

Jesus o Messias

Dado o sistema massa-mola. Usaremos a dinâmica de Newton $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ e o sistema de coordenadas Cartesiana. A figura 1 que representa as forças atuantes no corpo.

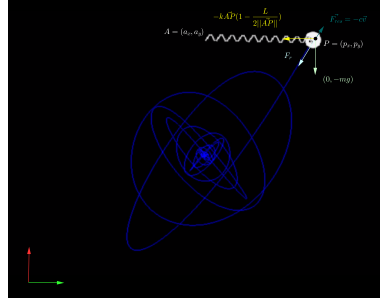


Figure 1: Sistema massa-mola

Teremos, após a decomposição das forças elástica e de dissipação, o seguinte sistema de equações diferenciais. Onde O ponto que a mola está fixo é o ponto $A = (a_x, a_y)$, o ponto $P = (x, y)$ é o ponto onde se encontra a massa $m = 10$, $g = 9.8$ é o valor da aceleração da gravidade, $k = 15$ é o valor da constante elástica e $c = 1$ é da força dissipativa.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{k}{m}(x - a_x) \left(1 - \frac{l}{2\|\vec{AP}\|}\right) - \frac{cv_x}{m_0} \\ \frac{dy}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g - \frac{k}{m}(y - a_y) \left(1 - \frac{l}{2\|\vec{AP}\|}\right) - \frac{cv_y}{m} \end{aligned}$$

Dados os valores iniciais t, x, v_x, y e v_y , e aplicando o método de Runge-Kutta ao passo $h = 0.05$ e com 10000 interações, temos a curva azul na figura 1 que destaca o caminho que fará a massa m .

Vamos deduzir as expressões acima com a dinâmica de lagrangiana. Aí perceberemos que os cálculos vetoriais não serão necessários. Para esse caso,

utilizaremos a expressão matemática para a energia potencial generalizada $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i$ e a função dissipativa de Rayleigh para o caso de uma partícula $\mathfrak{F} = \frac{1}{2}(c_x v_x^2 + c_y v_y^2 + c_z v_z^2)$ e fazendo $c = c_x = c_y = c_z$. Portanto, o $Q_i = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot{q}_i}$. Por considerar o ar um meio viscoso, fora usada a expressão de Rayleigh.

$$l = ||\vec{AP}|| = \sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2}$$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{m||\vec{v}||^2}{2} - mgy - \frac{k(l - \frac{L}{2})^2}{2} = \frac{m(\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2)}{2} - mgy - \frac{k(\sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2} - \frac{L}{2})^2}{2}$$

Para simplificar a notação usaremos $\frac{df}{dt} = \dot{f}$ e $\frac{d^2 f}{dt^2} = \ddot{f}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -k(x - a_x) \left(\frac{1}{2||\vec{AP}||} - l \right)$$

$$Q = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot{x}} = -c\dot{x}$$

O procedimento é o mesmo para o eixo y.

A expressão final para x fica:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - Q_x = m\ddot{x} + k(x - a_x) \left(l - \frac{1}{2||\vec{AP}||} \right) + c\dot{x} = 0$$

Ou seja

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - a_x) \left(l - \frac{1}{2||\vec{AP}||} \right) - \frac{c}{m}\dot{x}$$

A expressão final para y fica:

$$\ddot{y} = -g - \frac{k}{m}(y - a_y) \left(l - \frac{1}{2||\vec{AP}||} \right) - \frac{c}{m}\dot{y}$$

Referência: Para a análise vetorial

<https://sites.ufpe.br/wp-content/uploads/sites/6/2019/01/Eletromagnetismo-1-Capitulo-1.pdf>

Referência: Dinâmica de Lagrange

https://villate.org/dinamica/mecanica_lagrangiana.html

Referência: Método de Runge-Kutta

<https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2015/MS211/Aula14.pdf>

Referência: Material excelente sobre mecânica clássica
http://fisica.ufpr.br/kleber/cap_1.pdf

Glórias ao grande Deus!