

Sous-espaces engendrés par une intersection et une union

Soient A et B deux sous-ensembles d'un espace vectoriel E sur un corps K .

Rappels de définitions

1) Sous-espace engendré $\text{Vect}(S)$

$$\text{Pour } S \subset E, \text{Vect}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in S, \lambda_i \in K \right\}$$

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient S .

2) Somme de deux sous-espaces $U + V$

Si U, V sont des sous-espaces de E , $U + V = \{u + v, u \in U, v \in V\}$

1. Comparer $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.

Étape 1 — Utiliser les inclusions évidentes

On a toujours : $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

Étape 2 — Appliquer la propriété : $X \subset Y \Rightarrow \text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$

Donc : $\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A)$ et $\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(B)$.

Étape 3 — Conclure par définition de l'intersection

Si un ensemble X est inclus dans Y et dans Z , alors $X \subset Y \cap Z$.

Ainsi : $\boxed{\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)}$.

Remarque (important) : l'égalité n'est pas toujours vraie

L'inclusion peut être stricte.

Exemple : dans $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(1,0), (0,1)\}$, $B = \{(1,1)\}$.

Alors :

- $A \cap B = \emptyset$, donc $\text{Vect}(A \cap B) = \{0\}$,
- $\text{Vect}(A) = \mathbb{R}^2$,
- $\text{Vect}(B) = \{t(1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
- donc $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B) = \text{Vect}(B) \neq \{0\}$.

Donc ici : $\text{Vect}(A \cap B) \subsetneq \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.

2. Montrer que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

On fait une preuve par **double inclusion**.

Inclusion (i) : $\text{Vect}(A \cup B) \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$

Étape 1 — Prendre $x \in \text{Vect}(A \cup B)$

Soit $x \in \text{Vect}(A \cup B)$.

Étape 2 — Définition de $\text{Vect}(A \cup B)$

Il existe $n \in \mathbb{N}$, des $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ et des $u_1, \dots, u_n \in A \cup B$ tels que : $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$.

Étape 3 — Séparer les termes venant de A et ceux venant de B

Parmi les u_i , certains appartiennent à A et d'autres à B . On regroupe : $x = \sum_{u_i \in A} \lambda_i u_i + \sum_{u_i \in B} \lambda_i u_i$.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=:a} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{=:b}$

Étape 4 — Identifier a et b

- a est combinaison linéaire d'éléments de A , donc $a \in \text{Vect}(A)$.
- b est combinaison linéaire d'éléments de B , donc $b \in \text{Vect}(B)$.

Étape 5 — Conclure

Comme $x = a + b$ avec $a \in \text{Vect}(A)$ et $b \in \text{Vect}(B)$, on a : $x \in \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Donc : $\boxed{\text{Vect}(A \cup B) \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)}$.

Inclusion (ii) : $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)$

Étape 1 — Prendre $x \in \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$

Soit $x \in \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Alors il existe $a \in \text{Vect}(A)$ et $b \in \text{Vect}(B)$ tels que : $x = a + b$.

Étape 2 — Écrire a et b comme combinaisons linéaires

- Comme $a \in \text{Vect}(A)$, il existe $p, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in K$ et $a_1, \dots, a_p \in A$ tels que : $a = \sum_{j=1}^p \alpha_j a_j$.
- Comme $b \in \text{Vect}(B)$, il existe $q, \beta_1, \dots, \beta_q \in K$ et $b_1, \dots, b_q \in B$ tels que : $b = \sum_{k=1}^q \beta_k b_k$.

Étape 3 — Additionner : $x = a + b = \sum_{j=1}^p \alpha_j a_j + \sum_{k=1}^q \beta_k b_k$.

Étape 4 — Observer que tous les vecteurs sont dans $A \cup B$

- $a_j \in A \subset A \cup B$,
- $b_k \in B \subset A \cup B$.

Donc x est une combinaison linéaire d'éléments de $A \cup B$.

Étape 5 — Conclure

Par définition de $\text{Vect}(A \cup B)$, $x \in \text{Vect}(A \cup B)$.

Donc : $\boxed{\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)}$.

Conclusion (double inclusion)

Les deux inclusions donnent : $\boxed{\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)}$.

Résultats finaux

1. Intersection : $\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$ (et ce n'est pas forcément une égalité)
2. Union : $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$