1

Sur l'utilité des mathématiques pour la philosophie

Marco Rigoli — Albino Attilio Lanciani

Dans un article corrosif intitulé *L'influence néfaste des mathématiques sur la philosophie* [1], le mathématicien-philosophe Gian-Carlo Rota s'en prend au manque de courage des soi-disant « philosophes » qui se laissent influencer par une compréhension souvent extrêmement limitée des argumentations mathématiques pour en importer les manières de raisonner, ou plus modestement ce qu'ils en comprennent, afin de donner à la philosophie un semblant de rigueur. Le résultat est assez déconcertant, surtout pour ce qui concerne la cible principale de la polémique de G.-C. Rota : la philosophie analytique. L'approche des partisans de cette école est littéralement désintégrée et la condamnation de leur effort est sans appel :

> Comme des autruches qui se mettent la tête dans le sable, ils auront le même destin que ceux qui se refusent à apprendre les leçons du passé et à faire face à notre présent difficile. Leur destin consiste dans la futilité croissante, dûment suivie par l'extinction. [2]

Avec un tel résultat, il est évident que les philosophes doivent chercher de nouveaux chemins, de nouvelles suggestions pour déterminer quelque chose qui ressemble à un concept de rigueur utilisable en philosophie. Ils devront chercher, pour le moins, des moyens qui permettront à cette discipline millénaire de dire un mot aussi à notre époque. Une époque où, et tel est le noyau de la question, les sciences semblent atteindre le sommet de leur importance

1. G.-C. Rota, « L'influence néfaste des mathématiques sur la philosophie », in *Phénoménologie discrète. Ecrits sur les mathématiques, la science et le langage*, Mémoires des Annales de Phénoménologie, Beauvais, 2006 ; p. 35 – 47.
2. *Ibidem*, p. 47.

historique[3], en se multipliant dans une suite kaléidoscopique de possibilités expressives jusqu'à maintenant presque inconnues. D'autre part les mathématiques et la philosophie sont deux formes de savoir très anciennes, au fond la tradition grecque – philosophie, géométrie et musique – marque le début de ce qu'on considère la tradition culturelle occidentale. Précisément pour cela, même si G.-C. Rota semble nous suggérer que la tentative d'importer un critère de vérité ou de rigueur des mathématiques vers la philosophie est probablement vouée à l'échec, il vaut la peine de faire un effort pour sauver ce rapport dans l'espérance aussi qu'il arrive à nous éclairer quelques éléments aussi bien dans la philosophie que dans les mathématiques. Nous croyons que pour cela il y a plusieurs possibilités, mais, dans ce qui suit, nous voudrions en sonder seulement une. Il s'agit, du moins pour nous, d'une des possibilités plus productives suivant laquelle la philosophie peut utiliser les suggestions lui provenant des mathématiques en vue d'éclairer quelques-uns de ses thèmes fondamentaux. Mais il faut éviter les pièges qui nous ont été indiqués précédemment par G.-C. Rota. Il ne s'agit d'aucune manière d'importer les méthodes des mathématiques, au contraire il s'agit d'articuler une convergence d'intentions qui se fonde sur quelques thèses :

1. La philosophie dans l'un de ses moments capitaux est, et dans sa compréhension la plus partagée, la tentative d'enquêter les fondements de la connaissance rationnelle. Cela pose immédiatement le problème d'indiquer quels sont les critères de la rationalité et de la connaissance et, par la suite, de saisir d'où ces critères sont tirés ou abstraits, etc.
2. Les mathématiques sont, à certains égards, l'exploration de la rationalité conduite à partir d'un point de vue purement idéal. La connaissance donnée par les mathématiques, malgré le doute restant sur ce qu'elle concerne strictement, est pourvue d'une rigueur, d'une certitude intrinsèque – garantie par l'univocité de la langue et par l'indication des conditions de départ – qui ne sont partagées par aucune autre discipline parmi celles qu'on connaît jusqu'à présent.
3. Il s'ensuit, et celle-là est la possibilité que nous entendons explorer, que certaines théories de la connaissance de source philosophique pourraient être « testées » par l'exploration de la rationalité – ou d'une de ses interprétations – typique de l'activité créative du mathématicien. En ce sens les mathématiques seraient une sorte de garde-fou qui sauvegarderait le philosophe du risque de se pencher trop sur l'abîme des « théories évidentes », celles qui semblent « aller de soi » et dont la simple remise en doute paraîtrait une perte de temps.

Il est évident que par là nous n'aurions qu'une contribution « protectrice » de la part des mathématiques. Un pas de plus, strictement philosophique,

3. Il y aurait beaucoup à discuter sur cela. En effet une affirmation de ce type semble impliquer la nécessité qu'à la science soit relié aussi le progrès technologique.

serait d'ailleurs déjà dans la constatation que si la contribution mathématique permettait de douter fortement d'une thèse philosophique, on pourrait penser que déjà la « technique de mise en doute » pourrait suggérer une nouvelle méthode ou, au moins, une stratégie philosophiquement significative pour enquêter une suite de problèmes. Cela n'empêche pas que la collaboration, la « communauté d'intentions » entre les mathématiques et la philosophie puissent créer des nouvelles *variations sur le thème* de la tentative de comprendre l'effort de connaissance. A contrecœur, nous sommes obligés de laisser ces évolutions possibles à la suite de ce travail, pour le moment limitons-nous à cette question première : comment la philosophie peut utiliser les mathématiques ?

1. LA SITUATION DRAMATIQUE

Généralement, dès qu'on avance des thèses sur ce qu'est la connaissance, on tend à distinguer plusieurs articulations possibles de ce phénomène. On peut laisser immédiatement de côté ce qui est considéré comme le moment le plus faible : les sens ou les perceptions nous donnent des connaissances fort douteuses. Cela va de pair avec une forme de partialité et d'insécurité qui ne nous permettent pas de les prendre comme des guides sûrs. Tout ce qui concerne une forme empiriste de la connaissance – par ce terme nous entendons, de manière un peu grossière, toute forme de pensée s'appuyant tôt ou tard sur les sens pour justifier la connaissance – tombe sous le poids d'une considération capitale : une forme de petitesse conceptuelle due au fait que les sens sont douteux *en principe*. Nous nous sommes trompés une fois, fût-ce une seule fois, et il s'ensuit que nous n'avons aucune certitude que nous ne nous tromperons encore.

