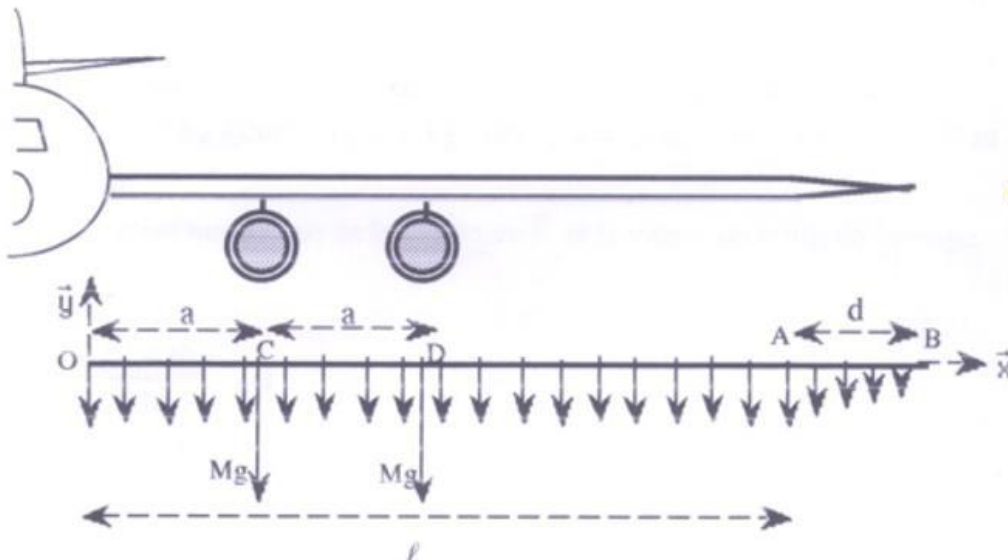


Torseurs des actions mécaniques : aile d'avion et barrage-poids

Exercice 4 : Torseur des actions mécaniques exercées sur une aile d'avion

On considère l'aile d'un avion quadrimoteur, modélisée par une **poutre droite** fixée au fuselage en un point **O**. Sur la distance **l** comprise entre **O** et **A**, la répartition de masse est constante. On note cette masse linéique **m** (en kg/m). Au-delà du point **A**, la masse linéique décroît **linéairement** jusqu'à devenir nulle à l'extrémité **B**. La distance entre **A** et **B** est **d**. Les deux moteurs, chacun de masse **M**, sont placés aux points **C** et **D**, tels que **OC = CD = a**. L'avion est immobile sur le tarmac et soumis uniquement au champ de pesanteur d'intensité **g**. **Déterminer le torseur des forces statiques en O dû au poids de l'aile et des moteurs.**



Données et repère

- On modélise l'aile par l'axe (Ox) (du fuselage vers le bout d'aile).
- On choisit un repère direct $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec : \vec{i} le long de l'aile (de (O) vers (B)), \vec{j} vers le haut et \vec{k} sortant du plan.

Le **poids** agit donc suivant $(-\vec{j})$.

$$\text{Répartition de masse linéique } \lambda(x) \text{ (kg/m)} : \begin{cases} m & \text{pour } 0 \leq x \leq l \\ m \times \left(1 - \frac{x-l}{d}\right) & \text{pour } l \leq x \leq l+d \\ 0 & \text{pour } x \geq l+d \end{cases}$$

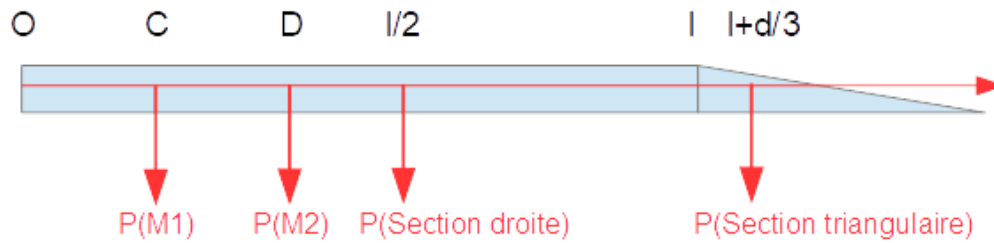
Les moteurs (M) sont en $x = a$ et $x = 2.a$

