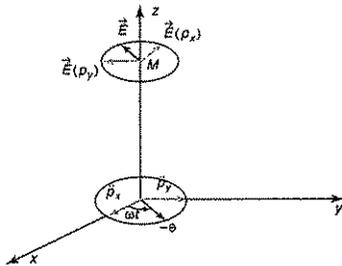
$$\vec{E}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi r} \omega^2 p_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \cos\alpha (\sin\alpha \vec{e}_x - \cos\alpha \vec{e}_y)$$

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \omega^2 p_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) - \alpha\right) (\sin\alpha \vec{e}_x - \cos\alpha \vec{e}_y)$$

b. La composante du champ due à $-p_0 \cos\omega t \vec{e}_x$ vaut :

$$\frac{\mu_0}{4\pi z} \omega^2 p_0 \cos\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{e}_x \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x) = -\frac{\mu_0}{4\pi z} \omega^2 p_0 \cos\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{e}_y,$$

celle due à $-p_0 \sin\omega t \vec{e}_y$ vaut $-\frac{\mu_0}{4\pi z} \omega^2 p_0 \sin\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{e}_x$.



La polarisation est donc circulaire gauche. Dans un plan $z = \text{cte}$, le champ tourne dans le même sens que l'électron.

3. Si \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont les champs électriques des ondes diffusées par les deux dipôles, et \vec{B}_1 et \vec{B}_2 , leurs champs magnétiques, le vecteur de Poynting résultant s'écrit, en un point : $\frac{1}{\mu_0} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)$. Les champs créés par les deux dipôles sont en quadrature de phase, donc, en valeur moyenne au cours du temps, les produits $\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_2$ et $\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_1$ sont nuls. En valeur moyenne au cours du temps, la puissance rayonnée sera la somme des puissances moyennes rayonnées par chaque dipôle. Le vecteur de Poynting de l'onde rayonnée par un dipôle oscillant s'écrit : $\vec{\Pi} = \epsilon_0 c E^2 \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c r^2} \dot{p}^2 \sin^2 \theta \vec{e}_r$.

Le flux à travers une sphère de rayon r donne la puissance rayonnée :

$$P = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \dot{p}^2 \int_0^\pi 2\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0}{6\pi c} \dot{p}^2.$$

Donc la puissance moyenne rayonnée par l'électron en mouvement est :

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi c} (\langle \dot{p}_x^2 \rangle + \langle \dot{p}_y^2 \rangle) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{6\pi c}$$

4. L'énergie mécanique de l'électron dans le modèle de l'électron élastiquement lié est :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} k r^2 + \frac{1}{2} m v^2 = m \omega^2 r_0^2 = m \omega^2 \frac{p_0^2}{e^2}.$$

5. En éliminant la variable p_0^2 :

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{2\omega^2 e^2}{3mc^2} \mathcal{E}_m = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^3} \omega^2 \mathcal{E}_m.$$

En admettant que le mouvement reste circulaire sur chaque période :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -\langle P \rangle = -\frac{\mathcal{E}_m}{\tau}, \quad \text{avec } \tau = \frac{3}{2} \frac{4\pi\epsilon_0 mc^3}{e^2 \omega^2} = \frac{3}{2} \frac{c}{a \omega^2}$$

où $a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$ est le rayon classique de l'électron.

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{4\pi\epsilon_0 mc^3}{e^2 \omega^2} = \frac{3\epsilon_0 mc}{2\pi e^2} \lambda^2 = 8,5 \cdot 10^{-9} \text{ s},$$

avec $T = 1,45 \cdot 10^{-15} \text{ s}$, ce qui justifie l'approximation.

$$\text{2 a. } \vec{E}'_1 = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x, \quad \vec{B}'_1 = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y,$$

$$\vec{E}''_1 = E''_1 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x, \quad \vec{B}''_1 = \frac{E''_1}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y,$$

$$\vec{E}'_2 = E'_2 e^{i(\omega t - nkz)} \vec{e}_x, \quad \vec{B}'_2 = \frac{nE'_2}{c} e^{i(\omega t - nkz)} \vec{e}_y,$$

$$\vec{E}''_2 = E''_2 e^{i(\omega t + nkz)} \vec{e}_x, \quad \vec{B}''_2 = \frac{nE''_2}{c} e^{i(\omega t + nkz)} \vec{e}_y,$$

$$\vec{E}'_3 = E'_3 e^{i(\omega t - Nkz)} \vec{e}_x, \quad \vec{B}'_3 = \frac{NE'_3}{c} e^{i(\omega t - Nkz)} \vec{e}_y.$$

b. Les champs électriques sont tangents aux surfaces de séparation, et donc continus. Le champ magnétique est aussi continu. En $z = 0$, les relations de continuité fournissent les deux relations :

$$E_0 + E''_1 = E'_1 + E''_2 \quad \text{et} \quad E_0 - E''_1 = n(E'_2 - E''_2).$$

En $z = \ell$, les relations de continuité fournissent les relations :

$$E'_3 e^{-in\ell} + E''_3 e^{in\ell} = E'_2 e^{-in\ell}, \quad \text{et}$$

$$nE'_3 e^{-in\ell} - nE''_3 e^{in\ell} = NE'_2 e^{-in\ell}.$$

Il suffit d'éliminer les inconnues E'_2 , E''_2 et E''_3 entre ces quatre équations linéaires et homogènes pour trouver le rapport entre E''_1 et E_0 :

$$E''_2 e^{in\ell} (N + n) = E'_2 e^{-in\ell} (n - N)$$

$$(n + 1)E_0 + (n - 1)E''_1 = 2nE'_2$$

$$(n - 1)E_0 + (n + 1)E''_1 = 2nE''_2$$

$$\text{donc : } [(n - 1)E_0 + (n + 1)E''_1] e^{in\ell} (N + n)$$

$$= [(n + 1)E_0 + (n - 1)E''_1] e^{-in\ell} (n - N)$$

$$\begin{aligned} & [(n-1)(N+n)e^{2ink_0} + (n+1)(N-n)]E_0 \\ & = [(n-1)(N-n) - (n+1)(N+n)e^{2ink_0}]E_0' \end{aligned}$$

$$k_0 e = \frac{2\pi c}{v} e$$

$$r = \frac{[(n-1)(N+n)e^{\frac{4\pi}{\lambda_0}nc} + (n+1)(N-n)]}{[(n+1)(N+n)e^{\frac{4\pi}{\lambda_0}nc} + (n-1)(N-n)]}$$

Pour annuler le numérateur, il faut que $e^{\frac{4\pi}{\lambda_0}nc}$ soit réel :

$$\bullet e^{\frac{4\pi}{\lambda_0}nc} = 1, \text{ soit } e = \frac{\lambda_0}{2n} \left(\text{mod } \frac{\lambda_0}{n} \right)$$

$(n-1)(N+n) = (n+1)(n-N)$, soit : $2n(N-1) = 0$, solution exclue par l'énoncé.

$$\bullet e^{\frac{4\pi}{\lambda_0}nc} = -1, \text{ soit } e = \frac{\lambda_0}{4n} \left(\text{mod } \frac{\lambda_0}{n} \right)$$

$$(n-1)(N+n) = (n+1)(N-n), \text{ soit : } n = \sqrt{N}$$

L'ensemble de ces deux conditions permet d'obtenir une absence de réflexion pour la longueur d'onde λ_0 . C'est le principe de traitement des verres anti-reflets. La longueur d'onde choisie est alors dans le jaune, ce qui fait que la lumière réfléctie est mauve-vert. En fait, il faut effectuer un traitement multi-couche, car il n'existe pas de matériau ayant le bon indice : $n = \sqrt{1,5} = 1,22$.

3 1. a. Le champ doit vérifier les équations $\text{div } \vec{E} = 0$

$$\text{et } \vec{\Delta} E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \text{ soit quatre équations.}$$

$\text{div } \vec{E} = 0$ s'écrit : $-(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) = 0$. Les sinusoides formant une famille libre, cette équation impose que les fonctions sinusoidales de x, y et z des différentes composantes fassent intervenir les mêmes vecteurs d'onde.

Cela justifie la forme de solution recherchée.

$$\Delta E_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \text{ entraîne } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

On retrouve la même condition pour vérifier l'équation de propagation des deux autres composantes.

Cela impose que les composantes aient la même pulsation.

b. Les plans étant des conducteurs parfaits, les composantes tangentielles du champ doivent s'annuler à leur voisinage.

En $x = 0$ et $x = a$, les composantes E_y et E_z s'annulent. Cela justifie la dépendance en $\sin k_x x$ de ces deux composantes.

Il faut de plus que $k_x a = m\pi$ avec m entier.

De même, les conditions sur les plans $y = 0$ et $y = b$ entraînent $k_y b = n\pi$, et celles sur les plans $z = 0$ et $z = d$ $k_z d = p\pi$.

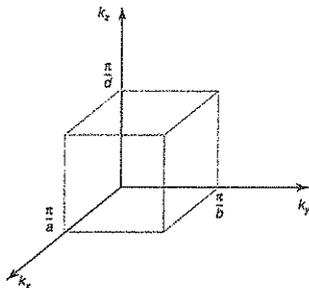
c. $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ s'écrit donc

$$\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{p^2 \pi^2}{d^2} = \frac{4\pi^2 v^2}{c^2} \rho$$

$$v_{\text{sup}}^2 = \frac{c^2}{4} \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2} \right]$$

d. Une fois données les amplitudes E_{0x} et E_{0y} pour un mode donné, la condition $(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) = 0$ impose l'amplitude E_{0z} . Il y a donc deux degrés de liberté pour un mode donné. On peut décomposer chaque mode en un mode avec E_{0x} nul et un mode avec E_{0y} nul, par exemple.

