3

Espace, espace de jeu, jeu de hasard.
Position philosophique du problème de l'espace et des probabilités chez Felix Hausdorff

CARLOS LOBO

Espace, espace de jeu, jeu de hasard ou, en allemand : *Raum, Spielraum, Zufallspiel* : ces trois concepts forment les jalons du parcours que nous propose le mathématicien Félix Hausdorff (1868-1942), connu pour ses contributions décisives pour le développement de la topologie ensembliste, à la théorie de la mesure, et donc indirectement à la théorie moderne des probabilités interprétées en termes d'espaces d'événements (Borel, Bréchet, Kolmogorov). Mais son appartenance à la théorie des probabilités connue sous le titre de théorie du *Spielraum*, range ou « espace de jeu » sont méconnues, pour ne pas dire totalement ignorées. Il en va *a fortiori* des méditations philosophiques sur le problème de l'espace (1903) et ses contributions au calcul des probabilités (dont celle de 1901) qui nous présentent l'analogie entre géométrie *stricto sensu* et « géométrie du hasard », sous un autre jour sensiblement différent. Pris dans une polémique qui oppose Nietzsche et Kant, méditant l'impact des géométries non-euclidiennes pour la position du problème de l'espace, celui que d'aucuns ont pu qualifier de « mathématicien dionysiaque » met à nu ce qu'il nomme le dernier « résidu de superstition métaphysique » : la thèse ou croyance du monde couplant l'objectif et l'absolu (et corrélativement, le subjectif et le relatif), qui occulte le travail « interprétatif et sélectif » de la conscience. La verve polémique ne saurait occulter l'opération qu'une telle critique présuppose, à savoir une *epochè* transcendantale dont la portée épistémologique et critique doit être soulignée, puisqu'il s'agit de lever les résistances que la conscience oppose au changement d'attitude devenu mathématiquement concevable et scientifiquement nécessaire en physique. Plus remarquable encore est la position du problème du calcul des probabilités et de son applicabilité. Elle fraye la voie à une esthétique et à une analytique transcendantales « probabilistes » dont les principes constitutifs s'efforcent de capturer et de décrire une constitution génétique, libre et ouverte, dont l'aléa ne peut être éliminé.

1.

Hausdorff avance un principe qu'il présente comme une contribution importante à la « psychologie de la science » : « *il est plus facile de découvrir des choses nouvelles, que de regarder d'une manière nouvelle les choses anciennes* » ; et l'on pourrait ajouter à titre de corollaire pour l'économie psychique de la connaissance, que le scientifique, s'il se trouve dans la nécessité de choisir, préférera dépenser ses efforts pour accroître ses connaissances par de nouvelles découvertes, fussent-elles très difficilement accessibles, plutôt qu'en changeant sa manière de considérer et traiter celles qu'il tient pour déjà connues. Le contexte dans lequel intervient cette remarque n'est pas moins significatif que l'exemple qui le motive : il s'agit d'illustrer le concept de courbure d'espace en considérant la surface terrestre, non telle que nous l'avons reconstruite et la tenons pour réelle, à savoir comme une sphère plongée dans un espace euclidien de courbure nulle, mais *telle que nous la vivons*, à savoir comme la surface sur laquelle nous nous déplaçons, que nous arpentons et dont toutes nos mesures de distances reçoivent un coefficient de déformation constant. Au début de son article sur *le problème de l'espace* [1]

> Pour passer de la sphère bien connue, à une variété bidimensionnelle de géométrie sphérique, bref, au plan sphérique, aucune nouveauté du point de vue du contenu n'est nécessaire, mais seulement un changement dans la manière d'appréhender les choses : on doit nommer les géodésiques [*die Hauptkreise der Kugel*], *lignes droites*, et transformer tous les concepts et toutes les propositions qui se rapportent à la sphère dans l'espace de telle sorte qu'ils ne concernent que des rapports sur la surface même de la sphère et qu'ils soient vérifiés par des habitants qui ne peuvent pas quitter cette surface, en d'autres termes, interpréter la sphère non plus comme une forme de notre espace euclidien, mais désormais comme le

1. F. Hausdorff, « Das Raumproblem, Auntrittsvorlesung », an der Universität Leipzig am Juli 1903 gehalten, *Annalen der Naturphilosophie* ; Band III, Veit & Comp. In Leipzig. [Cité ci-après : *Das Raumproblem*].