Cela nous conduit à réfléchir sur les caractères que nous souhaitons pour une connaissance véritable et indubitable. En principe il y a une seule chose que la tradition nous porte à considérer comme sûre : ce qui est obtenu dans les mathématiques et qui constitue la dernière ligne d'une démonstration. Les « longues chaînes de déductions » se caractérisent comme des îlots, disséminés par-ci par-là, où le soleil brille toujours dans la mer souvent en tempête du doute. Toutefois, quoi qu'on en dise, les « longues chaînes de déductions » parlent à la tête et peut-être même pas complètement à celle-ci [4]. Qu'on l'énonce ou non, il y a un autre caractère qu'on voudrait appartenir à toute connaissance certaine : que, de quelque manière, elle soit donnée d'un « seul coup » dans une forme de prégnance intuitive, qui s'impose avec la force d'une *évidence*. Au fond, une « longue chaîne de déductions » demeure sté-

4. Nous n'entendons pas dire que la connaissance doive également parler aux « tripes ». Cependant les « longues chaînes de déductions », et cela est souligné par les mathématiciens eux-mêmes, laissent souvent un peu froids.

rile, à un certain niveau de pensée, si elle est dépourvue d'intuitivité et d'évidence qui semblent devoir couronner, comme moment final, le chemin de la connaissance. L'idée de base est que, si on arrivait à garder ensemble, dans un seul vécu de conscience, le chemin complet qui nous conduit à une démonstration ou à un résultat, nous aurions en quelque sorte comblé l'aspiration principale toujours présente dès qu'on tente de conquérir une connaissance : une vérité s'imposant en vertu de sa complétude et de son autosuffisance.

Les problèmes sont clairement situés dans le fait qu'il semble que les deux chemins – celui des « longues chaînes de déductions » et celui de l'intuition – soient essentiellement différents. Mis à part quelques résultats particulièrement bienveillants – c'est un hasard, mais souvent les résultats bienveillants sont les plus productifs aussi – on est toujours sur une sorte de créneau : au sommet il y a la vérité et des deux côtés, désespérément attirés par elle, il y a la chaîne déductive et l'effort d'obtenir d'un « seul coup » la plénitude de l'*évidence intuitive*. L'activité philosophique, surtout au vingtième siècle, a analysé en profondeur ces questions avec des résultats très différents. Mais notre problème ne réside pas dans l'acte de donner une clé de lecture qui soit préférable par rapport à une autre ; notre but est de voir pourquoi et comment le philosophe peut utiliser les mathématiques pour éliminer quelques problèmes ou pour apprendre à mieux les poser.

2. La compréhension naïve de l'évidence (I). Le raisonnement de Brouwer

Dans chaque milieu, en ce sens les mathématiques n'échappent pas à la règle, nous avons des convictions sur ce qui est acceptable et sur ce qui ne l'est pas. Nous sommes souvent amenés à définir comme *évidentes* ces « valeurs indiscutables ». Un premier problème que nous ne traiterons que très peu concerne l'identification de la source de cette « prétention à l'évidence ». Nous le traiterons en survol parce que, pour l'instant, il n'est pas important de le traiter en profondeur : qu'il s'agisse d'une *question historique*, d'une *mode* ou d'un véritable *a priori* peut être laissé en marge de ce travail. En fait, pour y répondre, nous serions obligés de parcourir un long chemin où les possibilités des mathématiques devraient être sondées attentivement. Il est néanmoins vrai que la philosophie, pour s'installer de manière accomplie, devrait y répondre parce que l'élimination des préjugés devrait en définir la phase préparatoire, mais le pari qu'on a décidé de jouer est différent : nous pensons aussi que dans cette élimination de préjugés les mathématiques peuvent aider la philosophie. Evitons toutefois l'erreur fondamentale : nous n'entendons aucunement soutenir que les mathématiques soient dépourvues de préjugés, ce qui nous intéresse dans ces disciplines est le fait qu'elles ont une habileté particulière de « courir sur le fil » d'un concept, de *le tendre*, de *l'étirer* jusqu'au point de rupture.

Demandons un premier acte de foi au lecteur, mais, d'autre part, comme nous le savons et comme toujours, un exemple vaut mieux que mille mots et nous pouvons en venir à l'analyse de notre première situation dramatique.

Selon cette ligne directrice visant à la « tension de concepts », les mathématiques nous montrent, surtout quand nous nous approchons de l'infini – en admettant que le verbe « s'approcher » ait, pour le moins, une signification allégorique – ces « valeurs indiscutables » deviennent beaucoup plus volatiles que ce à quoi il semblait légitime de s'attendre.

Considérons le nombre réel π. En 1761 Lambert en a démontré le caractère irrationnel[5]. Puisque π est irrationnel, il n'y a aucune périodicité dans son développement décimal (π=3,1415926...). Cela veut dire qu'il n'y a pas de groupes de chiffres qui se répètent périodiquement à la droite de la virgule. Signalons que cela est le contenu d'un théorème précis, mais le point crucial est que nous ne disposons aucunement d'un algorithme capable de nous donner toutes les valeurs du développement de π « en acte ». D'autre part, et cela est bien connu, nous disposons de plusieurs algorithmes capables de nous faire progresser dans le développement décimal de π pour autant que nous le voulons. Plusieurs, parmi eux, sont reliés à la possibilité de détermination par le biais d'une série opportunément choisie. Historiquement, entre les plus connues, il y a la série de Leibniz pour laquelle :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1},$$

par la suite, on arrive à l'identité récente de Bailey, Borwein et Plouffe du 1996 donnée par :

$$\pi = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^i \left\{ \frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right\}$$

qui possède, sans rentrer dans des détails plus compliqués, des propriétés très utiles pour calculer le développement décimal de π. Toutefois, même si nous disposons de plusieurs algorithmes pour déterminer les chiffres de π, cela n'est possible que pas à pas. C'est-à-dire que nous n'avons jamais « tout » π. Par exemple, même si nous disposons de milliards de milliers de chiffres de π, nous ne savons pas (encore) si dans le développement apparaîtra tôt ou tard une suite de chiffres consécutifs tous affichant la valeur 0 et cela est déjà assez étrange : nous avons une suite de manières pour construire π, mais nous ne savons rien de comment ce développement évoluera, nous ne savons rien de ce qui se passera au-delà de ce qu'on calcule effectivement. Mais on peut faire

