Sous-espaces vectoriels et ensembles générateurs

Soit $(E,\oplus,\otimes)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, F un sous-espace vectoriel de E, et A et B deux sous-ensembles de E.

Définitions de base

D1 — Vect(A) : Pour un sous-ensemble $A \subset E$, $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de A : $\text{Vect}(A) = \{\lambda_1 \otimes a_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes a_n\ avec\ n\ \in \mathbb{N}, a_i \in A,\ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$

D2 —Dire que A engendre F signifie : $\text{Vect}(A) = F$.

Donc : tout vecteur de F s'écrit comme une combinaison linéaire finie d'éléments de A.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

Soit $x \in \text{Vect}(A)$, on veut montrer : $x \in \text{Vect}(B)$.

$x \in \text{Vect}(A)$, par définition (D1), il existe : $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tels que $\boldsymbol{x = \lambda_1 \otimes a_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes a_n}$.

$A \subset B$ signifie que $\forall a \in A, a \in B$

Donc comme $a_1, \dots, a_n \in A$, alors $a_1, \dots, a_n \in B$.

$x = \lambda_1 \otimes a_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes a_n$ avec maintenant $a_i \in B$.

Donc, par définition (D1), $x \in \text{Vect}(B)$.

Donc $\forall x \in \text{Vect}(A)$ appartient à $\text{Vect}(B)$. Donc : $\boldsymbol{\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)}$

2. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{Vect}(A) = A$.

***A* est un sous-espace $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\text{Vect}(A) = A}$**

On doit prouver une équivalence, **deux implications** :

1. Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\text{Vect}(A) = A$.
2. Si $\text{Vect}(A) = A$, alors A est un sous-espace vectoriel de E.

($\Rightarrow$) Supposons A sous-espace vectoriel de E. Montrer $\text{Vect}(A) = A$

Montrer les deux inclusions $A \subset Vect(A)$ et $\text{Vect}(A) \subset A$

$\forall a \in A$. On peut écrire : $a = 1 \otimes a$

Combinaison linéaire à **un seul terme**, avec coefficient $1 \in \mathbb{R}$ et $a \in A$.

Par définition de $\text{Vect}(A)$, cela montre : $a \in \text{Vect}(A)\ donc$ $\boldsymbol{A \subset \text{Vect}(A)}$.

***A* est un sous-espace**, donc stable par combinaisons linéaires.

Soit $x \in \text{Vect}(A)$.

Il existe $n \in N$, $a_1, \dots, a_n \in A$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\boldsymbol{x = \lambda_1 \otimes a_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes a_n}$.

Comme A est un sous-espace alors $\forall i \in N$, $\forall a_i \in A$ et $\forall \lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_i \otimes a_i \in A$ = stabilité par scalaire ET, la somme de tous éléments de A est dans A, donc $(\lambda_1 \otimes a_1) \oplus \dots \oplus (\lambda_n \otimes a_n) \in A$,

Donc : $x \in A$ et $\boldsymbol{\text{Vect}(A) \subset A}$.

On a : $A \subset \text{Vect}(A)$ et $\text{Vect}(A) \subset A$ donc : $\boldsymbol{\text{Vect}(A) = A}$

($\Leftarrow$) Supposons $\mathrm{Vect}(A) = A$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E

- Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{Vect(A) = A}$.

Par définition, 0_{E} est une combinaison linéaire d'éléments de A (avec tous les coefficients nuls), donc $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{Vect(A)}$. Comme $\mathrm{Vect(A) = A}$, on en déduit $\mathbf{0_E \in A}$.

- Soient $x, y \in A$.

Comme $A = \mathrm{Vect}(A)$, on a : $x \in \mathrm{Vect}(A)$ et $y \in \mathrm{Vect}(A)$.

L'*ensemble engendré* $\mathrm{Vect}(A)$ *est un sous-espace de* E.

$\mathrm{Vect}(A)$ est stable par addition : $\boldsymbol{x \oplus y \in \mathrm{Vect}(A)}$.

Comme $\mathrm{Vect}(A) = A$, on conclut : $\boldsymbol{x \oplus y \in A}$.

- $soit\ x \in A$ **et** $\lambda \in \mathbb{R}$,

$x \in A = \mathrm{Vect}(A)$.

Comme $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace, alors : $\lambda \otimes x \in \mathrm{Vect}(A)$: $\boldsymbol{\lambda \otimes x \in A}$.

Les 3 propriétés sont vérifiées, donc ***A* est un sous-espace vectoriel de *E***.

$$\boldsymbol{A \text{ est un sous-espace} \iff \mathrm{Vect}(A) = A}$$

3. Montrer que si $A \subset B \subset F$ et si A engendre F, alors B engendre F.

Hypothèses

On suppose

1. $A \subset B \subset F$
2. A engendre F, c'est-à-dire : $\mathrm{Vect}(A) = F$.

Montrer que B engendre F, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(B) = F$.

- Utiliser $A \subset B$ avec la question 1 : on sait que : $A \subset B \implies \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.
- Hypothèse A engendre F cad $\mathrm{Vect}(A) = F$ donc $F \subset \mathrm{Vect}(B)$.
- Utiliser $B \subset F$ avec la question 1 on a $\mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(F)$.
- F est un sous-espace vectoriel (énoncé) donc, par la question 2 : $\implies \mathrm{Vect}(F) = F$. Ainsi : $\mathrm{Vect}(B) \subset F$.
- On a montré : $F \subset \mathrm{Vect}(B)$ et $\mathrm{Vect}(B) \subset F$ Donc : $\mathrm{Vect}(B) = F$ *donc* B engendre F.