2. a.



b. Le volume de $1/8^{\text{e}}$ de la sphère de centre O et de rayon k est $V = \frac{\pi k^3}{6}$. Il y a donc $\frac{k^3 abd}{6\pi^2}$ parallélépipèdes conte-

nus dans le $1/8^{\text{e}}$ de sphère (k_x, k_y et k_z sont positifs).

c. Pour une fréquence maximum v donnée, il faut compter le nombre de triplets (m, n, p) permettant d'obtenir

$$k_{\text{max}}^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2} \right) \pi^2 < \frac{4\pi^2 v^2}{c^2} = k_0^2.$$

d. Si $\frac{\pi k_0^3}{6}$ est très supérieur au volume $\frac{\pi^3}{abd}$, occupé par un mode, c'est le nombre de parallélépipèdes élémentaires dans le volume $\frac{\pi k_0^3}{6}$ calculé précédemment :

$$\frac{\left(\frac{2\pi v}{c} \right)^3}{6\pi^2} abd = \frac{4\pi v^3}{3 c^3} V.$$

Pour chaque triplet (m, n, p) , il y a deux modes possibles correspondant aux deux degrés de liberté du système.

$$\text{Donc au total : } N = \frac{8\pi v^3}{3 c^3} V$$

$$\text{e. } \frac{1}{V} \frac{dN}{dv} = 8\pi \frac{v^2}{c^3}.$$

f. Le nombre de modes par unité de volume est $8\pi \frac{v^2}{c^3} \Delta v$. Pour avoir une cavité mono-mode, il faudra

que $8\pi \frac{v^2}{c^3} \Delta v V = 1$, soit :

$$V = \frac{c^3 v}{8\pi v^3 \Delta v} = \frac{\lambda^3 v}{8\pi \Delta v} = 3,35 \cdot 10^{-15} \text{ m}^{-3}.$$

On trouve des dimensions de l'ordre de 15 μm , largement supérieures à la longueur d'onde.

3. $v_{\text{mnp}}^2 = \frac{c^2}{4} \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2} \right]$ se simplifie alors en

$v = p \frac{c}{2d}$, ce qui correspond à des ondes stationnaires

entre les deux plans. $\text{div} \vec{E} = 0$ entraîne alors que la composante z du champ est nulle :

$$\vec{E} = (E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y) \sin \frac{\pi z}{d} \sin \left(\frac{\pi c t}{d} + \phi \right).$$

4 a. On écrit le principe fondamental de la dynamique appliqué aux électrons :

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}_T$, et on le projette sur les trois axes :

$$m \frac{dv_x}{dt} = -eE_x - ev_y B_T, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -eE_y + ev_x B_T,$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

En posant $v^* = v_x + \varepsilon i v_y$, $\frac{1}{-i\varepsilon} = i\varepsilon$

$$m \frac{dv^*}{dt} = -eE^* - e(v_y - i\varepsilon v_x) B_T = -e(E^* - i\varepsilon v^* B_T),$$

$$\text{soit } \frac{dv^*}{dt} - \frac{i\varepsilon e B_T}{m} v^* = -\frac{e}{m} E^*$$

$K = -i\varepsilon \frac{e B_T}{m} = -i\varepsilon \omega_B$. Son module est la pulsation synchrotron.

Numériquement $|K| = \omega_B = 1,8 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$\text{b. } j^* = -nev^*, \text{ donc : } \frac{dj^*}{dt} + K j^* = \frac{ne^2}{m} E^*$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{e}_x = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \text{ soit :}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \left(j_y + \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right), \text{ et } \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \left(j_x + \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \right),$$

soit

$$\frac{\partial B^*}{\partial z} = \mu_0 \left(j_y - i\varepsilon j_x + \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} - i\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) = -i\varepsilon \mu_0 \left(j^* + \varepsilon_0 \frac{\partial E^*}{\partial t} \right)$$

Si l'on cherche des solutions en $e^{i(kz - \omega t)}$, les équations différentielles se transforment en équations linéaires sur les amplitudes : $(-i\varepsilon \omega_B - i\omega) j^* = \mu_0^2 \varepsilon_0 E^*$, soit

$$j^* = i \frac{\omega_p^2}{(\varepsilon \omega_B + \omega)} \varepsilon_0 E^* \text{ et } ikB^* = -i\varepsilon \mu_0 (j^* - i\omega \varepsilon_0 E^*),$$

soit, en éliminant j^* :

$$kB^* = -\varepsilon \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{i\omega_p^2}{(\omega + \varepsilon \omega_B)} - i\omega \right) E^*$$

$$= -\frac{\varepsilon}{c^2} \left(\frac{i\omega_p^2}{(\omega + \varepsilon \omega_B)} - i\omega \right) E^*$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ s'écrit de même : } \frac{\partial E^*}{\partial z} = i\varepsilon \frac{\partial B^*}{\partial t},$$

$$ikE^* = i\varepsilon(-i\omega)B^*, \text{ soit } E^* = -i\varepsilon \frac{\omega}{k} B^*.$$

Pour avoir une solution non nulle, il faut donc que :

$$\boxed{k^2 = -i\varepsilon \omega \left(-\frac{\varepsilon}{c^2} \right) \left(\frac{i\omega_p^2}{(\omega + \varepsilon \omega_B)} - i\omega \right)} \\ = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \varepsilon \omega_B)} \right)$$

c. Pour une onde monochromatique plane progressive de polarisation quelconque, c'est $E_+^* = E_x + iE_y$, et $E_-^* = E_x - iE_y$, qui se propagent avec les vecteurs d'onde $k_+ = k(\varepsilon = +1)$ et $k_- = k(\varepsilon = -1)$.

$E_x = \frac{1}{2}(E_+^* + E_-^*)$ et $E_y = -\frac{i}{2}(E_+^* - E_-^*)$ sont donc la superposition de deux ondes planes de vecteurs d'onde différents, sauf si E_+^* ou E_-^* sont nuls :

$E_+^* = 0$, $E_x = -iE_y$, soit : si $E_x = E_0 \cos \omega t$,

$E_y = +E_0 \sin \omega t$, et la polarisation est circulaire gauche.

• Pour une onde polarisée circulairement droite, le champ se propage alors uniquement avec le vecteur d'onde $k_+ = k(\varepsilon = +1)$.
• De même pour une onde polarisée circulairement gauche, la propagation se fera avec le vecteur d'onde $k_- = k(\varepsilon = -1)$.

La vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ vérifie :

$$v_\phi^2 = \frac{c^2}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \varepsilon \omega_B)}}. \text{ On retrouve qu'elle est toujours}$$

supérieure à c vers laquelle elle tend à très haute fréquence, et qu'elle tend vers l'infini pour une fréquence de coupure dépendant de ω_B .

Il n'y aura propagation que si k est réel, donc si ω est supérieure à la fréquence de coupure :

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \varepsilon \omega_B)} > 0 \quad \omega^2 + \varepsilon \omega \omega_B - \omega_p^2 > 0. \text{ Il faut que } \omega$$

soit supérieure à la racine positive de l'équation associée, qui sera la nouvelle pulsation de coupure ω_c :

$\omega_c = \frac{-\varepsilon\omega_p + \sqrt{4\omega_p^2 + \omega_B^2}}{2} - \omega_p - \frac{\varepsilon\omega_B}{2}$, en tenant compte de la faible valeur de la pulsation synchrotron devant celle de la pulsation plasma.

Pour une pulsation comprise entre $\omega_p - \frac{\omega_B}{2}$ et $\omega_p + \frac{\omega_B}{2}$,

on réalise un polariseur circulaire : seule la composante circulaire droite est transmise.

d. On décompose l'onde incidente en ses deux composantes circulaires :

$$\vec{E}(z=0) = E_0 e^{-i\omega t} \vec{e}_x = \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} [(\vec{e}_x + i\vec{e}_y) + (\vec{e}_x - i\vec{e}_y)].$$

La première, $\frac{E_0}{2}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$, se propage avec le vecteur d'onde k_- et la seconde, $\frac{E_0}{2}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)$, avec le vecteur d'onde k_+ .

À la sortie, les deux composantes seront déphasées de $(k_+ - k_-)L = \phi$.

$$\begin{aligned} \vec{E}(z=L) &= \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} [(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)e^{-i\phi} + (\vec{e}_x - i\vec{e}_y)] \\ &= \frac{E_0}{2} e^{-i(\omega t + \frac{\phi}{2})} \left[2 \cos \frac{\phi}{2} \vec{e}_x + 2 \sin \frac{\phi}{2} \vec{e}_y \right] \end{aligned}$$

En posant $\vec{u} = \cos \frac{\phi}{2} \vec{e}_x + \sin \frac{\phi}{2} \vec{e}_y$:

$\vec{E}(z=L) = \vec{E}(z=L) = E_0 e^{-i(\omega t + \frac{\phi}{2})} \vec{u}$. À la sortie de la lame, l'onde est polarisée rectilignement, sa direction de polarisation ayant tourné de $+\frac{(k_+ - k_-)L}{2}$: la couche de plasma présente un pouvoir rotatoire.