5. J.H. Lambert, « Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques [1768] ». On peut le repérer in L. Berggren, J.M. Borwein, P. Borwein, *Pi. A Source Book*, Springer Verlag, New York, 2004^3 ; p. 129 – 140.

plus, et c'est ce que L.E.J. Brouwer fait en construisant un nouveau nombre réel $\hat{\pi}$ de la manière suivante :

1. La partie entière de $\hat{\pi}$ est 3.
2. Pour la partie décimale, nous poursuivons ainsi : lorsque nous rencontrons éventuellement la première suite de cent 0 après un certain nombre de chiffres n, nous nous comporterons de manière différente si n est pair ou bien impair.
   — Si n est pair on diminuera le chiffre r placé à à gauche de n (donc à la position $n - 1$) de la valeur 1. Enfin, nous remplacerons r par $r - 1$.
   — Si n est impair, on prendra le premier chiffre qui succède (c'est-à-dire le premier 0 de la suite des cent 0) et on l'augmentera d'une unité et donc à la place du premier 0 de la suite on aura 1.
3. S'il n'y a aucune suite de cent 0, alors on établira $\pi = \hat{\pi}$.

Maintenant on définit $D = \pi - \hat{\pi}$. Nous disposons d'une opération parfaitement définie, et en particulier si n existe et s'il est pair, alors $D > 0$; si n existe et s'il est impair, alors $D < 0$; si n n'existe pas, alors $D = 0$. Le seul petit problème qui nous reste est que même si tout est bien défini, nous n'avons aucune manière pour décider, pour l'instant, entre les trois possibilités qui semblent s'exclure mutuellement. Si nous restons à l'intérieur de la tradition mathématique, de ce qui a été nommé le débat sur les fondements des mathématiques, on n'a pas tellement d'alternatives : une pensée classique s'appuyant sur la tradition logique nous dirait que même si nous ne le savons pas, une et une seule des trois possibilités est réelle. Et cela parce que le principe de trichotomie reste valide de toute façon. Enfin, si nous nous référons à la valeur de D, nous pouvons transformer tout le travail qu'on vient de faire, en deux jugements parfaitement clairs :

(**P**) dans la succession du développement décimal de π, IL Y A une suite de cent zéros consécutifs.
($\neg$**P**) dans la succession du développement décimal de π, IL N'Y A PAS une suite de cent zéros consécutifs.

Or, en vertu du principe du tiers exclu, étant donnés les deux jugements étant l'un la négation de l'autre, l'un sera nécessairement vrai et l'autre nécessairement faux. Un mathématicien constructiviste (par exemple un intuitioniste comme L.E.J. Brouwer) dirait que ce qu'on vient de présenter est un exemple clair du fait que le principe du tiers exclu n'est pas toujours applicable. Nous ne pouvons pas l'appliquer en cette situation, car, pour ce faire, on aurait besoin de la « totalité » du développement de π qui donc devrait être donné comme un infini actuel, tandis que ce dont nous disposons concrètement – et qui donc concrètement *existe* – est seulement et « pour toujours », une partie finie d'un tel développement.

Cet exemple nous pose une suite de problèmes qui, en voulant revenir à notre thème philosophique de départ, peuvent être réduits à une seule question : comment choisir entre une possibilité et l'autre ?

Pour nous cette question concerne un point de vue sur la manière dont nous pensons développer notre travail : il s'agit d'un choix philosophique du mathématicien dans sa pratique. Il est évident que la philosophie aurait plusieurs choses à dire sur ce choix, non au sens *prescriptif* – ce serait tout simplement absurde que le philosophe apprenne au mathématicien comment faire des mathématiques – mais plutôt pour indiquer ce que dans un choix ou un autre reste implicite. Cela parce que – et telle est l'une de nos thèses – ce qui reste implicite ou « banal » risque de cacher exactement les points qu'une théorie de la connaissance sérieuse devrait élucider. Ce projet est cependant prématuré. Pourquoi ?

Le problème principal peut déjà être saisi sur la base de ce qu'on vient de présenter comme l'élaboration d'une théorie de la connaissance : nous avons découvert que, lorsqu'on dépasse les limites du fini, ce qui semblait certain devient de moins en moins clair. Dans des termes un peu plus spécifiques, la discussion sur le tiers exclu et sur le sens de l'infini actuel ont traversé les premiers quarante ans du siècle passé, mais, d'un point de vue strictement philosophique, ce qui est essentiel apparaît d'une certaine manière caché par ce débat : on est interrogé sur le droit que nous avons de considérer comme un ensemble une *totalité* qui, proprement, est donnée seulement comme *projet*. Le problème est dans le fait que, en soi, le concept d'ensemble semble banal et pratiquement trivial. Le concept d'ensemble est une des bases de la connaissance, nous réunissons des objets pour former des agrégats qui ont des statuts propres et le concept d'ensemble – mathématique ou non qu'il soit – est une abstraction réalisée à partir de cette constatation. De fait, à partir de cette abstraction qui semble aller de soi, nous construisons tout le reste. Le problème a été toutefois quelque peu contourné, en fait il reste dans toute sa prégnance : un ensemble qui non seulement n'est pas donné maintenant, mais qui surtout ne peut pas être donné en exhibant tous les objets qui le composent, est-il encore un ensemble ?

Si nous avons trois feuilles sur la table, nous sommes capables d'avoir une intuition des trois objets comme d'un nouvel objet idéal, il s'agit justement d'une *idéation* qui unifie les individus différents. Ce nouvel objet idéal « ensemble » est *évident*, il se donne en lui-même. Mais comment est-il possible que quelque chose d'évident devienne obscur tout simplement par itération ?