1) Résultante des forces (poids total de l'aile)

$$\vec{R} = \sum_i \vec{R}_i = \vec{P}_{M1} + \vec{P}_{M2} + \left[\int_0^l -\lambda(x) \cdot g \cdot dx \right] \cdot \vec{j} + \left[\int_l^{l+d} -\lambda(x) \cdot g \cdot dx \right] \cdot \vec{j} = -M \cdot g \cdot \vec{j} - M \cdot g \cdot \vec{j} - m \cdot l \cdot g \cdot \vec{j} - m \cdot \frac{d}{2} \cdot g \cdot \vec{j}$$

$$\vec{R} = - \left[2M + m \cdot l + m \cdot \frac{d}{2} \right] \cdot g \cdot \vec{j}$$

2) Moment en (O) : $\vec{M}(O) = \sum_i \vec{M}(O) = \vec{M}_C(O) + \vec{M}_D(O) + \vec{M}_{\frac{l}{2}}(O) + \vec{M}_{\frac{l+d}{3}}(O)$



a) Moteurs en $x = a$ et $x = 2a$:

$$\overline{M}_C(0) + \overline{M}_D(0) = \overline{OC} \times (-M \cdot g \cdot \vec{j}) + \overline{OD} \times (-M \cdot g \cdot \vec{j}) = (a \cdot \vec{i}) \times (-M \cdot g \cdot \vec{j}) + (2 \cdot a \cdot \vec{i}) \times (-M \cdot g \cdot \vec{j})$$

$$\overline{M}(0) = -3 \cdot a \cdot M \cdot g \cdot \vec{k}$$

b) Segment uniforme $0 \rightarrow l$:

$$\overline{M}_{\frac{l}{2}}(0) = \frac{1}{2} \vec{i} \times (-m \cdot l \cdot g \cdot \vec{j})$$

$$\overline{M}_{\frac{l}{2}}(0) = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot l^2 \cdot \vec{k}$$

c) Segment triangulaire entre l et $l + d$

$$\overline{M}_{l+\frac{d}{3}}(0) = \left(1 + \frac{d}{3}\right) \vec{i} \times \left(-m \cdot \frac{d}{2} \cdot g \cdot \vec{j}\right)$$

$$\overline{M}_{l+\frac{d}{3}}(0) = -m \cdot g \cdot \frac{d}{2} \left(1 + \frac{d}{3}\right) \cdot \vec{k}$$

$$\overline{M}(0) = \sum \overline{M}(0) = -\left(3 \cdot a \cdot M + \frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 + m \cdot \frac{d}{2} \left(1 + \frac{d}{3}\right)\right) \cdot g \cdot \vec{k}$$

Exercice 5 : Torseur sthénique d'un barrage-poids

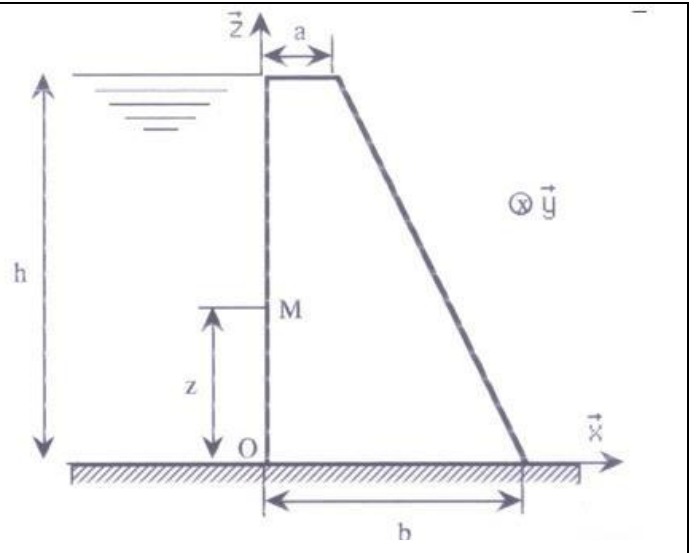
Un **barrage-poids** en béton de densité ρ_b , de longueur l , et de **section trapézoïdale** (bases a et b , hauteur h), repose sur une fondation horizontale **poreuse**.

