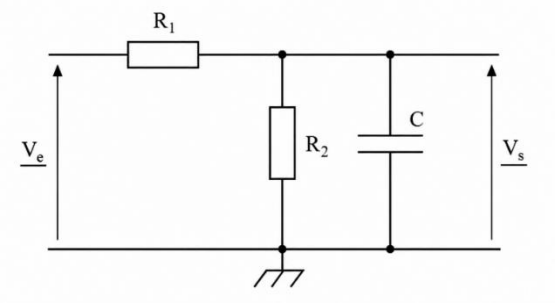
Filtrage actif

Soit le montage suivant :



On est en régime sinusoïdal forcé : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$

1. Faites une étude succincte du filtre (aux fréquences limites). Prédéterminez le type de filtre réalisé.

À **BF** : $\boldsymbol{f \to 0} \iff \omega \to 0 \Rightarrow Z_C = \dfrac{1}{j\omega C} \Rightarrow |\, Z_C \,| \to +\infty = \textit{circuit ouvert}$

Le montage $\iff$ diviseur de tension résistif : $\underline{V_s} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\underline{V_e} \Rightarrow \underline{H}(0) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$

Le signal basse fréquence est transmis, mais atténué.

À **HF** : $\boldsymbol{f \to +\infty} \iff \omega \to +\infty \Rightarrow |\, Z_C \,| = \dfrac{1}{\omega C} \to 0$: **court − circuit** : $\underline{V_s} \to 0 \Rightarrow \underline{H}(+\infty) = 0$

Le montage atténue les hautes fréquences.

Conclusion : *Le montage laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes fréquences.*

C'est un filtre passe-bas passif du premier ordre.

2. Calculez la fonction de transfert du montage ci-dessus.

$$Z_p = R_2 // Z_C \; et \; Z_C = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow Z_p = \frac{R_2 \times \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$$

$$\underline{V_s} = \frac{Z_p}{R_1 + Z_p}\underline{V_e} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{Z_p}{R_1 + Z_p} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}} = \frac{R_2}{R_1(1 + j\omega R_2 C) + R_2}$$

$$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}$$

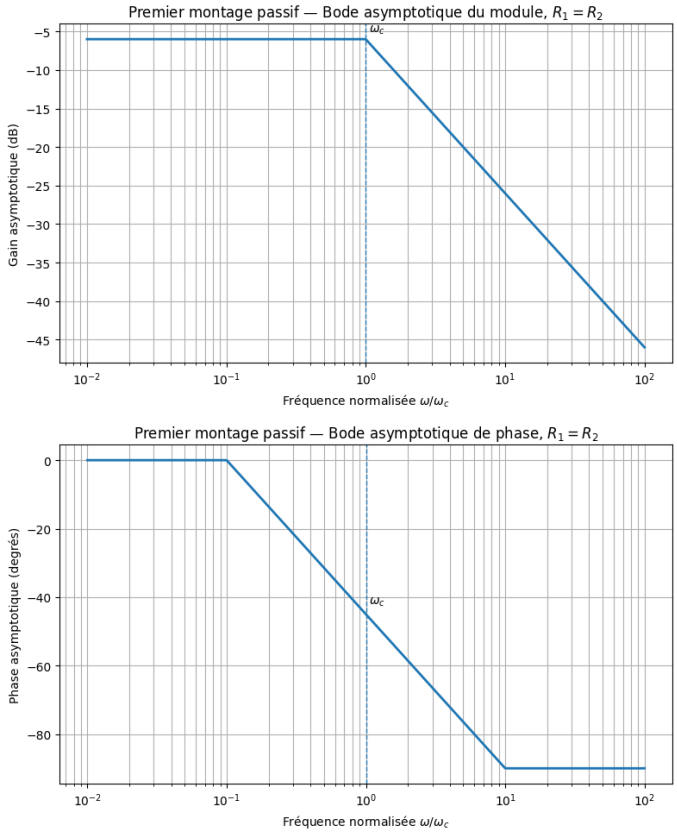
$$\Rightarrow \boldsymbol{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \; \text{avec} \; H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

Pulsation de coupure : $\boldsymbol{\omega_c = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}$

Fréquence de coupure : $\boldsymbol{f_c = \dfrac{R_1 + R_2}{2\pi R_1 R_2 C}}$

3. Pour $R_1 = R_2$, tracez les diagrammes asymptotiques de Bode.

$$R_1 = R_2 = R \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + j\omega \frac{R}{2} C} = \frac{\boldsymbol{H_0}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{j\omega\tau}} \textbf{ avec } \boldsymbol{H_0} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$



$\Rightarrow$ le gain statique $20\log(\boldsymbol{H_0}) = -6$ dB

$\Rightarrow \boldsymbol{f_c} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pi RC}}$

Gain : $\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \dfrac{1/2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$

$En\ dB :\ G_{dB} = 20\log\left|\underline{H}(j\omega)\right|$

$G_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{2}\right) - 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$

Asymptotes :

Pour $\omega \ll \omega_c \Rightarrow G_{dB} \approx -6$ dB

Pour $\omega \gg \omega_c \Rightarrow G_{dB} \approx -6 - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