La première chose qu'on peut observer est que, sur la base de ce qu'on vient de dire, l'évidence n'est pas nécessairement héréditaire. Lorsqu'on passe du fini à l'infini actuel du développement complet de π, les certitudes reliées à la possibilité de le rendre un objet passible d'intuition se dissolvent. Cela ne dit pas, il faut y faire attention, que nous n'avons pas une intuition et donc une évidence conséquente de π, mais seulement que si cette évidence existe elle ne peut pas être recherchée dans la caractérisation du développement purement numérique de cet objet mathématique. Cela précisément parce que le développement numérique complet de π ne sera *jamais* donné.

3. La compréhension naïve de l'évidence (II). Les fonctions de Ramsey

On pourrait tenter d'épargner des énergies intellectuelles par rapport au problème précédent en utilisant *a minima* le fait que l'entrée sur scène de l'infini actuel crée effectivement une suite de difficultés. Exactement en épargnant de l'énergie, nous pourrions décharger sur ce dernier toute responsabilité. On pourrait alors simplement affirmer que toute difficulté est conséquente à l'apparition de l'infini et qu'il suffirait d'introduire une exception qui le concerne afin que le moment conservatif des thèses précédentes soit préservé. Il est vrai que l'introduction d'une exception est de toute façon désagréable, mais il semble que l'infini soit quand même un thème pour lequel une « entorse au règlement » est tolérable.

Par ailleurs, ce choix « prudent » n'est pas satisfaisant et, pour en éclairer les raisons, commençons par l'introduction des éléments de base de ce qu'on connaît sous le titre de *théorèmes de Ramsey*. En réalité, il faut partir du *principe de Dirichlet* ou *principe des tiroirs*, qu'on appelle habituellement, dans le monde anglo-saxon, le « principe du pigeonnier (*pigeonhole principle*) ». Par ce principe, nous exprimons de manière complètement triviale une banalité :

[*Principe du pigeonnier*]. En distribuant $n+1$ pigeons dans n cases, il y aura au moins une case occupée par, au moins, 2 pigeons.

Une caractéristique des mathématiques est que souvent des conséquences déduites à partir de banalités absolues ne sont pas, à leur tour, également banales, et que, au contraire, elles peuvent conduire à des découvertes complètement inattendues. Considérons, par exemple, un *domaine d'intégrité* D. Souvenons-nous que ce dernier est un anneau commutatif présentant, pour le moins, deux éléments distincts le 0 et l'unité 1 et qu'il ne possède pas de diviseurs du 0 [6].

En utilisant le principe de Dirichlet, nous pouvons prouver que tout champ d'intégrité fini est un corps – et il s'agit d'un premier résultat qui n'est pas tellement banal – c'est-à-dire que chacun de ses éléments non nuls a un inverse. Nous ne rentrons pas dans la formalisation précise car il nous suffit de donner le schéma argumentatif qu'il faut suivre : soit n le nombre des éléments de D et soient a_i avec $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ les éléments non nuls de D. Fixé un a_j entre les précédents, $a_j \cdot a_1$, $a_j \cdot a_2$, $a_j \cdot a_{n-1}$, il s'ensuit pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ qu'il s'agit d'éléments distincts car

6. Sans diviseurs du 0 veut dire que donnés $a, b \in D$, si $a \cdot b = 0$, alors ou bien $a = 0$, ou bien $b = 0$. Cette affirmation est équivalente aux ainsi-dites lois d'élimination, c'est-à-dire que si $a \cdot b = a \cdot c$, et $a \neq 0$, alors $b = c$.

valent les lois d'élimination et, pour le moins, un parmi eux coïncidera avec 1. Par exemple, on aura $a_j a_4 = 1$. Cela montre que a_j est l'inverse de a_4. Il est évident que le schéma devrait être répété, mais cela n'est pas important pour l'instant tout en nous donnant une idée complète du processus à suivre.

Il est important de comprendre comment on peut passer du principe de Dirichlet à des résultats définis de « type Ramsey ». Pour ce faire prenons une version un peu plus articulée, du moins à première vue, du principe de Dirichlet : si nous plaçons $s + t - 1$ pigeons en deux cases, il s'ensuit que, ou bien l'une des deux cases contient au moins s pigeons, ou bien l'autre case en contient au moins t. Jusqu'à présent rien d'exceptionnel, mais effectuons une nouvelle *variation sur le thème* : soit I_n un ensemble avec exactement n éléments : par exemple nous pouvons penser $I_n = \{1, 2, 3 \ldots, n\}$. Introduisons maintenant une nouvelle idée en définissant une 2-coloration de I_n l'application :

$$\chi : I_n \to \{0, 1\}$$

Pour $x \in I_n$, $\chi(x)$ sera nommée la couleur de x. Il est clair que x peut avoir une seule des deux valeurs et nous pouvons imaginer de fixer pour x une couleur précise, par exemple ou bien bleu ou bien vert. C'est-à-dire que $\chi(x)$ sera ou bien bleu ou bien vert. Nous nommerons alors un sous-ensemble J de I_n monochromatique si tous ses éléments auront la même couleur.

La relation de partition $n \to (s, t)^1$ signifie alors que pour une quelconque 2-coloration χ de I_n, ou bien il existe un sous-ensemble monochromatique S de I_n avec s éléments par exemple de couleur bleu (vert), ou bien il existe un sous-ensemble monochromatique T de I_n avec t éléments de couleur vert (bleu). La variation sur le principe de Dirichlet originaire peut être ainsi exprimée :

$$s + t - 1 \to (t, s)^1$$

On peut généraliser cette considération de la manière suivante. Soit :

$$I_n^{(2)} = \{Y \subset I_n : |Y| = 2\}$$

où par $|Y|$ nous indiquons la cardinalité de Y, c'est-à-dire le nombre de ses éléments. C'est-à-dire que $I_n^{(2)}$ est l'ensemble des paires (non ordonnées) d'éléments distincts entre eux de I_n. Une 2-coloration χ de $I_n^{(2)}$ est alors une application :

$$\chi : I_n^{(2)} \to \{0, 1\}$$

Notre relation de partition :

$$n \to (t, s)^2$$

signifie que pour une 2-coloration quelconque χ de $I_n^{(2)}$, ou bien il y a un sous-ensemble S de I_n avec $|S| = s$ et $S^{(2)}$ monochromatique – par exemple bleu (vert) – ou bien il y a un sous-ensemble T de I_n avec $|T| = t$ et $T^{(2)}$ monochromatique vert (bleu).