5 a. L'équation mécanique s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z) - e\vec{v} \wedge B_1 \vec{e}_y, \text{ soit :}$$

$$-i\omega m v_x = -eE_x + ev_z B_1, \quad -i\omega m v_y = -eE_y,$$

$$-i\omega m v_z = -eE_z - ev_x B_1, \text{ soit :}$$

$$v_x = -i \frac{e}{\omega m} E_x + i \frac{\omega_c}{\omega} v_z, \quad v_y = -i \frac{eE_y}{\omega m}, \quad v_z = -i \frac{eE_z}{\omega m} - i \frac{\omega_c}{\omega} v_x$$

b. \vec{j} s'en déduit immédiatement :

$$(1) j_x = i \frac{\omega_p^2}{\omega} \varepsilon_0 E_x + i \frac{\omega_c}{\omega} j_z, \quad (2) j_y = i \frac{\omega_p^2}{\omega} \varepsilon_0 E_y,$$

$$(3) j_z = i \frac{\omega_p^2}{\omega} \varepsilon_0 E_z - i \frac{\omega_c}{\omega} j_x$$

c. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = ikE_z$. La conservation de la charge s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \text{ soit : } -i\omega\rho + ikj_z = 0.$$

En éliminant ρ entre les deux équations :

$$(4) j_z = i\omega\varepsilon_0 E_z$$

d. $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ s'écrit : $i\omega B_x = -ikE_y$, soit :

$$B_x = -\frac{k}{\omega} E_y, \quad i\omega B_y = ikE_x, \text{ soit : } B_y = \frac{k}{\omega} E_x \text{ et } B_z = 0.$$

$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ s'écrit : $-ikB_y = \mu_0 j_x - i\frac{\omega}{c^2} E_x$ et

$ikB_x = \mu_0 j_y - i\frac{\omega}{c^2} E_y$, soit :

$$B_y = \mu_0 \frac{j_x}{k} + \frac{\omega}{kc^2} E_x \quad \text{et} \quad B_x = -\mu_0 \frac{j_y}{k} - \frac{\omega}{kc^2} E_y.$$

L'élimination des composantes de \vec{B} entre ces quatre équations donne les relations :

$$\mu_0 \frac{j_x}{k} + \frac{\omega}{kc^2} E_y = \frac{k}{\omega} E_y, \text{ soit : } E_y = -i \frac{\mu_0 \omega}{\omega^2 - k^2} j_x$$

$$\text{et } \mu_0 \frac{j_y}{k} + \frac{\omega}{kc^2} E_x = \frac{k}{\omega} E_x, \text{ soit : } E_x = -i \frac{\mu_0 \omega}{\omega^2 - k^2} j_y$$

e. En éliminant les composantes E_x et j_z entre les équations (1), (3) et (4), on obtient une seconde relation entre j_x et E_x :

$$j_z = i \frac{\omega_p^2}{\omega} \varepsilon_0 E_z - i \frac{\omega_c}{\omega} j_x \text{ et } j_z = i\omega\varepsilon_0 E_z, \text{ donc :}$$

$$j_x \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = -i \frac{\omega_c}{\omega} j_x, \text{ et } j_x \left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right] = i \frac{\omega_p^2}{\omega} \varepsilon_0 E_x$$

Le couple (j_x, E_x) est solution d'un système de deux équations linéaires homogènes. Pour avoir une solution non nulle, il faut qu'elles ne soient pas linéairement

indépendantes, donc que : $\left[1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \right] = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{1}{\omega^2 - k^2}$,

et donc que k soit égal à k' tel que :

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{\left[1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \right]} \right)$$

f. De même, le couple (j_y, E_y) est solution d'un système de deux équations linéaires homogènes :

$$j_y = 1 - \frac{\omega^2}{\omega^2} \epsilon_0 E_y, \text{ et } E_y = -i \frac{\mu_0 \omega}{\omega^2 - k^2} j_y.$$

Pour avoir une solution non nulle, il faut alors que k soit

égal à k'' tel que : $k''^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$; le champ magnéti-

que n'influe pas sur la composante du champ qui lui est parallèle.

Donc une onde plane monochromatique progressive dans le milieu, à la pulsation ω sera en général la superposition de deux ondes de vecteur d'onde différents :

- une de vecteur d'onde $k'' \vec{z}$, transverse, polarisée rectilinéairement parallèlement au champ magnétique, les composantes de \vec{E} suivant x et z étant nulles,

- une de vecteur d'onde $k' \vec{z}$, dont la composante de \vec{E} suivant Oy est nulle. Cette onde a une composante longitudinale E_z non nulle, mais est transverse magnétique.

Remarque : dans ce cas, la relation entre \vec{j} et \vec{E} est linéaire, mais n'est pas une relation de proportionnalité. Le champ n'est pas alors nécessairement transverse, car il peut exister une onde de densité de charge volumique dans le plasma.

g. Si $\omega \gg \omega_p$, $k'' \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)$, et

$$k' \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) \left(1 + \frac{\omega_c^2}{2\omega^2}\right)$$

h. Le déphasage entre les composantes x et y d'une onde à la pulsation ω après le parcours z , sera égal à

$$\phi(E_x) - \phi(E_y) = (k' - k'')z = \frac{\omega_p^2 \omega_c^2}{2c\omega^3} z, \text{ proportionnel à } \omega_p^2, \text{ donc au carré du champ magnétique.}$$

6 I. 1. a. $\vec{\text{grad}}(e^{j(\omega t - kz)}) = -jk e^{j(\omega t - kz)} \vec{z} = -j\alpha \vec{k}$.

b. $\text{div} \vec{E} = 0$.

$$\text{div} \vec{E}(M, t) = \text{div}(\vec{E}_0 \alpha) = \alpha \text{div} \vec{E}_0 - j\alpha \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\text{div} \vec{E}_0 = j\vec{k} \cdot \vec{E}_0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = \vec{\text{rot}}(\vec{E}_0 \alpha) = \alpha \vec{\text{rot}} \vec{E}_0 + \vec{E}_0 \wedge j\alpha \vec{k} = -j\omega \vec{B}_0 \alpha$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}_0 = j\vec{k} \wedge \vec{E}_0 - j\omega \vec{B}_0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \text{ s'écrit de même : } \text{div} \vec{B}_0 = j\vec{k} \cdot \vec{B}_0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \vec{\text{rot}}(\vec{B}_0 \alpha) = \alpha \vec{\text{rot}} \vec{B}_0 + \vec{B}_0 \wedge j\alpha \vec{k} = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 \alpha$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}_0 = j\vec{k} \wedge \vec{B}_0 + j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$$

c. \vec{E}_0 est transverse. $\vec{\text{rot}} \vec{E}_0 = j\vec{k} \wedge \vec{E}_0 - j\omega \vec{B}_0$

$$\vec{E}_0 = E_{0x}(x, y) \vec{z}_x + E_{0y}(x, y) \vec{z}_y, \text{ donc}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}_0 = \left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \right) \vec{z}_z. \vec{k} \wedge \vec{E}_0 \text{ est orthogonal à } \vec{z}_z.$$

Si l'on note \vec{B}_{0t} la composante transverse de \vec{B}_0 ,

$$\vec{B}_{0t} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}_0$$

\vec{k} et $\vec{E}_0 = \vec{E}_{0t}$ sont orthogonaux, donc $B_{0t} = \frac{k}{\omega} E_{0t}$

d. \vec{B}_0 est transverse ; $\vec{\text{rot}} \vec{B}_0 = j\vec{k} \wedge \vec{B}_0 + j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$. Le

même raisonnement conduit à : $E_{0t} = \frac{c^2 k}{\omega} B_{0t}$.

2. a. Pour avoir à la fois ces deux relations, il faut :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

b. $\vec{B}_0 = \vec{B}_{0t} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}_0$, donc $\vec{\text{rot}} \vec{E}_0 = j\vec{k} \wedge \vec{E}_0 - j\omega \vec{B}_0$

entraîne $\vec{\text{rot}} \vec{E}_0 = \vec{0}$.

De même

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}_0 = j\vec{k} \wedge \vec{B}_0 + j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 = j\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}_0 \right) + j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 = \vec{0}$$

si $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$ et $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

$\text{div} \vec{E}_0 = j\vec{k} \cdot \vec{E}_0$ et $\text{div} \vec{B}_0 = j\vec{k} \cdot \vec{B}_0$ sont nuls si les deux champs sont transverses.

c. $\vec{E}(M, t) = -\frac{\partial A(M, t)}{\partial t} - \vec{\text{grad}} V(M, t)$, soit

$$\vec{E}_0(x, y) \alpha = -j\omega \alpha A_0 \vec{z}_z + j\alpha \vec{k} V_0 - \alpha \vec{\text{grad}} V_0(x, y).$$

Si \vec{E}_0 est transverse : $-j\omega \alpha A_0 \vec{z}_z + j\alpha \vec{k} V_0 = \vec{0}$, soit

$$A_0(x, y) = \frac{k}{\omega} V_0(x, y) = \frac{V_0(x, y)}{c}, \text{ et}$$

$$\vec{E}_0 = -\vec{\text{grad}} V_0(x, y).$$

Comme de plus $\text{div} \vec{E}_0 = 0$,

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} V_0) = \Delta V_0(x, y) = 0 \text{ dans l'espace interconducteurs.}$$

d. S'il y a un seul conducteur, l'équation de Laplace a deux dimensions ayant pour conditions aux limites $V_0 = \text{Cte}$ sur le conducteur à z et t donnés, la solution unique est la solution triviale $V_0(x, y) = \text{Cte}$ pour tout point intérieur, et donc \vec{E}_0 et \vec{B}_0 nuls. Il n'y a pas d'onde TEM à l'intérieur d'un conducteur creux unique.