$\Rightarrow$ la pente après coupure est -20 dB/décade

Phase : $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

$\Rightarrow \varphi(0) = 0°$

$\Rightarrow \varphi(\omega_c) = -45°$

$\Rightarrow \varphi(+\infty) = -90°$

4. Quel est le gain maximum de ce filtre ? Peut-on augmenter ce gain ?

Le gain maximal est obtenu à basse fréquence : $H_{\max} = H_0 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$

$R_1 > 0\ et\ R_2 > 0 \Rightarrow \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} < 1 \Rightarrow H_{\max} < 1 \Rightarrow G_{\max} = 20\log\left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\right) < 0$ dB

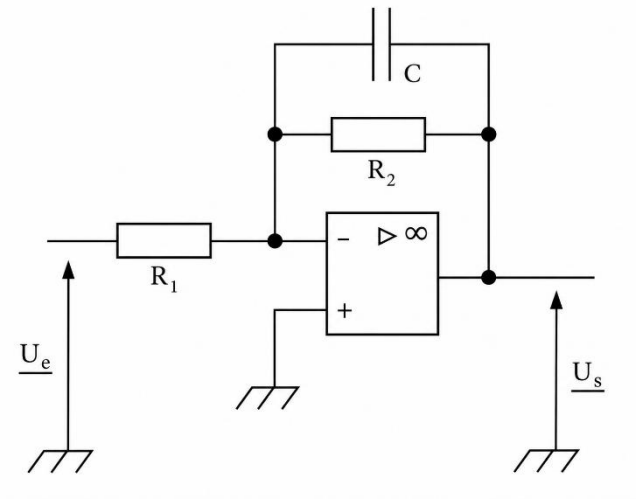
$R_1 = R_2 :\ H_{\max} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow G_{\max} \approx -6$ dB

Avec ce montage passif, on ne peut pas obtenir un gain supérieur à 1.

On peut seulement réduire l'atténuation en prenant : $R_2 \gg R_1 \Rightarrow \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 1$

Mais $H_{\max} \leq 1 \Rightarrow$ un filtre passif ne peut pas amplifier.

Soit le montage suivant :



5. Faites une étude succincte du filtre (aux fréquences limites). Prédéterminez le type de filtre réalisé.

La contre − réaction est constituée de $R_2//C$:

$$avec\ Z_C = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow Z_f = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$$

À **BF** : $\boldsymbol{f \to 0} \Leftrightarrow \omega \to 0 \Rightarrow Z_f \simeq R_2 \Rightarrow \underline{V_s} = -\frac{R_2}{R_1}\underline{V_e}$

$$\Rightarrow \underline{H}(0) = -\frac{R_2}{R_1}$$

À **HF** : $f \to +\infty \Leftrightarrow \omega \to +\infty \Rightarrow Z_f \to 0$

Fonctiondetransfertd'uninverseur: $\underline{H}(j\omega) = -\frac{Z_f}{R_1}$

$$\Rightarrow \underline{H}(+\infty) \to 0 \Rightarrow \underline{V_s} \to 0$$

Conclusion : Le montage transmet les basses fréquences et coupe les hautes fréquences.

C'est un filtre passe-bas **actif** inverseur du premier ordre

6. Donnez la fonction de transfert du montage ci-dessus.

Millman s'applique sur la borne inverseuse de l'AOP : $\underline{V_-}$

l'AOP est idéal et la borne + est reliée à la masse : $\underline{V_+} = 0 \Rightarrow \underline{V_-} = \underline{V_+} = 0$

La borne inverseuse est reliée :

- à $\underline{U_e}$ par R_1;
- à $\underline{U_s}$ par R_2;
- à $\underline{U_s}$ par $\frac{1}{j\omega C}$

$$\Rightarrow \underline{V_-} = \frac{\frac{\underline{U_e}}{R_1} + \frac{\underline{U_s}}{R_2} + j\omega C\,\underline{U_s}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C} = 0 \Rightarrow \frac{\underline{U_e}}{R_1} + \frac{\underline{U_s}}{R_2} + j\omega C\underline{U_s} = 0 \Rightarrow \frac{\underline{U_e}}{R_1} + \underline{U_s}\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right) = 0 \Rightarrow \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = -\frac{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R_1}}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R_2}} + \boldsymbol{j\omega C}}$$

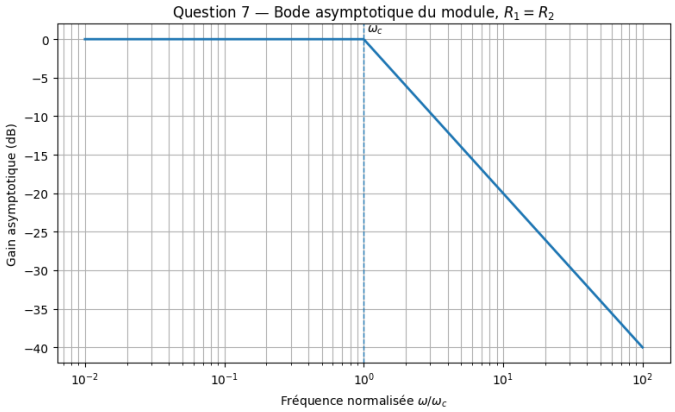
$$\Rightarrow \boldsymbol{\underline{H}(j\omega) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + j\omega R_2 C}}$$