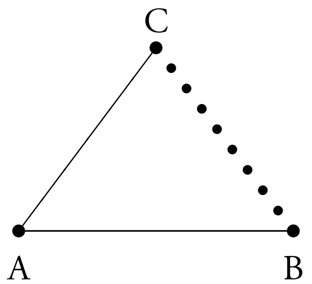
Même ici rien de transcendantal, mais modifions encore un peu la situation et supposons, par exemple, qu'il y ait six personnes dans une salle d'attente et qu'à ce nouvel objet d'analyse, qui évidemment deviendra $I_6^{(2)}$, soit assigné une certaine 2-coloration :

$$\chi : I_6^{(2)} \to \{0, 1\}$$

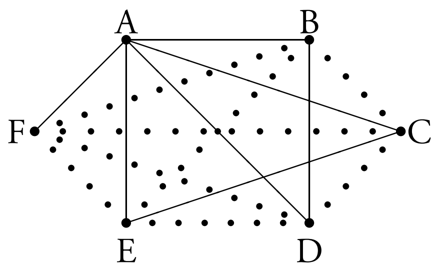
où, cette fois, $\chi(Y) = 0$ signifie que les deux personnes constituant Y ne se connaissent pas, tandis que $\chi(Z) = 1$ signifie que les deux personnes constituant Z se connaissent. Alors la validité de $6 \to (3,3)^2$ correspond à un problème P que l'on peut articuler en deux possibilités :

1. Ou trois des six personnes se connaissent réciproquement entre elles.
2. Ou trois parmi elles ne se connaissent pas réciproquement.

Ces affirmations sont intéressantes car elles nous reconduisent à la question de l'évidence. En ce sens, avant tout, transformons nos six personnes en points dans l'espace. Il est évident que la représentation des rapports de connaissance par les segments reliant les points rend très claire la relation elle-même. L'on peut utiliser un segment normal pour indiquer la connaissance entre deux individus et un segment pointillé pour indiquer la non connaissance réciproque. Pour nous expliquer :



Dans ce cas, A connaît B et vice-versa, B ne connaît pas C et vice-versa et A connaît C et vice-versa. Une configuration possible représentant le groupe complet des six personnes et leurs rapports de connaissance éventuelle pourrait être ainsi établie :



Quelques observations sont rendues particulièrement claires par le dessin :

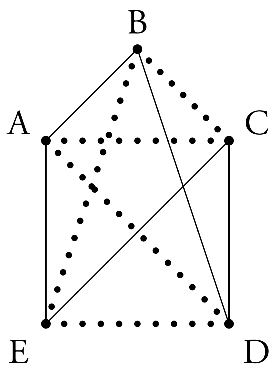
1. On retrouve dans ce cas le point 1 de l'énumération précédente au sujet de P. C'est-à-dire qu'« au moins trois personnes se connaissent entre elles » et cela est bien mis en évidence, par exemple, par le triangle $\overset{\triangle}{AEC}$.
2. Inversement, on peut remarquer qu'on vérifie également le point 2, si l'on retrouve un triangle avec les trois côtés pointillés. C'est le cas pour $\overset{\triangle}{FED}$ et $\overset{\triangle}{BFC}$.

Cette schématisation ajoute quoi à la précédente ? Une chose très simple : la situation des relations de connaissance ou de non-connaissance peut être « complètement décrite » par le dessin en question. D'où vient cette certitude ?

Du fait que de chaque point matériel partent exactement cinq segments – qu'ils soient pointillés ou non peu importe – qui atteignent chacun des autres cinq points. Par le biais de l'abstraction qui nous conduit à symboliser chaque individu par un point et la relation entre individus (ou la non relation) par des segments, nous pouvons affirmer qu'on a épuisé toute combinaison possible. Cela concerne un nouveau niveau de compréhension qui s'impose exactement en vertu de sa propre *évidence*. Le saut consiste dans le fait que nous avons épuisé toute combinaison par le biais d'une schématisation géométrique, mais le caractère essentiel de ce passage peut être mieux compris par l'analyse des possibilités effectives qu'il nous offre.

Pour un n générique, nous ne pouvons rien affirmer qui soit certain *a priori*, précisément parce que nous ne connaissons pas *a priori* une limite supérieure finie concernant le nombre de configurations possibles qu'il faut analyser. Il faut chercher un chemin différent.

On voit immédiatement que $5 \to (3,3)^2$ est faux, comme le démontre, toujours en conservant l'évidence de l'image, le dessin suivant :



Mais maintenant, comment pouvons-nous passer des situations qu'on vient de caractériser à des situations plus générales ?

Procédons avec ordre : généralement, si $n \rightarrow (s,t)^2$ est fausse, nous utiliserons la notation $n \nrightarrow (s,t)^2$, en réservant la notation $n \rightarrow (s,t)^2$ à la situation où elle est vraie. Il faut remarquer que si $n \rightarrow (s,t)^2$, alors pour tout $m \geq n$, $m \rightarrow (s,t)^2$. Il fait donc sens de se demander pour $s \geq 2$, $t \geq 2$[7], pour quel n, $n \rightarrow (s,t)^2$. La réponse est donnée par la résultat suivant de Ramsey[8] :

THÉORÈME. Donnés $s \geq 2$, $t \geq 2$, il y a toujours n suffisamment grand pour lequel $n \rightarrow (s,t)^2$.

Maintenant nous pouvons définir la fonction de Ramsey $\mathcal{R} : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, en fixant :

$$\mathcal{R}(s,t) = \min \quad \{n \in \mathbb{N} : n \rightarrow (s,t)^2\}$$

On voit aisément que $\mathcal{R}(1,t) = \mathcal{R}(s,1) = 1$. De surcroît, à partir des considérations précédentes, il est facile de démontrer que :

$$\mathcal{R}(3,3) = 6$$

En revanche, précisément à partir de ce moment, apparaissent les problèmes. En fait, même si ce n'est pas difficile d'implémenter des algorithmes pour calculer $\mathcal{R}(s,t)$, le temps nécessaire pour le calcul, à l'aide des ordinateurs les plus puissants, excède toute estime plausible. Et c'est un fait que, à présent, nous ne disposons que de très peu d'estimes, entre lesquelles :

$$\mathcal{R}(4,4) \leq 18 \quad \text{e} \quad 43 \leq \mathcal{R}(5,5) \leq 49$$

4. POUR UNE THÉORIE PHILOSOPHIQUE DE L'ÉVIDENCE

Les exemples qu'on vient de donner nous permettent de voir ce que, au début de ce travail, nous avons caractérisé comme l'une des manifestations les plus intéressantes de l'utilité des mathématiques pour la philosophie : la capacité de *tendre les concepts* jusque, presque, à leur point de rupture. Le problème est alors élémentaire : que pouvons-nous faire ?