II. 1. a. $\Delta V_0(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dV_0}{dr} \right] = 0$ puisque l'onde est TEM. Donc $V_0(r)$ est de la forme : $V_0(r) = A \ln r + B$, soit :

$$V_0(r) = V_0(b) + \frac{(V_0(a) - V_0(b))}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{r} = V_0(b) + v_0 \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}}$$

b. $\vec{E}_0 = -\text{grad} V_0 = -\frac{v_0}{r \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \vec{e}_r$, et

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_0 = -\frac{v_0}{c r \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \vec{e}_\theta$$

c. $\eta = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$. Ce rapport a pour dimension la racine carrée du rapport d'une inductance sur une capacité, donc d'une impédance $L\omega$ sur une admittance $C\omega$. C'est donc une impédance.

2. a. La densité volumique d'énergie s'écrit :

$$w = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E_0^2(r) \cos^2(\omega t - kz)$$

b. Le vecteur de Poynting au même point vaut :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

La vitesse de propagation de l'énergie dans le câble est donc c comme pour les ondes planes dans le vide.

c. La puissance moyenne qui traverse une section droite du conducteur est la valeur moyenne du flux du vecteur de Poynting à travers la section :

$$\langle P \rangle = \int_a^b \frac{\epsilon_0 c E_0^2(r)}{2} 2\pi r dr = \pi \epsilon_0 c \int_a^b \left(\frac{v_0}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^2 \frac{dr}{r}, \text{ soit :}$$

$$\langle P \rangle = \pi \epsilon_0 c \frac{v_0^2}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

3. a. On applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r compris entre a et b , et de hauteur dz :

$$2\pi r dz E_0(r) \alpha = \frac{\lambda_1}{\epsilon_0} dz, \text{ soit :}$$

$$\lambda_1(z, t) = \frac{2\pi \epsilon_0 v_0 \alpha}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} e^{i(\omega t - kz)}$$

b. La densité surfacique est $\frac{\lambda_1}{2\pi a} = \frac{\epsilon_0 v_0 \alpha}{a \ln \left(\frac{b}{a} \right)}$. À la sur-

face du conducteur intérieur, le champ vaut $\vec{E}(a) = \alpha \frac{v_0}{a \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \vec{e}_r$. On vérifie donc $\vec{E}(a_+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$.

c. Si l'on applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon $b < r < b + \epsilon$, de hauteur dz , là où le champ est nul, on trouve immédiatement : $\lambda_1(z, t) + \lambda_2(z, t) = 0$

4. a. On applique le théorème d'Ampère à un cercle de rayon r compris entre a et b , orienté suivant \vec{e}_θ :

$$2\pi r B_0(r) \alpha = \mu_0 i_1(z, t) = 2\pi \alpha \frac{v_0}{c \ln \left(\frac{b}{a} \right)}, \text{ soit :}$$

$$i_1(z, t) = \frac{2\pi v_0}{\mu_0 c \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \alpha$$

$$i_0 = \frac{2\pi v_0}{\mu_0 c \ln \left(\frac{b}{a} \right)} = \frac{\lambda_0}{\epsilon_0 \mu_0 c} = \lambda_0 c$$

b. La densité surfacique de courant est

$$\vec{i}_{t1} = \frac{i_1(z, t)}{2\pi a} \vec{e}_z = \frac{v_0}{\mu_0 c a \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \alpha \vec{e}_z$$

À la traversée de la surface $r = a$, on doit avoir :

$$\vec{B}(a) = \mu_0 i_{t1} \vec{e}_\theta = \frac{v_0}{c a \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \alpha \vec{e}_\theta, \text{ ce qui est bien vérifié.}$$

c. L'application du théorème d'Ampère à une circonférence de rayon $b < r < b + \epsilon$ entraîne que $i_1 + i_2 = 0$: les deux courants ont même intensité à chaque instant aux points de même cote, mais circulent en sens inverse.

Attention : à ne pas confondre avec la propagation de l'onde de courant qui est nul pour les deux !

d. D'après II.2.c

$$\langle P \rangle = \pi \epsilon_0 c \frac{v_0^2}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} = \frac{1}{2} \frac{2\pi v_0}{\mu_0 c \ln \left(\frac{b}{a} \right)} v_0 = \frac{1}{2} v_0 i_0$$

5. La conservation de la charge, sommée sur la circonférence de rayon a , s'écrit :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \frac{\partial i_1}{\partial z} = (j\omega\lambda_0 - jk i_0)\alpha = j\omega\alpha\left(\lambda_0 - \frac{i_0}{c}\right) = 0$$

6. $v(z, t) = v_0\alpha$, et $\lambda_1 = \frac{2\pi\epsilon_0 v_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\alpha$, donc

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

7. $d\Phi = dz \int_a^b \frac{v_0\alpha}{cr \ln\left(\frac{b}{a}\right)} dr = \frac{v_0\alpha}{c} dz$, donc $\Phi_0 = \frac{v_0}{c}$

$$L_0 = \frac{\Phi_0}{i_1} = \frac{\mu_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi}$$

8. $L_0 C_0 = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$. (L'expression est homogène, puisque L_0 et C_0 sont une inductance et une capacité par unité de longueur.)

$$Z_c = \frac{v_0}{i_0} = \frac{v_0 \lambda_0}{\lambda_0 i_0} = \frac{1}{C_0 c} = L_0 c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

A.N. : $L_0 = 2,20 \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$,
 $C_0 = 5,06 \cdot 10^{-11} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, $\eta = 377 \Omega$. $Z_c = 65,9 \Omega$.

7 1. a. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{r} - e\vec{v} \wedge B_0 \vec{e}_z.$$

En l'absence de champ magnétique, la vitesse angulaire de rotation est ω_0 , donc $\frac{k}{m} = \omega_0^2$. On pose $\Omega = \frac{eB_0}{2m}$.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega_0^2 \vec{r} - 2\vec{v} \wedge \Omega \vec{e}_z.$$

En projection sur les trois axes : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\Omega \dot{y}$,
 $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 2\Omega \dot{x}$, $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$.

À partir des conditions initiales, on déduit que $z = a \sin \theta \cos \omega_0 t$.

b. On multiplie la seconde équation par i et on fait la somme : $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 2i\Omega \dot{z}$

c. Le polynôme caractéristique s'écrit :

$r^2 - 2i\Omega r + \omega_0^2 = 0$, de solutions : $i\Omega \pm i\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}$, c'est-à-dire, si $\Omega \ll \omega_0$: $i(\Omega \pm \omega_0)$.

La solution est donc de la forme $e^{i\Omega t} [A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}]$. Les constantes complexes A et B se déterminent à partir des conditions initiales : $A + B = -ia \cos \theta$, et $i[(\Omega + \omega_0)A + (\Omega - \omega_0)B] = i\omega_0(A - B) = \omega_0 a$,

soit : $A - B = -ia$. Donc : $A = -\frac{ia}{2}(1 + \cos \theta)$ et $B = \frac{ia}{2}(1 - \cos \theta)$.

$$Z(t) = \frac{ia}{2} e^{i\Omega t} [(1 - \cos \theta) e^{-i\omega_0 t} - (1 + \cos \theta) e^{i\omega_0 t}]$$

$x(t)$ en est la partie réelle :

$$x(t) = \frac{a}{2} [(1 - \cos \theta) \sin(\omega_0 - \Omega)t + (1 + \cos \theta) \sin(\omega_0 + \Omega)t]$$

et $y(t)$ la partie imaginaire :

$$y(t) = \frac{a}{2} [(1 - \cos \theta) \cos(\omega_0 - \Omega)t - (1 + \cos \theta) \cos(\omega_0 + \Omega)t]$$

d. C'est la superposition d'un mouvement oscillatoire $z = a \sin \theta \cos \omega_0 t$ suivant Oz et, dans le plan xOy , d'un mouvement circulaire de rayon $\frac{a}{2}(1 - \cos \theta)$, de pulsation $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$ dans le sens indirect, et d'un mouvement circulaire de rayon $\frac{a}{2}(1 + \cos \theta)$, de pulsation $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$ dans le sens direct.

2. a. $\vec{p} = -e\vec{r}$, donc :

$$p_x = -e \frac{a}{2} [(1 - \cos \theta) \sin(\omega_0 - \Omega)t + (1 + \cos \theta) \sin(\omega_0 + \Omega)t]$$

$$p_y = -e \frac{a}{2} [(1 - \cos \theta) \cos(\omega_0 - \Omega)t - (1 + \cos \theta) \cos(\omega_0 + \Omega)t]$$

$$p_z = -e a \sin \theta \cos \omega_0 t$$

b. En un point de l'axe Oz , le dipôle p_z n'émet aucun rayonnement.

Le dipôle p_x émet une onde dont le champ électrique est proportionnel à \vec{p}_x et est suivant la direction $-\vec{p} \vec{e}_x$.

Le dipôle p_y émet une onde dont le champ électrique est proportionnel à \vec{p}_y et est suivant la direction $-\vec{p} \vec{e}_y$.

Il y aura donc une onde de champ d'amplitude proportionnelle à $-(\omega_0 - \Omega)^2 e \frac{a}{2} (1 - \cos \theta) \sin(\omega_0 - \Omega)t$ suivant Ox et $-(\omega_0 - \Omega)^2 e \frac{a}{2} (1 - \cos \theta) \cos(\omega_0 - \Omega)t$ suivant Oy , donc polarisée circulairement droite, et une onde d'amplitude proportionnelle à $-(\omega_0 + \Omega)^2 e \frac{a}{2} (1 + \cos \theta) \sin(\omega_0 + \Omega)t$ suivant Ox et $(\omega_0 + \Omega)^2 e \frac{a}{2} (1 + \cos \theta) \cos(\omega_0 + \Omega)t$ suivant Oy , donc polarisée circulairement gauche.

