Sélection olympique : loi du nombre d'épreuves avant deux réussites

Pour être sélectionné aux Jeux olympiques, un athlète doit réussir **deux fois** à dépasser le minimum fixé par la fédération. Il a **une chance sur trois** de réussir à chaque épreuve à laquelle il participe. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'épreuves auxquelles il doit participer pour être sélectionné.

$Il\ a\ une\ probabilité\ de\ réussite :\ p = \frac{1}{3}$ à chaque épreuve donc une probabilité d'échec : $q = 1 - p = \frac{2}{3}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

X compte le nombre total d'épreuves jouées jusqu'au moment où l'athlète obtient sa deuxième réussite.

Donc :

- si l'athlète réussit les deux premières épreuves, alors $X = 2$;
- s'il obtient sa deuxième réussite à la 3e épreuve, alors $X = 3$;
- s'il obtient sa deuxième réussite à la 4e épreuve, alors $X = 4$, etc.

Ainsi, les valeurs possibles de Xsont : $2,3,4,5, \ldots$

On ne peut pas avoir $X = 1$, puisque pour être sélectionné il faut deux réussites.

Calculer $P(X = n)$

$Cherchons\ la\ probabilité\ que :\ X = n$

Cela signifie :

- avant la n-ième épreuve, c'est-à-dire dans les $n - 1$ premières épreuves, l'athlète a obtenu **exactement une seule réussite** ;
- puis la n-ième épreuve est une **réussite**, ce qui lui donne sa 2e réussite au total.

Donc l'événement ($X = n$) se décrit ainsi :

1. dans les $n - 1$premières épreuves : exactement 1 succès ;
2. à la n-ième épreuve : succès.

Probabilité d'avoir exactement 1 succès parmi les $n - 1$ premières épreuves

Parmi les $n - 1$ premières épreuves, il faut choisir **la place de l'unique réussite**.

$Il\ y\ a\ donc :\ \binom{n-1}{1} = n - 1$ possibilités.

Pour une disposition donnée :

- $1\ réussite\ a\ une\ probabilité\ \frac{1}{3}$,
- $les\ n - 2\ échecs\ ont\ une\ probabilité\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

$La\ probabilité\ d'avoir\ exactement\ 1\ réussite\ dans\ les\ n - 1\ premières\ épreuves\ vaut :$

$$(n - 1) \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

La n-ième épreuve doit être une réussite

$La\ probabilité\ que\ la\ n-ième\ épreuve\ soit\ une\ réussite\ est\ \frac{1}{3}.$

$$Donc\ P(X=n)=(n-1)\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\times\frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{\forall\, n\geq 2, P(X=n)=(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{n-1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}$$

Vérification sur les premières valeurs

Cas $X=2$: Pour être sélectionné dès la 2e épreuve, il faut réussir la 1re et réussir la 2e.

$$Donc\ P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

Vérifions avec la formule : $P(X=2)=\frac{2-1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=\frac{1}{9}$

Cas $X=3$: Pour être sélectionné à la 3e épreuve, il faut avoir exactement 1 réussite sur les 2 premières épreuves, puis réussir la 3e.

Les deux premiers résultats possibles sont

- réussite, échec ;
- échec, réussite.

Chaque cas a pour probabilité : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}.$

Donc "exactement une réussite sur les deux premières" vaut : $2\times\frac{2}{9}=\frac{4}{9}.$

Puis il faut réussir la 3e : $P(X=3)=\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}.$

Avec la formule : $P(X=3)=\boldsymbol{\frac{n-1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}=\frac{3-1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}=\frac{2}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}.$

2. Si cet athlète peut participer à **au plus quatre épreuves**, quelle est la probabilité qu'il soit sélectionné ?

"Participer à au plus quatre épreuves" signifie qu'il ne peut jouer que 4 épreuves maximum.

Il sera sélectionné s'il obtient ses **deux réussites avant ou au plus tard à la 4e épreuve**.

Autrement dit, on cherche : $P(X\leq 4).$

Donc : $P(X\leq 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4).$

Calcul à partir de la loi trouvée

Nous avons : $P(X=2)=\frac{1}{9}, P(X=3)=\frac{4}{27}, P(X=4)=\frac{4}{27}.$

Donc : $P(X\leq 4)=\frac{1}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}$ Ainsi : $P(X\leq 4)=\frac{11}{27}\approx 40{,}7\%$