Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soit $(E,\oplus,\otimes)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E.

Montrer que $F = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u_1,\dots,u_n$.

$$F = \lambda_1 \otimes u_1 \oplus \lambda_2 \otimes u_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes u_n \ avec \ (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Pour prouver que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, on doit vérifier :

1. F n'est pas vide
2. F est stable par addition : si $x \in F$ et $y \in F$, alors $x \oplus y \in F$
3. F est stable par multiplication scalaire : si $x \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha \otimes x \in F$

Montrer que $0_E \in F$ ($F \neq \emptyset$)

Eest un espace vectoriel, possède un vecteur nul, noté 0_E.

On considère les scalaires : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, …, $\lambda_n = 0$.

La combinaison linéaire $0 \otimes u_1 \oplus 0 \otimes u_2 \oplus \dots \oplus 0 \otimes u_n = 0_E$

Donc : $0_E \in F$ et $F \neq \emptyset$.

Stabilité de F par addition

On doit montrer : Si $x \in F$ et $y \in F$, alors $x \oplus y \in F$.

Soient $x \in F$ et $y \in F$.

Comme $x \in F$, il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que : $x = \lambda_1 \otimes u_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes u_n$.

Comme $y \in F$, il existe des réels $\mu_1,\dots,\mu_n$ tels que : $y = \mu_1 \otimes u_1 \oplus \cdots \oplus \mu_n \otimes u_n$.

$x \oplus y = (\lambda_1 \otimes u_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes u_n) \ \oplus \ (\mu_1 \otimes u_1 \oplus \cdots \oplus \mu_n \otimes u_n)$.

$x \oplus y = (\lambda_1 \otimes u_1 \oplus \mu_1 \otimes u_1) \oplus (\lambda_2 \otimes u_2 \oplus \mu_2 \otimes u_2) \oplus \cdots \oplus (\lambda_n \otimes u_n \oplus \mu_n \otimes u_n)$.

$x \oplus y = (\lambda_1 + \mu_1) \otimes u_1 \oplus (\lambda_2 + \mu_2) \otimes u_2 \oplus \cdots \oplus (\lambda_n + \mu_n) \otimes u_n$.

On pose avec $\nu_i = \lambda_i + \mu_i \in \mathbb{R}$. : $x \oplus y = \nu_1 \otimes u_1 \oplus \cdots \oplus \nu_n \otimes u_n$

Donc, par définition de F: $x \oplus y \in F$.

***F* est stable par addition.**

Stabilité de F par multiplication scalaire

On doit montrer : Si $x \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha \otimes x \in F$.

Soit $x \in F$.

Il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que : $x = \lambda_1 \otimes u_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes u_n$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On calcule : $\alpha \otimes x = \alpha \otimes (\lambda_1 \otimes u_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes u_n)$.

$\alpha \otimes x = \big(\alpha \otimes (\lambda_1 \otimes u_1)\big) \oplus \cdots \oplus \big(\alpha \otimes (\lambda_n \otimes u_n)\big).$

$\alpha \otimes x = (\alpha\lambda_1) \otimes u_1 \oplus \cdots \oplus (\alpha\lambda_n) \otimes u_n.$, $\boldsymbol{\alpha\lambda_i} \in \mathbb{R}$

C'est une combinaison linéaire des u_i.

Donc, par définition : $\boldsymbol{\alpha \otimes x \in F}$.

F est stable par multiplication scalaire.

Donc F est un **sous-espace vectoriel** de E.

$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E