L'écart de fréquence est $\Delta\nu = \frac{\Omega}{2\pi} = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ pour $0,1 \text{ T}$;

$$v_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 6,91 \cdot 10^{14} \text{ Hz, donc } \frac{\Delta v}{v_0} = 2,0 \cdot 10^{-6}.$$

L'effet est observable en utilisant un interféromètre de Fabry-Pérot.

c. Dans le plan xOy , les dipôles suivant Ox et Oy rayonnent des champs électriques orthogonaux à la direction de diffusion dans le plan xOy , et donc de même direction. Leur superposition donne donc deux ondes polarisées rectilignement dans ce plan, l'une à la pulsation ω_1 et l'autre à la pulsation ω_2 .

Le dipôle suivant Oz rayonne en un point du plan une onde polarisée rectilignement suivant Oz , donc perpendiculairement aux deux autres, et de pulsation ω_0 .

§ 1. Pour une onde électromagnétique plane progressive harmonique dans le vide, l'équation de propagation implique que $k = \frac{\omega}{c}$. La relation entre le champ électrique et le champ magnétique est : $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$, donc

$$\vec{B}_i = \frac{1}{c} (\sin i \vec{e}_x - \cos i \vec{e}_y) E_0 \cos(\omega t - (\vec{k}_i \cdot \vec{r}))$$

$$2. \vec{n}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \epsilon_0 c E_0^2 (\cos i \vec{e}_x + \sin i \vec{e}_y) \cos^2(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}).$$

L'énergie se propage dans la direction du vecteur d'onde \vec{k} .

La puissance moyenne rayonnée à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation est la moyenne du flux de \vec{n}_i à travers cette surface, soit :

$$\langle P \rangle = \langle |\vec{n}_i| \rangle S = \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} S$$

$$3. u_i = \epsilon_0 \frac{E_i^2}{2} + \frac{B_i^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E_i^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \text{ et}$$

$$\text{sa valeur moyenne est : } \langle u_i \rangle = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2}$$

4. Dans le métal conducteur parfait, les champs électrique et magnétique de l'onde sont nuls. Donc la composante tangentielle du champ électrique et la composante normale du champ magnétique s'annulent en $x = 0$.

Il en résulte que, pour vérifier ces conditions aux limites, il est nécessaire qu'il y ait une onde réfléchie telle que $E_{rx}(x=0) + E_i(x=0) = 0$, et $B_{rx}(x=0) + B_{ix}(x=0) = 0$ quels que soient y, z et t . L'onde réfléchie est donc une onde plane de même pulsation, et donc de même valeur de k que l'onde incidente, de même valeur de k_y , et donc de vecteur d'onde : $\vec{k}_r = k(-\cos i \vec{e}_x + \sin i \vec{e}_y)$.

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + k \cos i x - k \sin i y) \vec{e}_z, \text{ et}$$

$$\vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} (\sin i \vec{e}_x + \cos i \vec{e}_y) \cos(\omega t + k \cos i x - k \sin i y)$$

5.

$$\vec{E} = E_0 [\cos(\omega t - k \cos i x - k \sin i y) - \cos(\omega t + k \cos i x - k \sin i y)] \vec{e}_z \\ = -2E_0 \sin(\omega t - k \sin i y) \sin(k \cos i x) \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} [(\sin i \vec{e}_x - \cos i \vec{e}_y) \cos(\omega t - k \cos i x - k \sin i y) - (\sin i \vec{e}_x + \cos i \vec{e}_y) \cos(\omega t + k \cos i x - k \sin i y)]$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \{ 2 \sin i \vec{e}_x [\sin(\omega t - k \sin i y) \sin(k \cos i x)] - 2 \cos i \vec{e}_y \cos(\omega t - k \sin i y) \cos(k \cos i x) \}$$

6. En $x = 0$:

$$\vec{B}(0, y, t) = -2 \frac{E_0}{c} \cos i \vec{e}_y \cos(\omega t - k \sin i y).$$

Les relations de continuité pour le champ magnétique s'écrivent :

$$\vec{B}(x=0) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge (-\vec{e}_x) = -2 \frac{E_0}{c} \cos i \vec{e}_y \cos(\omega t - k \sin i y),$$

soit, puisque \vec{j}_s est dans le plan du conducteur :

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos i \cos(\omega t - k \sin i y) \vec{e}_z$$

7. \vec{B}_1 se calcule par le théorème d'Ampère appliqué à un rectangle parallèle au plan xOy , orienté dans le sens positif autour de Oz :

$$\vec{B}_1 = -\mu_0 \frac{j_s}{2} \vec{e}_y = -\frac{E_0}{c} \cos i \cos(\omega t - k \sin i y) \vec{e}_y$$

$$\text{Donc } \vec{B}_2 = \vec{B} - \vec{B}_1 = -\frac{E_0}{c} \cos i \cos(\omega t - k \sin i y) \vec{e}_y$$

$$d\vec{F} = \vec{j}_s dS \wedge \vec{B}_2 = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 i \cos^2(\omega t - k \sin i y) dS \vec{e}_x$$

Cette force est une force pressante qui repousse le conducteur.

$$\langle p \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 i = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 i = 2 \langle u_i \rangle \cos^2 i$$

8. a. Chaque photon a pour énergie $h\nu = \hbar\omega$, et pour quantité de mouvement $\frac{\hbar\omega \vec{k}}{c} = \hbar \vec{k}$.

$$b. N h\nu = \langle u_i \rangle = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2}, \text{ soit : } N = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2\hbar\nu}$$

c. Chaque photon qui se réfléchit a sa quantité de mouvement qui passe de $\frac{h\nu}{c} (\cos i \vec{e}_x + \sin i \vec{e}_y)$ à

$\frac{h\nu}{c}(-\cos i \vec{e}_x + \sin i \vec{e}_z)$, et cède donc au plan métallique la quantité de mouvement : $2 \frac{h\nu}{c} \cos i \vec{e}_x$.

Les photons incidents qui atteignent la surface dS du plan métallique entre les instants t et $t + dt$ sont, à l'instant t à l'intérieur du cylindre de base dS et de génératrices parallèles à $\cos i \vec{e}_x + \sin i \vec{e}_z$, et de longueur $c dt$.

Ce volume vaut $c \cos i dS dt$ et contient donc

$$Nc \cos i dS dt = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2h\nu} c \cos i dS dt \text{ photons.}$$

La force moyenne à laquelle est soumis l'élément d'aire dS est donc : $\left[\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 i dS \right]$. On retrouve l'expression $\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 i$ de la pression de radiation.

9. a. La projection de la force de pression s'exerçant sur l'élément de surface $dS = 2\pi R^2 \sin i di$ sur lequel l'angle d'incidence du faisceau est i est $P(i) dS \cos i$.

L'incidence varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Donc :

$$F = \varepsilon_0 E_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi R^2 \sin i \cos^3 i di = \varepsilon_0 E_0^2 \frac{\pi R^2}{2} = \langle u_i \rangle \pi R^2$$

$$F = \frac{\langle u_i \rangle}{c} \pi R^2 = \frac{I}{c} \pi R^2$$

b. Pour soulever la bille, il faut $F \geq mg$, soit :

$$I_m = c \frac{mg}{\pi R^2} = \frac{4}{3} c \mu g R.$$

La puissance qui arrive sur la bille est le flux du vecteur de Poynting à travers la projection de la bille perpendiculairement au faisceau : $P_m = cmg$.

Numériquement : $I_m = 1,06 \cdot 10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

$P_m = 33,2 \text{ W}$. Il faut utiliser un faisceau laser très étroit pour avoir une intensité très grande localement.

9 1. a. $\vec{E} = \underline{E}(r, z) e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x$.

L'équation de propagation s'écrit :

$$\Delta(\underline{E}(r, z) e^{i(kz - \omega t)}) + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{E}(r, z) e^{i(kz - \omega t)} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\underline{E}(r, z) e^{i(kz - \omega t)})$$

$$= \left[-k^2 \underline{E}(r, z) + 2ik \frac{\partial \underline{E}(r, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \underline{E}(r, z)}{\partial z^2} \right] e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\underline{E}(r, z) e^{i(kz - \omega t)}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \underline{E}(r, z)}{\partial r} \right) e^{i(kz - \omega t)}$$

Donc, en ne gardant que les termes d'ordre 0 en $\frac{1}{kz_0}$,

l'équation de propagation s'écrit : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

Cela correspond à la modélisation du faisceau laser par une onde plane.

À l'ordre suivant en $\frac{1}{kz_0}$:

$$2ik \frac{\partial \underline{E}(r, z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \underline{E}(r, z)}{\partial r} \right) = 0 :$$

$$2ik \frac{\partial \underline{E}(r, z)}{\partial z} = \left(\frac{2kz_0}{(z + iz_0)^2} - \frac{ik^2 z_0 r^2}{(z + iz_0)^3} \right) E_0 \exp \left(-ik \frac{r^2}{2(z + iz_0)} \right)$$

$$\frac{\partial \underline{E}(r, z)}{\partial r} = \left(\frac{kz_0 r}{(z + iz_0)^2} \right) E_0 \exp \left(-ik \frac{r^2}{2(z + iz_0)} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \underline{E}(r, z)}{\partial r} \right)$$

$$= \left(\frac{2kz_0}{(z + iz_0)^2} - ik \frac{kz_0 r^2}{(z + iz_0)^3} \right) E_0 \exp \left(-ik \frac{r^2}{2(z + iz_0)} \right).$$

L'équation de propagation est donc vérifiée à un terme du second ordre en $\frac{1}{kz_0}$ près.

b. $\text{div} \vec{E} = 0$ ne peut être vérifié par un tel champ, car sa dépendance en x n'est pas nulle. La composante z du champ a donc été considérée comme négligeable devant la composante x .