> support bidimensionnel constant d'une géométrie distincte, une géométrie non-euclidienne. Mais ce simple changement de façon de penser, bien qu'il n'exige de changer aucune formule trigonométrique, était si couteux que seul Lambert s'en approcha, et l'on peut dire, que la géométrie sphérique demeura non-découverte alors que son modèle euclidien, la sphère, existait. [2]

Ce texte par son titre et son approche annonce sur plus d'un point les analyses que nous rencontrerons, à partir des années 1923 chez H. Weyl, tant en ce qui touche la position du problème de l'espace que pour l'analyse qu'il en propose. Mais avant cela, je voudrais me reporter à une autre résistance, parallèle de la précédente, comme le suggère explicitement Hausdorff.

Le principe évoqué ci-dessous trouve à cette occasion une formulation plus développée. Il nous dit que ces changements dans la manière de considérer les choses peuvent consister dans l'abandon d'hypothèses tenues pour nécessaires, ou, ce qui revient au même, dans la rétrogradation de principes tenus pour nécessaires (axiomes) au rang d'hypothèses possibles, parmi d'autres. Ce changement correspond au sens technique du terme à ce que Husserl nomme un « élargissement » (*Erweiterung*). Le principe proposé par Hausdorff, dans ses *Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung* (datant de 1901), s'énonce : « *L'accroissement d'une connaissance peut consister, non dans l'adjonction, mais dans l'abandon, dans l'élimination de présuppositions jusque-là tenues pour indubitables*, dans l'ouverture de possibilités précédemment exclues » [3].

L'énoncé de ce principe n'est pas sans relation avec les perspectives et positions mathématiques de Hausdorff. Il nous propose en l'occurrence d'inverser notre façon d'appréhender les probabilités en considérant les probabilités *absolues comme un cas particulier de probabilité relative*, et par suite, d'inverser l'ensemble des oppositions entre probabilités subjectives et objectives, *a priori* et *a posteriori*. C'est en d'autres termes tous les conflits au sujet des probabilités qui s'y trouvent réinterprétés et redistribués. Le parallèle avec la situation précédente est explicitement mentionné. Bien plus, le principe de

2. *Das Raumproblem*, p. 85.

3. F. Hausdorff, *Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Abdruck aus den Berichten der mathematisch-physischen Classeder Könige. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. 6. Mai 1901, p. 155 ; repris in *Gesammelte Werke, Astronomie, Optik und Wahrscheinlichkeitstheorie*, Band V, édités par Josef Bemelmans, Christa Binder, Srishti D. Chatterji, Stefan Hildebrandt, Walter Purkert, Felix Schmeidler, Erhard Scholz. V, Springer, 2006, p. 532. Cité ci-après sous la forme [*Gesammelte Werke*, Bd. V].

psychologie de la connaissance que nous évoquions plus haut y reçoit une formulation mathématiquement plus précise :

> dans l'augmentation du numérateur et du dénominateur dans le quotient de probabilité - pensez, par exemple, *à la géométrie non-euclidienne*, ou songez, pour rester plus proche des représentations usuelles du calcul des probabilités, au cas où la distribution des boules dans plusieurs urnes, dont l'une est choisi au hasard pour le tirage, *distribution que l'on tient à tort pour égale alors qu'elle ne l'est pas*. [4]

L'analogie fonctionne ainsi à deux niveaux. Au plan mathématique, le principe ici en jeu correspond à ce qu'on nomme de nos jours *principe de corrélation* (entre deux variables aléatoires) où les variations touchent à ce qu'on nomme en statistique le coefficient de corrélation entre deux ou n variables aléatoires, variables dont les valeurs peuvent être discrètes ou continues, réelles ou complexes. Or il existe une infinité non dénombrables de telles corrélations. Dans son *application*, le calcul des probabilités doit donc tenir compte de ce coefficient. Une probabilité absolue n'est qu'une probabilité relative dont les hypothèses ou conditions sont cachées. Ces hypothèses touchent à la nature de ce que Hausdorff nommera, après von Kries, « l'espace de jeu » ou *Spielraum* [5]. La significativité d'une mesure de probabilité dépendent de la configuration supposée de l'espace de jeu fondamental. Nous avons ainsi une autre formulation du principe du champ fondamental énoncé par Husserl, entre autre dans ses *Leçons sur la Logique et la théorie de la science* [6]. Au plan épistémologique, il nous suggère d'étranges similitudes avec une situation que nous connaissons fort bien en phénoménologie, ou du moins avec un principe d'une théorie critique de la connaissance : *l'accroissement de connaissance par élargissement transforme le* nécessaire *tenu pour exclusif en* possible parmi d'autres ; ou, ce qui revient au même, par explicitation de présuppositions

4. *Gesammelte Werke*, Bd. V, p. 532.