Si nous nous contentons des réponses qui semblent émerger jusqu'à présent et nous nous arrêtons à la constatation que l'intuition et l'évidence sont tout au plus des caractéristiques épisodiques qui n'ont rien à voir, en réalité, avec la connaissance, nous nous trouvons exactement au point que G.-C. Rota condamnait où la philosophie déclare sa banqueroute en s'affaissant tranquillement sur les positions des mathématiques. Cela n'est rien d'autre,

7. Pour n ou $t = 1$, la résolution est triviale.

8. Pour une généralisation du résultat et un agrandissement significatif de la théorie, on peut utiliser R.L. Graham, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, *Ramsey Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1980.

justement, que l'acte de déléguer à ces dernières son propre rôle, pour le moins idéal. Nous pensons au contraire que c'est précisément à ce moment que la philosophie doit intervenir en tentant d'articuler de manière nouvelle et créatrice les concepts autant tendus par la pression exercée par les mathématiques. Pour ce faire, nous devons tout d'abord résumer ce qu'on vient de faire effectivement :

1. L'exemple de Brouwer nous a montré que nous ne sommes pas capables de répondre à une question simple sur le développement de π. Ce qui semblait trivial dans le développement réglé d'un algorithme (ou de plusieurs) laisse sa place à des doutes. Somme toute, si π est tellement évident, comment est-il possible que nous ne savons pas répondre à la question élémentaire que nous avons posée ?
2. La réflexion sur les fonctions de type Ramsey est, à certains égards, encore plus déroutante : ici nous avons la démonstration de la validité d'un théorème, nous avons aussi des algorithmes pour le calcul des valeurs effectives, mais ce même calcul est – si ce n'est que pour quelques exemples élémentaires – tellement long que nous ne savons pas déterminer la valeur de la résolution. Où se sont perdues, dans ce cas, les possibilités d'intuition et d'évidence que l'exemple des six personnes dans une salle d'attente nous avait donné ?

La première considération philosophique essentielle est triviale, mais, comme toujours ce qui est trivial se transforme souvent en une peau de banane sur laquelle la paresse philosophique peut glisser : ce qui est clair est que, jusqu'à maintenant, nous avons utilisé des concepts totalement naïfs d'*intuition* et d'*évidence*. La première chose à faire avant toute discussion consiste dans la nécessité de supprimer la mécompréhension la plus grossière concernant le manque d'une différence entre ce qu'il faut entendre par *évidence* et ce que nous expérimentons normalement comme *sentiment d'évidence*. En fait, dans la plupart des cas, les deux fonctions semblent presque équivalentes et, d'une certaine manière, nous considérons comme fondamentalement psychologique le caractère de l'*évidence*, justement comme *sentiment d'évidence*. Le problème est qu'ainsi on ne va nulle part : si nous restons à l'idée que l'*évidence* soit une composante de quelque manière connectée à un vécu quelconque, mais qui n'a rien à faire, en principe, avec la connaissance que nous obtenons du vécu lui-même, nous sommes immédiatement pris par l'inutilité substantielle de l'*évidence* elle-même. Dans ce cas, elle ne peut d'aucune manière jouer le rôle de critère de connaissance en étant liée au caractère changeant des différents vécus psychiques [9]. Ce que nous entendons soutenir est que le caractère d'*évidence* est certainement une composante de quelques

9. Nous n'allons pas analyser ce problème, mais pour établir la différence fondamentale entre *évidence* comme composante de l'acte porté par la *ratio* et *évidence* comme composante psychologique, il suffit de se référer à E. Husserl, *Prolégomènes à la logique pure*, premier tome des *Recherches Logiques*, PUF, coll. Épiméthée, Paris, 2001^4.

actes psychiques, mais non au sens banal que cela dépend de l'attitude du sujet dans un moment déterminé, mais, beaucoup plus profondément, nous pensons que certains vécus présentent ce moment comme composante *essentielle* : enfin, certains actes nous présentent un « état des choses » qui s'impose avec *évidence* et ce caractère en est une composante essentielle, non négociable.

Or ces actes, dans le jargon phénoménologique, doivent avoir un caractère précis : ils doivent être d'une « conscience donatrice originaire » [10]. Trivialement : le souvenir n'est pas une « conscience donatrice originaire », un acte qui perçoit ici et maintenant peut l'être. E. Husserl, l'exprime clairement aussi pour quelque chose qui nous concerne de plus près :

> Pour toutes *les espèces* de vécus *positionnels* la phénoménologie présente un analogue de cette opposition [« voir » ou « non voir » au sens originaire] : nous pouvons par exemple former de façon « aveugle » le jugement prédicatif : deux plus un égale un plus deux, mais nous pouvons aussi former le même jugement sur le mode de l'évidence. L'état de chose, l'objectivité synthétique qui correspond à la synthèse du jugement, est alors une donnée originaire, il est saisi de façon originaire. [11]

Ce n'est pas un hasard si E. Husserl a choisi cet exemple ; en fait quelques pages plus tard, il y revient et il utilise ce qu'il appelle l'« exemple arithmétique » en introduisant le caractère spécifique de l'évidence qui nous intéresse. Il vaut la peine de reporter entièrement la citation :

> [. . .] il faut constater sur le plan phénoménologique que le *voir* si l'on peut dire « *assertorique* », *portant sur quelque chose d'individuel* – par exemple « s'apercevoir » d'une chose ou d'un état de chose individuel – se distingue essentiellement d'un voir « *apodictique* », de la *vision intellectuelle d'une essence ou d'un état de chose eidétique* ; il en est de même aussi de la modification que subit cette vision intellectuelle quand les deux sortes de voir se mélangent ; c'est le cas dans l'application d'une vision eidétique à une chose qui tombe sous la vision assertorique et, de façon générale, *dans la connaissance de la nécessité qui s'attache à l'être-tel* (*des Soseins*) d'un individu une fois posé. [12]