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{x \partial E_x}{r \partial r} = \left(\frac{kz_0 x}{(z + iz_0)^2} \right) E_0 \exp \left(-ik \frac{r^2}{2(z + iz_0)} \right) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$= -\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ik E_z$$

$$\underline{E}_z \approx \frac{ixz_0}{(z + iz_0)^2} E_0 \exp \left(-ik \frac{r^2}{2(z + iz_0)} \right) e^{i(kz - \omega t)}, \text{ de l'ordre de}$$

$$\frac{x}{z_0} \underline{E}(r, z) e^{i(kz - \omega t)}, \text{ donc en } \frac{1}{\sqrt{kz_0}} \ll 1 \text{ car } x < \omega = \sqrt{\frac{z_0}{k}}.$$

$$2. \text{ a. } |\underline{E}(r, z)|^2 = E_0^2 \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \exp \left(-ik \frac{r^2(z - iz_0)}{2(z^2 + z_0^2)} \right)$$

$$\exp \left(+ik \frac{r^2(z + iz_0)}{2(z^2 + z_0^2)} \right)$$

$$= E_0^2 \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \exp \left(-k \frac{r^2 z_0}{(z^2 + z_0^2)} \right)$$

Soit : $|\underline{E}(r, z)|^2 = A^2(z) \exp \left(-\frac{2r^2}{w^2(z)} \right)$, avec

$$A^2(z) = E_0^2 \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2}$$

$$\text{b. } w^2(z) = 2 \frac{z^2 + z_0^2}{kz_0} = 2 \frac{z_0}{k} \left(1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right)$$

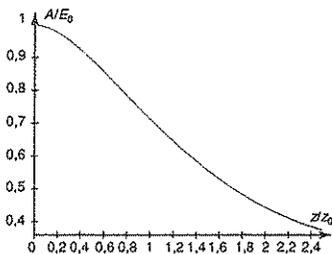
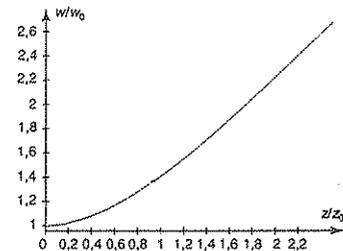
$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \text{ avec } w_0 = \sqrt{2 \frac{z_0}{k}} = \sqrt{\frac{z_0 \lambda}{\pi}}$$

Le produit

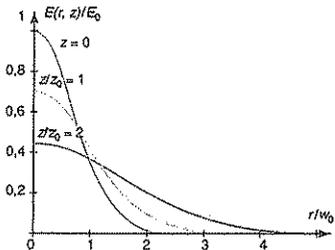
$$A^2(z) w^2(z) = 2 E_0^2 \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \frac{z^2 + z_0^2}{k z_0} = 2 \frac{z_0}{k} E_0^2 = w_0^2 E_0^2$$

et est donc une constante.

c.



d.



$w(z)$ représente le rayon caractéristique du faisceau laser.

3. a. Les variations de $\underline{E}(r, z)$ avec r sont négligeables à l'échelle de la longueur d'onde si

$$\left| \frac{\delta \underline{E}}{\underline{E}} \right| = \frac{1}{|\underline{E}|} \left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial r} \right| \lambda \ll 1, \text{ soit : } \left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial r} \right| \ll \frac{|\underline{E}|}{\lambda} = k \frac{|\underline{E}|}{2\pi}$$

$$\text{De même } \left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial z} \right| \ll \frac{|\underline{E}|}{\lambda} = k \frac{|\underline{E}|}{2\pi}$$

b. $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$. On ne considère que les varia-

tions de \vec{E} dues au terme en $e^{i(kz-\omega t)}$, les variations d'amplitude étant négligeables devant elles :

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = ik E_x = i\omega B_y, \text{ soit :}$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{k}{\omega} \underline{E}(M, t) e^{i(kz-\omega t)} \vec{e}_y = \frac{1}{c} \underline{E}(M, t) e^{i(kz-\omega t)} \vec{e}_y$$

4. a. La valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit

$$\text{alors : } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^* = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\underline{E}(r, z)|^2 \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} J(r, z) &= \frac{\epsilon_0 c A^2(z)}{2} \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \\ &= \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \exp\left(-k \frac{r^2 z_0}{(z^2 + z_0^2)}\right) \end{aligned}$$

b. $R(z)$ est tel que $\frac{2R^2}{w^2(z)} = 2$, soit $R(z) = w(z)$.

Si $z \gg z_0$, $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \approx w_0 \frac{z}{z_0}$, et le faisceau a

la forme d'un cône de révolution de demi-angle au sommet β tel que

$$\tan \beta = \frac{w_0}{z_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} \text{ puisque } w_0 = \sqrt{\frac{z_0 \lambda}{\pi}}$$

Pour le laser YAG-Nd³⁺, $z_0 = w_0^2 \frac{\pi}{\lambda} = 0,74 \text{ m}$, et $\beta = 2,3'$ d'angle.

Pour le laser à CO₂, z_0 est dix fois plus petit, et l'angle β dix fois plus grand : $23'$ d'angle.

L'avantage du laser YAG-Nd³⁺, de plus faible longueur d'onde, est que la divergence du faisceau est faible, et que l'énergie qu'il transporte se trouve ainsi concentrée sur une surface petite sur une longueur de faisceau de plusieurs mètres.

10. a. L'élément de longueur dz de l'antenne contribue au potentiel vecteur proportionnellement à $I dz$.

On peut donc utiliser le raisonnement fait en cours, en remplaçant $\dot{p}(t)$ par $I(z, t) dz$, et en sommant ensuite

$$\text{sur la longueur de l'antenne : } d\dot{p}(t) = I(z, t) dz$$

b. $d\underline{\vec{E}}_p(M, t)$ varie en

$$e^{i\omega(t - \frac{PM}{c})} = e^{i\omega(t - \frac{OM}{c})} e^{i\omega(\frac{OM-PM}{c})}. \text{ Le déphasage entre les contributions au champ des éléments en } O \text{ et en } z \text{ est}$$

$$\text{donc : } \phi(z) = \frac{\omega}{c} (OM - PM) \sim \frac{\omega}{c} z \cos \theta$$

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \frac{i\omega I_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left(\int_{-L}^L f(z) e^{i\frac{\omega}{c} z \cos \theta} dz \right) e^{i\omega(t - \frac{r}{c})} \sin \theta \vec{e}_\theta$$

Cette onde se propage à la vitesse c le long du rayon vecteur, et a localement la structure d'une onde plane, mais son amplitude dépend de l'angle θ entre la direction de l'antenne et la direction d'observation.

2. a. L'antenne étant dans l'air, l'intensité du courant doit s'annuler à l'extrémité supérieure de l'antenne. L'origine est donc prise au milieu de l'antenne : $-L < z < L$, $f(z)$ s'annule aux deux extrémités de l'antenne.

b. Si $f(z) = \cos\left(\pi \frac{z}{2L}\right) = \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right)$,

$$\int_{-L}^L f(z) e^{i\frac{\omega}{c} z \cos\theta} dz = \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \left(e^{i\frac{\omega}{c} z} + e^{-i\frac{\omega}{c} z} \right) e^{i\frac{\omega}{c} z \cos\theta} dz$$

$$\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} e^{i\frac{\omega}{c} z} e^{i\frac{\omega}{c} z \cos\theta} dz = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 + \cos\theta)\right)}{\frac{\omega}{c}(1 + \cos\theta)} = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\frac{\omega}{c}(1 + \cos\theta)}$$

$$\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} e^{-i\frac{\omega}{c} z} e^{i\frac{\omega}{c} z \cos\theta} dz = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\frac{\omega}{c}(1 - \cos\theta)}$$

$$\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \left(\frac{e^{i\frac{\omega}{c} z} + e^{-i\frac{\omega}{c} z}}{2} \right) e^{i\frac{\omega}{c} z \cos\theta} dz = \frac{2c}{\omega} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\vec{E}(M, t) = \frac{i I_0}{2\pi\epsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{i\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)} \vec{e}_\theta,$$

de partie réelle :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{e}_\theta$$

c. Le champ rayonné à grande distance a localement la structure d'une onde plane :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}(M, t) = \frac{1}{c} \vec{e}_r \wedge \vec{E}(M, t)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 c \vec{E}^2(M, t) \vec{e}_r,$$

$$= \frac{I_0^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c r^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{e}_r,$$

e. La puissance totale rayonnée est le flux du vecteur de Poynting à travers une sphère de rayon r centrée en O :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \int_0^\pi \frac{I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} 2\pi \sin\theta d\theta \\ &= \frac{I_0^2}{4\pi \epsilon_0 c} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f. } A &= \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta = (0,95)^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \\ &= \frac{4}{3} (0,95)^2 = 1,20 \end{aligned}$$

$$\text{g. } \Re = \frac{A}{2\pi\epsilon_0 c} = 72 \Omega$$

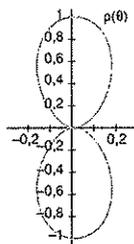
h. Le développement limité de $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)$ au voisinage

de $\theta = 0$ s'écrit : $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \approx \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right) \approx \pi \frac{\theta^2}{4}$.