La figure montre la **section médiane** et le **repère** $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

L'eau exerce sur la paroi verticale du barrage une **action mécanique** appelée **pression hydrostatique**, définie par la **densité surfacique** suivante :

$$\vec{f}_M = \rho_e \cdot g \cdot (h - z) \cdot \vec{x}$$

où ρ_e est la **masse volumique de l'eau**, g est l'**accélération de la pesanteur**, z est la **coordonnée du point M** sur la hauteur du barrage.



1. Écrire les **éléments de réduction** \vec{F} et $\vec{M}(O)$ du **torseur des actions mécaniques de l'eau** sur le barrage.

$$\vec{f}_M = \rho_e \cdot g \cdot (h - z) \vec{x} \text{ avec } 0 \leq z \leq h \text{ et } 0 \leq y \leq l$$

$$\vec{F} = \iint \vec{f}_M dS = \int_0^h \int_0^l \rho_e \cdot g \cdot (h - z) \vec{x} \cdot dy \cdot dz$$

$$\vec{F} = \rho_e \cdot g \cdot \left(\int_0^h (h - z) dz \right) \left(\int_0^l dy \right) \vec{x}$$

$$\vec{F} = \rho_e \cdot g \cdot \left[h \cdot z - \frac{z^2}{2} \right]_0^h \cdot (l y|_0^l) \vec{x}$$

$$\vec{F} = \rho_e \cdot g \cdot \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) \cdot l \cdot \vec{x}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \rho_e \cdot g \cdot h^2 \cdot l \cdot \vec{x}$$

$$\vec{M}(O) = \iint \vec{OM} \times \vec{f}_M dS$$

$$\vec{M}(O) = \int_0^h \int_0^l (z \cdot \vec{z}) \times (\rho_e \cdot g \cdot (h - z) \vec{x}) \cdot dy \cdot dz$$

$$\vec{M}(O) = \rho_e \cdot g \cdot \left(\int_0^h z \cdot (h - z) dz \right) \left(\int_0^l dy \right) \vec{z} \times \vec{x}$$

$$\vec{M}(O) = \rho_e \cdot g \cdot \left[h \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^h \cdot (l y|_0^l) \cdot \vec{y}$$

$$\vec{M}(O) = \rho_e \cdot g \cdot \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) \cdot l \cdot \vec{y}$$

$$\vec{M}(O) = \frac{1}{6} \rho_e \cdot g \cdot h^3 \cdot l \cdot \vec{y}$$

Montrer que ce torseur est un **torseur glisseur**.

Si, en un point, le moment est perpendiculaire à la résultante, le torseur est un torseur glisseur : $\vec{F} \cdot \vec{M}(O) = 0$

Déterminer son **axe central**.

Puisque le torseur est glisseur alors il existe un point H tel que $\vec{M}(H) = \vec{0}$

On cherche H tel que $\vec{M}(H) = \vec{M}(O) + \vec{HO} \times \vec{F} = \vec{0}$