5. Johannes von Kries, *Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Mohr, Tübingen, 1886. Sur l'importance de von Kries, cf. Brefs rappels et bibliographie complémentaire dans Sur l'évolution, voir C. Lobo, « Husserl's Logic of Probability », in *META : Research in hermeneutics, Phenomenology and Practical Philosophy*, V L. XI, N^0 2 December, 2019 ; p. 267-313.

6. E. Husserl, *Logik und allgemeine Wissenschaftstheorie. Vorlesungen 1917/18*, Mit ergänzenden Texten aus der ersten Fassung 1910/11, In *Husserliana*, Bd. XXX, hrsg. von Ursula Panzer, Den Haag ; Kluwer Academic.2006. Sur l'évolution, voir C. Lobo, « Husserl's Logic of Probability », in. Ce principe rejoint celui que von Mises avance contre von Kries, comme principe de définition (synthétique) du collectif de base de von Mises, *Probability, Statistics and Truth,* 18-19. Mais surtout il vient de Von Kries. Voir à ce sujet, C. Lobo, « Du pur fondement phénoménologique des mathématiques », *Husserl, Phénoménologie et fondements des sciences*, éd. J. Farge et D. Pradelle, Paris, Hermann, 2019, en particulier, p. 155-166.

i.e. d'hypothèses cachées ou dissimulées sous les dehors de principes indiscutables, une connaissance *a priori* nécessaire et absolue se transforme en une construction formelle *a priori* possible dont le choix dépend de circonstances *a posteriori* expérimentables. Quant à la brève allusion à la géométrie non-euclidienne, elle nous suggère une analogie entre le *coefficient de corrélation* et *le coefficient de courbure*[7]. L'une et l'autre nous incitent à penser la détermination de l'ordre et de la mesure, et la connaissance en général, en fonction d'une situation de relativité épistémologique – sans relativisme. Ou pour le dire en d'autres termes, *l'espace de jeu fondamental*, i.e. celui qui est présupposé, est muni d'une *nature* (d'une structure métrique) qui conditionne le sens et le degré de précision (et d'erreur) des diverses mesures opérées en lui.

2.

Le transfert d'une situation propre à la théorie des probabilités sur le terrain de la théorie de la connaissance est justifié philosophiquement et mathématiquement par la signification que Hausdorff donne au calcul des probabilités. Le volet philosophique n'est du reste pas implicite, car Hausdorff aura développé parallèlement à son travail de mathématicien, une œuvre de philosophie sous le pseudonyme de Paul Mongré.

On peut la caractériser en première approximation comme une radicalisation *nietzschéenne* de la philosophie transcendantale de Kant. Confronté aux intuitions géniales d'un Riemann, il n'est pas abusif de dire que Hausdorff propose une théorie de la relativité généralisée de la connaissance qui radicalise le point de vue critique dans le sens d'une théorie transcendantale relativiste de la science — ce qu'il faut se garder de confondre avec un quelconque relativisme vulgaire. Comme Weyl et sans doute plus radicalement que Weyl[8], le point de départ de Hausdorff est kantien, et le développement des géométries non-euclidiennes nourrissent en lui le pressenti-

7. Au sujet de cette analogie, voir les très éclairantes analyses de Pierre Cartier, « Analyse non standard : nouvelles méthodes infinitésimales en analyse. Application à la géométrie et aux probabilités », *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg* - RCP25, 1985, tome 35, Conférences de : P. Cartier, A. Guichardet et G.A. Viano, exposé, n° 1, 1-21, © Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1985. Ainsi que P. Cartier, P. (2006). *Le calcul des Probabilités de Poincaré*, P. Cartier, IHES, Bure-Sur-Yvette, Septembre 2006, IHES/M/06/47.

8. E. Scholz : « For Weyl "any group" was usually constrained by the condition of differentiability. This was not necessarily so for other mathematicians, see e.g. F. Hausdorff's argument for the lack of meaning of an "absolute" objective structure of space and time in his philosophical essay *Das Chaos in kosmischer Auslese* in which arbitrary point transformation (bijections) are considered as the most general case (Hausdorff 1898) ; see (Epple 2006). »,