La fonction tend donc vers 0 quand θ tend vers 0.

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) = 1$.

$$\rho(\theta) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$



Rappel de formules utiles

1 Expression des opérateurs différentiels dans différents systèmes de coordonnées

1.1. Coordonnées cartésiennes

On considère le champ de scalaires $U(x, y, z)$ et le champ de vecteurs $\vec{A}(x, y, z)$.

$$\cdot \vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\cdot \text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\cdot \vec{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

$$\cdot \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\cdot \vec{\Delta}\vec{A} = \Delta A_x\vec{e}_x + \Delta A_y\vec{e}_y + \Delta A_z\vec{e}_z, \text{ soit :}$$

$$\cdot \vec{\Delta}\vec{A} = \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right]\vec{e}_x + \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right]\vec{e}_y + \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right]\vec{e}_z$$

1.2. Coordonnées cylindriques

On considère le champ de scalaires $U(r, \theta, z)$ et le champ de vecteurs $\vec{A}(r, \theta, z)$.

$$\cdot \vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\cdot \text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\cdot \vec{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

$$\cdot \Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Ces formules sont systématiquement données dans les énoncés de problèmes.

1.3. Coordonnées sphériques

On considère le champ de scalaires $U(\rho, \theta, \varphi)$ et le champ de vecteurs $\vec{A}(\rho, \theta, \varphi)$.

$$\cdot \vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\cdot \text{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\rho^2 A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\cdot \vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho A_\varphi}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho A_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\cdot \Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2(\rho U)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

Ces formules sont systématiquement données dans les énoncés de problèmes.

2 Action des opérateurs sur des combinaisons de champs

On considère les champs de scalaires $U(\vec{r})$ et $V(\vec{r})$ et les champs de vecteurs $\vec{A}(\vec{r})$ et $\vec{B}(\vec{r})$.

$$\cdot \vec{\text{grad}}UV = U \vec{\text{grad}}V + V \vec{\text{grad}}U$$

$$\cdot \text{div} U \vec{A} = U \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\text{grad}}U$$

$$\cdot \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}$$

$$\cdot \vec{\text{rot}}(U \vec{A}) = U \vec{\text{rot}} \vec{A} + \vec{\text{grad}}U \wedge \vec{A}$$

$$\cdot \vec{\text{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{A} + \vec{A} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

$$\cdot \vec{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{B}$$

3 Exemples d'applications

3.1. Calcul du champ d'un moment magnétique \vec{M} à partir de son potentiel vecteur

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\text{rot}} \left(\vec{M} \wedge \frac{\vec{OM}}{OM^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\vec{M} \text{div} \frac{\vec{OM}}{OM^3} - (\vec{M} \cdot \vec{\text{grad}}) \frac{\vec{OM}}{OM^3} \right) \text{ puisque } \vec{M} \text{ est un vecteur constant.}$$

$$\text{De même, } \vec{\text{grad}} \left(\vec{M} \cdot \frac{\vec{OM}}{OM^3} \right) = (\vec{M} \cdot \vec{\text{grad}}) \frac{\vec{OM}}{OM^3} + \vec{M} \wedge \vec{\text{rot}} \frac{\vec{OM}}{OM^3}.$$

$\frac{\vec{OM}}{OM^3}$ est proportionnel au champ d'une charge élémentaire placée en O. Donc son rotationnel est partout nul, et sa divergence est nulle sauf en O.

$$\text{Donc } \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\text{rot}} \left(\vec{M} \wedge \frac{\vec{OM}}{OM^3} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\text{grad}} \left(\vec{M} \cdot \frac{\vec{OM}}{OM^3} \right).$$

Ce champ est donc formellement identique à celui d'un moment dipolaire électrique.

3.2. Application des opérateurs à quelques champs simples

$$\text{div} \vec{r} = 3 \quad \vec{\text{grad}} r = \vec{e}_r \quad \vec{\text{grad}}(r^\alpha) = \alpha r^{\alpha-1} \vec{e}_r,$$

Soit \vec{M} un vecteur fixe :

$$\vec{\text{grad}} \vec{M} \cdot \vec{r} = \vec{M} \quad \vec{\text{rot}}(\vec{M} \wedge \vec{r}) = 2\vec{M}$$

3.3. Action des opérateurs sur une onde plane en représentation complexe

Les opérateurs étant linéaires, leur action sur une onde décomposable en superposition d'ondes planes monochromatiques est la superposition de leur action sur chacune des composantes.

Si $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$, où \vec{k} peut être réel ou complexe.

$$\vec{\nabla} = -i\vec{k} \quad \text{div} \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}, \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = -i\vec{k} \wedge \vec{E} \quad \Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$$

4 Formules utiles à connaître

4.1. Double produit vectoriel

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

4.2. Expressions à reconnaître

- En coordonnées polaires sphériques : $\vec{\text{rot}} \frac{\vec{e}_r}{r^2} = 0$ et $\text{div} \left(\vec{M} \wedge \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) = \vec{0}$ partout, \vec{M} un vecteur fixe.
- En coordonnées polaires sphériques : $\Delta \frac{1}{r} = 0$, $\Delta(r \cos \theta) = 0$, $\Delta \frac{\cos \theta}{r^2} = 0$,
 $\Delta \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3} \right) = 0$, si r différent de 0.
- En coordonnées polaires cylindriques : $\Delta \ln \frac{r}{a} = 0$, $\Delta(r \cos \theta) = 0$, $\Delta \frac{\cos \theta}{r} = 0$, si r différent de 0.

$$\text{si } OM < a \quad \iiint_{\text{sphère de rayon } a} \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau_P = \frac{\vec{OM}}{3}, \quad \text{si } OM > a \quad \iiint_{\text{sphère de rayon } a} \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau_P = \frac{a^3 \vec{OM}}{3 OM^3}$$

4.3. Quelques intégrales rencontrées fréquemment

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^\infty a \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \tau a$$

4.4. Formules trigonométriques

Elles se déduisent simplement des expressions :

$$\bullet \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

$$\bullet \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \bullet \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\bullet \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad \bullet \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\bullet \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \bullet \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\bullet \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad \bullet \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

5 Utilisation de la notation complexe

5.1. Notation complexe

Lorsqu'une expression est une fonction sinusoïdale du temps ou de l'espace, on peut lui associer une expression complexe dont elle est la partie réelle.

Exemples

À $f(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, on associe $\underline{f}(t) = a e^{i\phi} e^{i\omega t} = \underline{a} e^{i\omega t}$ (notation en $e^{i\omega t}$) ou encore $\underline{f}(t) = a e^{-i\phi} e^{-i\omega t} = \underline{a} e^{-i\omega t}$ (notation en $e^{-i\omega t}$).

À $g(z) = a \cos(kz + \phi)$, on associe $\underline{g}(z) = a e^{i\phi} e^{ikz} = \underline{a} e^{ikz}$.

À $h(z, t) = a \cos \omega t \cos kz$, on associe $\underline{h}_1(z, t) = a e^{i\omega t} \cos kz$ ou $\underline{h}_2(z, t) = a e^{ikz} \cos \omega t$

$h(z, t) = a e^{i\omega t} e^{ikz}$ serait l'expression complexe de la fonction $a \cos(\omega t + kz)$.

On peut même généraliser avec des pulsations complexes :

$\underline{f}(t) = \underline{a} e^{i(\omega' + i\omega'')t}$ est l'expression complexe de la fonction $f(t) = a \cos(\omega' t + \phi) e^{-\omega'' t}$.

5.2. Utilisation de la notation complexe

Toutes les transformations **linéaires** (dérivations, opérateurs différentiels, intégrations, combinaisons linéaires) que doit subir la fonction réelle peuvent être effectuées sur l'expression complexe. Il suffit ensuite de prendre la partie réelle du résultat trouvé pour obtenir le résultat de ces transformations. C'est particulièrement adapté aux dérivations et aux intégrations : les équations différentielles linéaires se réduisent alors à de simples équations linéaires sur les amplitudes complexes.

Attention : le choix de la notation en $e^{i\omega t}$ ou $e^{-i\omega t}$ doit évidemment être le même dans tout le problème, et la dérivation donne alors un facteur multiplicatif $i\omega$ ou $-i\omega$. Cela est valable aussi pour des grandeurs ω complexes.

5.3. Produit de deux expressions

On ne doit jamais faire le produit des expressions en notation complexe, car la partie réelle d'un produit n'est pas le produit des parties réelles.

Cependant, si l'on ne s'intéresse qu'à la valeur moyenne au cours du temps (sur une période, ou sur un temps long devant la période) du produit, on peut utiliser les résultats suivants :

- si les deux pulsations ω_1 et ω_2 sont différentes : la valeur moyenne du produit sur un temps

long devant $\frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$ est toujours nul ;

- si les deux pulsations sont identiques : $\langle a(t)b(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(a\underline{b}^*)$. En particulier, si les deux expressions sont déphasées de $\frac{\pi}{2}$, la valeur moyenne du produit est nulle.

5.4. Notation complexe et construction de Fresnel

Résoudre une équation différentielle linéaire en cherchant une solution sinusoïdale se ramène à résoudre une équation linéaire pour l'amplitude complexe.

La construction de Fresnel consiste à la résoudre graphiquement dans le plan complexe.