Nous avons d'un côté une option très forte sur le terme *évidence*, où, au niveau conceptuel, le contenu est saisi dans une *vision*, d'un seul coup. De l'autre côté, nous avons la caractérisation d'*apodictique* pour ce type d'évidence. Ce qui nous intéresse le plus est que, selon la phénoménologie, même

10. E. Husserl, *Idées directrices pour une phénoménologie* (dorénavant *Idées I*), Gallimard, coll. TEL, Paris, 1991[4] ; p. 458 et suivantes. Ce problème caractérise toute la philosophie d'E. Husserl. On peut utiliser aussi les déjà citées *Recherches Logiques* ou *Logique formelle et logique transcendantale*, PUF, coll. Epiméthée, Paris, 1996[4].

11. E. Husserl, *Idées I*, *op. cit.* ; p. 459.

12. *Ibidem*, p. 463.

s'ils sont de deux types différents, l'évidence concernant la perception en tant que « conscience donatrice originaire » et la « vision essentielle dans une conscience donatrice originaire » peuvent, les deux, revendiquer qu'en elles se manifeste la plénitude de la connaissance. D'une certaine manière telle est la caractéristique fondamentale concernant l'*évidence* : son contenu est donné d'« un seul coup », *hic et nunc*, dans une unité indécomposable qui caractérise le point final de la construction de la connaissance. En ce sens, l'*évidence* n'est en rien une composante psychologique, mais une composante nécessaire pour le vécu de connaissance afin que cette dernière puisse être définie pleine et satisfaisante et, encore une fois, non au sens psychologique, mais pleinement rationnel.

Sans continuer sur les précisions à donner sur la pensée d'E. Husserl, nous pouvons venir au problème spécifique auquel on est en train de se mesurer : comment expliquer ou, au moins, comment interpréter les deux points qui ont inauguré ce paragraphe ?

La réponse la plus facile serait – on vient de le dire, mais en raison de ce qu'on vient tout juste d'affirmer le tout devient très douteux – qu'on s'était trompé [13]. Enfin, ce que nous avions considéré comme une *évidence*, tout simplement ne l'était pas.

En réalité, cela nous paraît un raccourci inacceptable que le fait d'avoir éliminé la composante psychologique du vécu d'*évidence* – qui donc n'est plus un *sentiment d'évidence*, mais une composante de la *ratio* – nous permet de rendre particulièrement clair dans son absurdité : en effet, voudrait-on soutenir qu'au début la détermination de π était claire et évidente et que, par la suite et tout d'un coup, elle devient obscure ?

π ne dépend clairement pas du *sentiment d'évidence*, ce serait tout simplement absurde de soutenir cette thèse. Son évidence ne dépend pas de la disposition d'esprit d'un sujet quelconque – l'évidence peut-elle disparaître si je suis triste ? – et tout doute doit nous faire supposer et exprimer la possibilité qu'un changement fondamental a été tout simplement ignoré. Enfin, si nous sauvegardons la cohérence avec les positions qu'on vient d'exprimer, tout cela doit cacher, pour acquérir un sens philosophique, une modification essentielle et phénoménologiquement importante.

Pour pouvoir le saisir, revenons à la manière de se donner de cette vision évidente constituant le point final, le remplissement adéquat d'une intention de connaissance. Sans approfondir encore les déterminations précédentes, sûrement nous pouvons dire que le fait d'obtenir une vision dans une « conscience donatrice originaire » dépend du fait de se donner dans un présent – dans un *hic et nunc* – de notre contenu de conscience. Or, cela est certainement valable pour une perception où un contenu nous est donné d'un seul coup et est valable également dans le monde des essences, avec une

13. Nous n'analyserons pas mieux la chose, mais dans les paragraphes qui suivent à ceux qu'on vient d'utiliser, E. Husserl parle expressément d'*évidence adéquate et inadéquate*. Pour ces questions, *Ibidem*, § 138 ; p. 464 – 468.

précision qui, d'autre part, vaut aussi pour les évidences perceptives. La modification essentielle, ce qui a été passé sous silence, est que, pour autant, il ne faut pas entendre, par « présent », rien d'autre qu'un « point de temps ». Probablement, la locution de *phase de présence*[14] serait plus adéquate. De toute façon, ce que nous entendons dire est que, en quelque sorte, la globalité d'un contenu de connaissance prend le caractère d'*évidence* dès qu'il est tenu dans *une phase de présence singulière*. Cela parce que la *phase de présence* exprime la structure temporelle où, comme l'écrivait E. Husserl « L'état de chose, l'objectivité synthétique qui correspond à la synthèse du jugement, [. . .] est saisi de façon originaire ». Prenons, par exemple, les démonstrations qui se laissent tenir dans une seule *phase de présence* : la démonstration d'Euclide qu'il n'y a pas un nombre premier plus grand que tout autre, nous s'offre dans une prégnance qui désigne précisément l'évidence comme « donation originaire (et lumineuse) ».

Dans notre premier cas, la construction d'algorithmes pour la détermination de π a, au fond, le même caractère : la loi soutenant l'algorithme est effectivement saisie dans sa plénitude et une fois qu'on a obtenu un nombre du développement, nous savons effectivement enchaîner, par une vision en « donation originaire », le suivant. Pour combien de temps ?

Celle-là semble une bonne question car nous pouvons nous demander quelle « grandeur » peut atteindre une *phase de présence*. En effet, il s'agit d'un point essentiel et la première réponse est que la question sur la longueur d'une *phase de présence* n'est pas, peut-être, si pertinente qu'elle le semble à première vue. Une oreille sensible et raffinée peut-elle garder ensemble, dans une seule *phase de présence*, un mouvement ou une symphonie ?