7. Pour $R_1 = R_2$, tracez les diagrammes asymptotiques de Bode.

$$R_1 = R_2 = R \Rightarrow H_0 = -\frac{R}{R} = -1 \Rightarrow |\,\underline{H_0}\,| = 1 \Rightarrow 20\log\left|\underline{H_0}\right| = 0\ \text{dB}$$

$$\tau = RC \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$



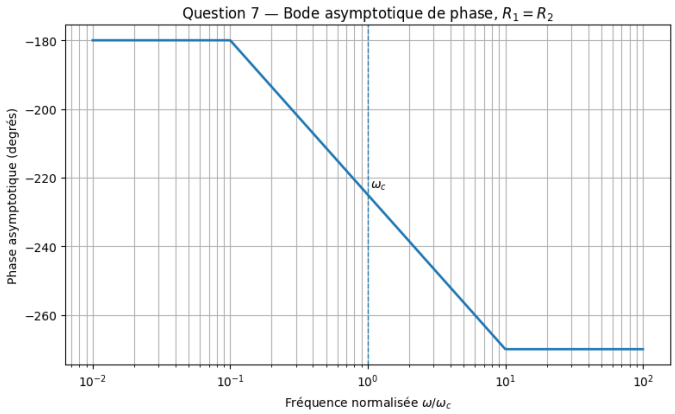
Module : $|\underline{H}_0| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$

$G_{dB} = -10\log\left(1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$

Asymptotes :

- pour $\omega \ll \omega_c$: $G_{dB} \approx 0$ dB
- pour $\omega \gg \omega_c$: $G_{dB} \approx -20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$

Pente : -20 dB/décade



Phase

Le signe $-$ajoute un déphasage de $180°$ ou $-180°$.

$\underline{H}(j\omega) = -\dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$

$\Rightarrow \arg(\underline{H}) = \arg(-1) - \arg\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$

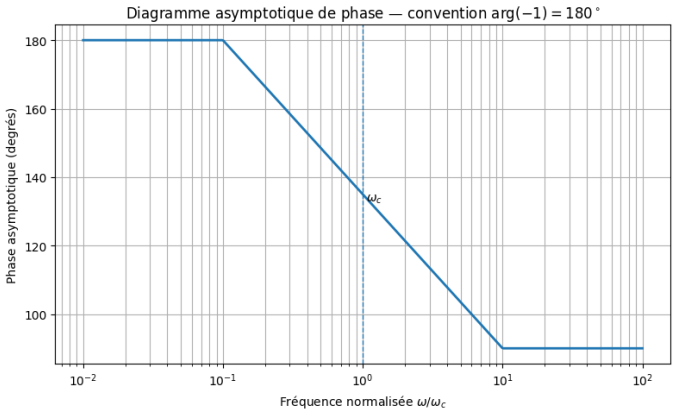
En prenant $\arg(-1) = -180°$:

$\Rightarrow \varphi(\omega) = -180° - \arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$

$\Rightarrow \varphi(0) = -180°$

$\Rightarrow \varphi(\omega_c) = -225°$

$\Rightarrow \varphi(+\infty) = -270°$



En prenant $\arg(-1) = 180°$:

$\Rightarrow \varphi(\omega) = 180° - \arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$

$\Rightarrow \varphi(0) = 180°$

$\Rightarrow \varphi(\omega_c) = 135°$

$\Rightarrow \varphi(+\infty) = 90°$

8. Quelles sont les différences avec le filtre du premier montage ?

Premier montage : $\underline{H}_1(j\omega) = \dfrac{\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}{1+j\omega(R_1//R_2)C}$: Filtre passif, non inverseur, atténuateur. $|H_{\max,1}| = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} < 1$

$\Rightarrow$ il ne peut pas amplifier.

Deuxièmemontage: $\underline{H}_2(j\omega) = -\dfrac{R_2}{R_1}\dfrac{1}{1+j\omega R_2 C}$:Filtre actif, inverseur, amplificateur: $|H_{\max,2}| = \dfrac{R_2}{R_1}$

Ce gain peut être supérieur à 1 *si* $R_2 > R_1$

9. Quel rapport doit-il y avoir entre R_1et R_2 pour que le gain maxi soit de $+6dB$?

$|H_{\max}| = \dfrac{R_2}{R_1}$ *avec* $G_{\max} = +6$ dB

$G_{\max} = 20\log\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow 20\log\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) = 6 \Rightarrow \log\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) = 0{,}3 \Rightarrow \dfrac{R_2}{R_1} = 10^{0,3} \approx 1{,}995 \Rightarrow \boxed{\dfrac{R_2}{R_1} \approx 2}$

Conclusion : Pour obtenir un gain maximal de $+6$ dB, il faut choisir $R_2 \simeq 2R_1$