Exemple

Pour résoudre en régime sinusoïdal forcé : $u + RC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} = E_0 \cos \omega t$,

on cherche une solution sous la forme $u \cos(\omega t + \phi)$. En notation complexe : $\underline{u} e^{i\omega t}$

$\underline{u}(1 + iRC\omega - LC\omega^2) = E$.

Graphiquement : une dérivation correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique, une intégration

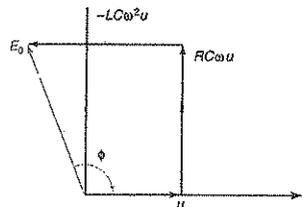
à une rotation de $-\frac{\pi}{2}$.

On lit directement : $u = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$,

$\tan \phi = \frac{-RC\omega}{1 - LC\omega^2}$, avec $\sin \phi < 0$, soit $-\pi < \phi < 0$, ce

qui correspond à l'analyse de la solution complexe écrite précédemment.

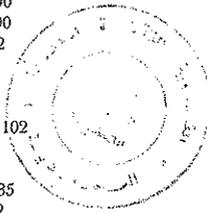
Remarque : la donnée de l'expression de la tangente et du signe du cosinus ou du sinus suffit à déterminer entièrement le déphasage.



Index

- A**
- Adaptation d'impédance 139
 - Ampèremètre à pince 158
 - Amplitude complexe 185
 - Analyseur 192
 - Angle solide 8
 - Antenne demi-onde 230
 - Antisymétrie 13
 - Appareil de Elihu Thomson 164
 - Approximation des régimes quasi-stationnaires 103
 - dipolaire 202
- B**
- Barrière de potentiel 47
 - Bétatron 157
 - Boltzmann (loi de) 45
 - Bornes homologues 138
 - Brasage par induction 147
- C**
- Cas
 - de Lorentz 139
 - de Neumann 135
 - Cavité résonante 224
 - Ceintures de Van Allen 79
 - Célérité 183
 - Champ
 - à divergence nulle 12
 - à rotationnel nul 11
 - disruptif 44
 - électromagnétique 97
 - électromagnétique dans le vide 185
 - électromoteur de Lorentz 140
 - géomagnétique terrestre 161
 - magnétique propre 136
 - tournant 152
 - Champ magnétique terrestre 73
 - Charges en mouvement lent 110
 - Charges et courants
 - « libres » 98
 - « liés » 98
 - de polarisation 99
 - Chute d'un aimant 165
 - Colloïde 45
 - Condensateur 31
 - armature externe 31
 - armature interne 31
 - capacité 32
 - condensateur de faible épaisseur 33
 - cylindrique 35, 44
 - diédrique 43
 - en régime sinusoïdal 117
 - groupement en parallèle 33
 - groupement en série 32
 - influence totale 31
 - sphérique 35
 - Condition de Wideroe 157
 - Conducteur
 - capacité d'un 31
 - caténaire 46
 - cavité vide de charges dans un 31
 - définition d'un 29
 - équilibre électrostatique d'un 30
 - influence sur un plan d'un 46
 - parfait 101
 - Constante de Hall 68
 - Construction de Fresnel 254
 - Conversion électromécanique 141
 - Convertisseur asynchrone 152
 - Corde de Dirac 84
 - Couche anti-reflet 223
 - Coulomb
 - loi de 28
 - théorème de 30
 - Courants de Foucault 143, 157
- D**
- D'Alembertien 103
 - Densité
 - linéique de charge 27
 - surfaccique de charge 27
 - volumique d'énergie électrostatique 33
 - volumique d'énergie magnétique 137
 - volumique de charge 27
 - Diagramme de rayonnement 231
 - Diamagnétisme 122
 - Diélectrique homogène, linéaire et isotrope (HLI) 100
 - Diffusion 215
 - par l'atmosphère terrestre 217
 - Rayleigh 205
 - Diode à vide 43
 - Dioptré 201
 - Discontinuité de \vec{E} 29
 - Dispersion 194
 - Divergence 10
 - Double aspect ondulatoire et corpusculaire 189
 - Durée de vie 189
 - Dynamo-disque homopolaire 161
- E**
- Écran électrostatique 49
 - Effet Cotton-Mouton 225
 - Effet de peau 104
 - Effet Hall 61, 68
 - quantique 69
 - Effet Zeeman 228
 - longitudinal 228
 - transversal 228
 - Énergie électromagnétique 105
 - électrostatique 33
 - magnétique 137
 - potentielle électrostatique 29
- E**
- Épaisseur de peau 105
 - Equation
 - d'onde 183
 - de conservation de la charge 57
 - de Maxwell 97
 - de Maxwell dans le vide 97
 - de Maxwell-Ampère 97
 - de Maxwell-Faraday 97
 - de Maxwell-Gauss 97
 - de Poisson 29
 - de propagation 183
 - locale de bilan 106
 - Expressions des opérateurs différentiels
 - coordonnées cartésiennes 250
 - coordonnées cylindriques 250
 - coordonnées sphériques 251
- F**
- Floculation 45
 - Flux conservatif 12
 - Force
 - contre-électromotrice 134
 - de Laplace 61
 - de Lorentz 59
 - électromotrice 133
 - électromotrice d'auto-induction 136
 - électromotrice d'induction mutuelle 136
 - Freinage électromagnétique 144
 - Fréquence 185
- G**
- Gauss (théorème de) 28
 - Générateurs électriques 141
 - Gradient 9
 - Guide
 - d'onde 198
 - monomode 199
- H**
- Harmoniques (solutions) 185
 - Haut-parleur électrodynamique 141
- I**
- Identité de Poynting 105
 - Impédance motionnelle 143, 146
 - Indicatrice 231
 - Inductance
 - mutuelle 136, 137
 - propre 136
 - Induction mutuelle 136
 - Intensité du courant 58
 - Interface entre deux diélectriques 101
 - Invariances 13
- J**

- Isolation galvanique 139
- Jauge 102
de Coulomb 102
de Lorentz 102
- Jonction P-N 46
- Laplacien
scalaire 10
vectoriel 11
- Lignes de champ 12
- Loi
de Biot et Savart 59
de Descartes 200
de Faraday 135, 140
de Lenz 135
de Malus 192
de Pouillet 134
- Longueur
d'onde 185
du train d'ondes 189
- M**
- Machine
électrostatique 44
tournante 141
- Maxwell-Gauss (équation de) 28
- Mésoscopique 27
- Métallisation des équipotentielles 42
- Milieux diélectriques 99
- Mode
de propagation 197
fondamental 199
transverse 197
- Modèle de Thomson 223
- Moment magnétique 62
- Monochromatiques (ondes) 185
- Moteur
continu à aimant inducteur 163
linéaire 162
- N**
- Nappes de courant 58
- Notation complexe 254
- Noyau ferromagnétique 138
- O**
- Onde 183
électromagnétique guidée 195
électromagnétique plane progressive 186
évanescence 208
guidée 197
guidée TE 198
non plane 197
plane 183
plane électromagnétique progressive harmonique 188
- plane électromagnétique stationnaire 187
plane progressive 184
sphérique 183, 185
stationnaire 184, 196
transverse 186
- Opérateur
 $\vec{B} \cdot \vec{\text{grad}}$ 11
différentiel 9
- Orientation de l'espace 7
- P**
- Paquet d'ondes 188, 207
- Période 185
- Pertes d-fer 143
- Photons 189
- Piège de Penning 39
- Plans
nodaux 196
ventraux 196
- Plasma 83, 192, 207
- Poisson (équation de) 29
- Polarisation
circulaire 190
d'un milieu 99
d'une onde 198
des ondes planes électromagnétiques harmoniques progressives 190
elliptique 190
rectiligne 190
- Polariseurs 192
- Potentiel
avancé 103
retardé 103
scalaire 12, 102
vecteur 102
- Pouvoir
des pointes 35
rotatoire 242
- Pression
de radiation 196
électrostatique 43
- Principe de Curie 13
- Propulseur électromagnétique 159
- Pseudo-vecteurs 13
- Puissance
contre-électromotrice 135
Joule 135
- Pulsation
cyclotron 40
de coupure 194, 197
plasma 193
temporelle 185
- R**
- Ralentisseur électromagnétique 162
- Rayon classique de l'électron 110, 111
- Rayonnement
d'une antenne 230
dipolaire 202
- Règle
des trois doigts de la main droite 7
- de tire-bouchon 7
- Relation
constitutive du milieu 99
de continuité 100
de dispersion 194
de passage 100
- Résistance
d'antenne 231
de Hall 69
du circuit 134
- Rotationnel 9
- Roue de Barlow 144
- S**
- Semi-conducteur dopé 46
- Sondes à effet Hall 72
- Sphère supraconductrice 66
- Stéradians 8
- Striction 83
- Surface
d'onde 183
fermée 8
ouverte 8
- Symétrie 13
sphérique 17
- T**
- Table à induction 160
- Temps d'émission 189
- TE_n 197
- Théorème
d'unicité 12
de Neumann 136
de Stokes 9
- Théorème de Green-Ostrogradsky 10
- Théorie dynamo 161
- TM_n 197
- Train d'ondes 188
- Transformateur
de courant 139
de tension 138
idéale 138
- Transverses électriques (ondes) 198
- Transverses magnétiques (ondes) 197
- Travail des forces de Laplace 146
- Trièdre direct 7
- V**
- Vecteur
axial 13
d'onde 185
de Poynting 107
de Poynting de l'onde plane progressive 189
- Nabla 11
- polaire 13
- Vitesse
de groupe 194, 207
de phase 207
- Vrais vecteurs 13



Proétudes.blogspot.com

PROÉTUDES

Surfer en toute confiance