Probablement, et encore une fois, la question est mal posée car nous n'avons pas encore éclairé la nature de l'unité de la *phase de présence* : il ne s'agit pas de regrouper des fragments de temps, au contraire il s'agit du projet de construire une unité de sens. En quelque sorte, c'est la symphonie ou son mouvement qui sont le « sens », l'objet d'une connaissance possible, tandis que ce sont les fragments de temps l'abstraction véritable. Cela n'est possible – et ne fait du « sens » – qu'à partir d'un autre projet visant à construire un sens raisonnablement différent. De surcroît, à la dimension du projet est intrinsèque la dimension du « pas encore, mais sur le point d'être ». Enfin, la *phase de présence* ne tient pas seulement les fils du passé, mais doit ouvrir structurellement aussi vers le futur. C'est pour cette raison que l'objet π peut rester dans une unité de sens. Précisément parce que la *phase de présence* de sa construction ne contient seulement les nombres construits jusqu'à présent dans son développement, mais également le projet des nombres qui doivent suivre. Cela est d'ailleurs gardé toujours *en acte* par l'algorithme qui

14. Cela existe déjà dans chez E. Husserl, mais cette locution a été conduite à une évidence pleine par M. Richir. Parmi la grande production de ce philosophe, signalons M. Richir, *Méditations phénoménologiques. Phénoménologie et phénoménologie du langage*, Millon, Grenoble, 1992.

tisse l'unité ouverte de la *phase de présence*. L'« ouverture vers » est donc une composante essentielle de la *phase de présence* et une des raisons profondes permettant que la construction de π demeure une « donation originaire » et donc évidente. Si telle est notre thèse, que se passe-t-il après ? Pourquoi tout devient obscur et ce caractère d'évidence disparaît aussi bien dans le cas de π que pour les fonctions de Ramsey ?

Pour pouvoir y arriver, en premier lieu, il faut garder toujours ce que nous venons de déterminer, c'est-à-dire la *phase de présenc*e avec sa queue de déterminations à peine effectuées avec le projet de celles immédiatement futures. C'est lui, comme on vient de l'écrire, le véritable vécu d'*évidence*. A ce point, on peut se souvenir des deux cas dont on a discuté précédemment :

1. Nous avons imaginé de disposer de toute la séquence de π et, par la suite, il nous semblait possible d'introduire une suite d'opérations qui, par après, présentaient des problèmes sans réponse.
2. On est passé d'une phase d'évidence « graphique » - pour résumer l'exemple des cinq ou six personnes – à un calcul tellement long et complexe qu'il excédait les possibilités de nos ordinateurs les meilleurs.

Précisément à ce point nous devons poser la question phénoménologique importante : il n'y a rien qui ait changé entre le vécu de « donation originaire » et la réalisation concrète de nos exemples ?

Il nous semble que quelque chose s'est radicalement modifié : si avant nous avions une loi qui nous donnait pas à pas un objet, maintenant nous avons un objet que nous décidons (imaginons) d'avoir comme donné. Pour le dire plus proprement, nous sommes passés de la dimension du *devenir* à celle de l'*être*. *Et l'évidence dont il est proprement question est celle du devenir et non de l'être*. Il est alors clair qu'en déplaçant l'accent sur l'*être*, ce qui avant était clair et *évident du devenir* ne le soit plus. Maintenant, *la phase de présence qui conservait l'évidence tout au long de la détermination du devenir n'est plus*, tout simplement, *appropriée*. Il s'agit de deux actes profondément différents au sens phénoménologique et chacun a des caractères d'*évidence* spécifiques qui ne coïncident pas, nécessairement, avec ceux de l'autre.

Il est intéressant de remarquer qu'on a aussi dépassé la différence entre fini et infini, au moins au sens où elle n'est plus tellement pertinente pour notre réflexion. Nous avions en fait imaginé que pour π on pouvait peut-être faire une exception, précisément parce que le développement de π est infini. En réalité, sous cet angle d'observation, il n'y a pas une différence phénoménologique fondamentale entre le développement de π et les fonctions de Ramsey : dans les deux cas l'*évidence* disparaît au moment où l'on passe du *devenir* – qui est rigoureusement soutenu, dans les termes de l'*évidence* aussi, par l'algorithme en question – à l'*être* qui ne peut plus avoir les mêmes critères d'*évidence*. *Cela parce qu'un algorithme n'a aucune possibilité d'évidence pour l'être. Il peut l'avoir*, en principe, *seulement pour le devenir et selon les modalités qu'on a présentées*.

Un témoignage ultérieur et une possibilité de développement nous viennent encore du cas des cinq ou six personnes dans une salle d'attente. Commençons par le témoignage en faveur : dans ce cas, nous avions une *évidence adéquate* dans les termes de l'être. En fait les six personnes, dûment symbolisées, nous exprimaient d'un seul coup, dans une vision unique, la vérité du théorème en question. Cela nous faisait supposer qu'il s'agissait de *l'évidence propre* aux théorèmes de Ramsey. Or, tout simplement, *cette évidence de l'être ne se conserve pas pour un nombre supérieur de personnes*. Pour des ordres de grandeur supérieure, on est lié à l'*évidence du devenir* et *l'évidence dans la forme du devenir* nous est donnée sous le schéma de l'« encore un » dans la forme spécifique permise par la structure de la *phase de présence* que nous avons présentée avec ses « rétentions » et ses « protensions ». Pour ce qui en est des possibilités de développement, nous voudrions au moins éliminer une mécompréhension possible : il n'est pas dit que ce que nous venons de présenter soit l'unique manière pour accéder à la complétude de la détermination aussi bien de π que des fonctions de Ramsey. Ce que nous entendons dire est que, dans les formes présentées et en faisant abstraction de toute autre analyse de la question, ce dont nous disposons maintenant sous la forme d'une *intuition évidente* est ce que nous avons exprimé. Rien n'empêche que, dans le futur, l'on puisse trouver un chemin nouveau qui, en redistribuant les cartes à table, soit capable d'exprimer encore à nouveau cette plénitude de l'*évidence* que nous recherchons comme accomplissement d'un parcours de connaissance.

Cela dit, il nous reste toujours le problème phénoménologique d'élucider ce qui constitue ces structures d'*évidence*, ce qui en assure la tenue : enfin, il s'agit de décrire les caractères spécifiques des vécus qui conservent l'*évidence* d'un point de vue temporel. Et, encore une fois, il n'est pas dit que les mathématiques ne sachent pas nous donner quelques exemples illustratifs.