On pose $\vec{OH} = z \cdot \vec{z}$

On a : $\vec{M}(O) = \frac{1}{6} \rho_e \cdot g \cdot h^3 \cdot l \cdot \vec{y}$ et $\vec{F} = \frac{1}{2} \rho_e \cdot g \cdot h^2 \cdot l \cdot \vec{x}$

$$\frac{1}{6} \rho_e \cdot g \cdot h^3 \cdot l \cdot \vec{y} - z \cdot \vec{z} \times \left(\frac{1}{2} \rho_e \cdot g \cdot h^2 \cdot l \cdot \vec{x} \right) = \vec{0}$$

$$\frac{1}{6} \rho_e \cdot g \cdot h^3 \cdot l \cdot \vec{y} = z \cdot \vec{z} \times \left(\frac{1}{2} \rho_e \cdot g \cdot h^2 \cdot l \cdot \vec{x} \right)$$

$$\frac{1}{3} h \cdot \vec{y} = z \cdot \vec{z} \times (\vec{x})$$

$$\frac{1}{3} h \cdot \vec{y} = z \cdot \vec{y}$$

$$z = \frac{h}{3} \text{ donc } \vec{OH} = z \cdot \vec{z} = \frac{h}{3} \vec{z}$$

Le point H est situé à une distance $h/3$, c'est-à-dire au tiers de la hauteur à partir de la base.

2. Déterminer le **poids du barrage** \vec{M}_G ainsi que la **position de son centre de gravité G**. Écrire les **éléments de réduction en O** du **torseur sthénique** dû à son poids.

- **Déterminer le poids du barrage**

Section droite = **trapèze** (bases a, b, hauteur h).

$$\text{Aire : } A = \frac{a+b}{2} h$$

$$\text{Volume : } V = A \cdot \ell = \frac{a+b}{2} h \ell$$

Poids vers $-\vec{z}$:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} = -m \cdot g \cdot \vec{z} = -\rho_b \cdot V \cdot g \cdot \vec{z} = -\rho_b \cdot \frac{a+b}{2} h \cdot \ell \cdot g \cdot \vec{z} = \mathbf{P \cdot \vec{z}}$$

- **Déterminer la position de son centre de gravité G** (x_G, y_G, z_G)

$$x_G = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3(a+b)} \text{ et } z_G = \frac{(2a+b)h}{3(a+b)}$$

- **Déterminer le torseur sthénique en O**

Moment du poids en O

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \times \vec{P} = (x_G \vec{x} + z_G \vec{z}) \times (\mathbf{P \cdot \vec{z}}) = x_G \cdot \vec{x} \times \mathbf{P \cdot \vec{z}} = -x_G \cdot \mathbf{P \cdot \vec{y}} = x_G \cdot \rho_b \cdot \frac{a+b}{2} h \cdot \ell \cdot g \cdot \vec{y}$$

Torseur sthénique dû à son poids :

$$\vec{T}_O(\vec{P}) = \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{M}_O(\vec{P}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho_b \cdot \frac{a+b}{2} h \cdot \ell \cdot g \cdot \vec{z} \\ x_G \cdot \rho_b \cdot \frac{a+b}{2} h \cdot \ell \cdot g \cdot \vec{y} \end{pmatrix}$$

3. Données numériques :

$$\rho_b = 2,5 \text{ kg/dm}^3 ; \rho_e = 1 \text{ kg/dm}^3 ; a = 5 \text{ m} ; b = 20 \text{ m} ; h = 30 \text{ m} ; \ell = 100 \text{ m} ; g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Donner la **valeur numérique** de la **résultante \vec{F}** et du **poids du barrage**.

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \rho_e \cdot g \cdot h^2 \ell \cdot \vec{x} = \frac{1}{2} \times 1000 \times 9,81 \times 30^2 \times 100 \cdot \vec{x} = \mathbf{4,4 \times 10^8 \cdot \vec{x}}$$

$$\vec{P} = -\rho_b \cdot \frac{a+b}{2} h \cdot \ell \cdot g \cdot \vec{z} = -2500 \times \frac{5+20}{2} \times 30 \times 100 \times 9,81 \times \vec{z} = \mathbf{9,2 \times 10^8 \times \vec{z}}$$

Résultats donnés :

$$\mathbf{R_2 : } x_G = \frac{a^2 + b^2 + a \times b}{3(a+b)} \text{ and } z_G = \frac{(2a+b)h}{3(a+b)}$$

$$\mathbf{R_3 : } |\vec{F}| = \mathbf{4,4 \times 10^8 \text{ N}}$$