Exercices de mathématiques suites et fonctions

Exercice : On admet que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $\sum_{k=1}^{k=n} x^k = 1$, admet une unique solution dans $[0,1]$.

On note cette solution x_n.

$$\sum_{k=1}^{k=n} x^k = 1 \text{ donc } x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = 1 \qquad\qquad x + x^2 - 1 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} x^k = 1 \text{ donc } x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} = 1 \qquad\qquad x + x^2 + x^3 - 1 = 0$$

1. Montrer que la suite (x_n) est décroissante et bornée inférieurement par 0.

On note $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$, $x \in [0,1]$

Par hypothèse, $\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*, \exists\,!\ \mathbf{x_n} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}] \,/\, \mathbf{f_n}(\mathbf{x_n}) = \mathbf{1}$.

$\forall\, k \geq 1$ et $\forall\, x \in [0,1]$, x^k est croissant car $\left(x^k\right)' = kx^{k-1} \geq 0$

Donc f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ car f_n est la somme de plusieurs fonctions croissantes .

De plus, $\mathbf{f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{\,n+1}}$

Ainsi, $\forall\, x \in [0,1]$, on a $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

Cas particulier pour $x = x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\quad f_{n+1}(x_n) = \mathbf{f_n(x_n)} + x_n^{n+1} = \mathbf{1} + x_n^{n+1} > 1$

Comme f_{n+1} est strictement croissante et que $\mathbf{f_{n+1}(x_{n+1})} = \mathbf{1}$ alors si $f_{n+1}(x_n) > 1$ alors $x_{n+1} < x_n$ donc (x_n) est décroissante.

(x_n) est strictement décroissante et comme $x_n \in [0,1]$, elle est en plus bornée inférieurement par 0.

2. Montrer que la suite (x_n) converge vers $\frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{k=n} x^k = 1 \text{ donc } x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = 1$$

On a une somme géométrique avec : $u_1 = x$ et $q = x$ et nombre de termes $= n$.

$S_n \quad = \mathbf{x} + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

$x.\,S_n = \quad\quad x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathbf{x^{n+1}}$

$\mathbf{S_n} - \mathbf{xS_n} = \mathbf{x} - \mathbf{x^{n+1}}$ donc $(1-x)S_n = x - x^{n+1}$ donc $\mathbf{S_n} = \mathbf{x}\dfrac{\mathbf{(1-x^n)}}{\mathbf{(1-x)}} = u_1\dfrac{(1-q^n)}{(1-q)}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} x^k = x\frac{1-x^n}{1-x} = 1$$

On a $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \dfrac{\mathbf{x(1 - x^n)}}{\mathbf{1 - x}}$, $x \in [0,1]$ et $\exists\,!\, x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 1$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ or si je veux $f_n(x_n) = 1$ alors $x_n > \frac{1}{2}$

La suite (x_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, elle converge donc vers une limite $\boldsymbol{\ell} \geq \frac{1}{2}$

Pour $x > \frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{x}{1-x} > 1$

Ainsi, à partir d'un certain rang, $f_n(x) > 1$ et donc $x_n < x$.

En choisissant $x = \frac{1}{2} + \varepsilon$, on obtient $\frac{1}{2} < x_n < \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Par encadrement, quand ε tend vers 0, $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{\frac{1}{2}}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

Exercice : Soit $\mathbf{f : x \mapsto \arcsin(1 - 2\cos^4(x))}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

Domaine de définition.

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \in [-1,1] \implies \cos^4(x) \in [0,1]$

Donc $-2\cos^4(x) \in [-2,0] \implies 1 - 2\cos^4(x) \in [-1,1]$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(x)$ est définie sur $[-1,1]$

Conclusion : $\mathbf{D(f)} = \mathbb{R}$

f est − elle continue sur son domaine ?

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $1 - 2\cos^4(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\arcsin(x)$ est continue sur $[-1,1]$.

Comme $1 - 2\cos(x)^4$ reste dans $[-1,1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la composée est continue.

Conclusion : **f est continue sur $\mathbb{R}$.**

2. Montrer que f est périodique. Quelle est la parité de f ?

Comme $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, *on a* $\cos^4(x+\pi) = \cos^4(x)$ *donc* $1 - 2\cos^4(x+\pi) = 1 - 2\cos^4(x)$

Ainsi la fonction $1 - 2\cos^4(x)$ *est π périodique*. On note $g(x) = 1 - 2\cos^4(x)$

arcsin *est une fonction définie sur* $[-1,1]$

$f(x+T) = \arcsin(g(x+T)) = \arcsin(g(x)) = f(T)$

$1 - 2\cos^4(x+T) = 1 - 2\cos^4(T)$

$\cos^4(x+T) = \cos^4(T)$

On a deux cas : $\cos(x+T) = \pm\cos(T)$

$\cos(x+T) = \cos(T)$ *alors* $T = 2\pi$

$\cos(x+T) = -\cos(T)$ *alors* $T = \pi$

Donc f est π périodique.

Déterminer un intervalle minimal I sur lequel étudier f.

Soit $T > 0$ *une période de* f*. Alors* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad 1 - 2\cos^4(x+T) = 1 - 2\cos^4(x)$ *donc* $\cos^4(x+T) = \cos^4(x)$

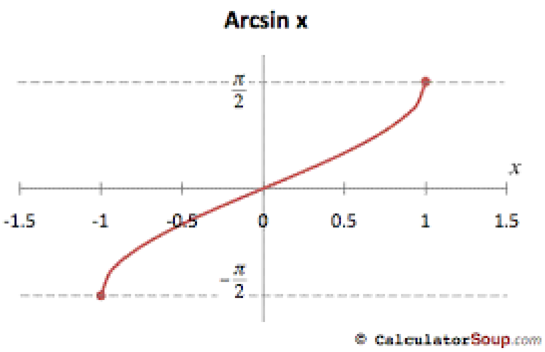
En particulier en $x = 0$, $\cos^4(0+T) = \cos^4(0)$ *donc* $\cos^4(T) = 1$ *donc* $\cos(T) = \pm 1$

Donc toute période est un multiple de π*.*

3. f est – elle dérivable sur $]0, \pi/2[$ **?**

$f(x) = \arcsin\left(1 - 2\cos^4(x)\right)$

Dérivabilité sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$



Sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(x) \in]0,1[$ donc $-1 < 1 - 2\cos^4(x) < 1$)

Calculer $\mathbf{f'(x)}$ **sur cet intervalle.**

$\arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\left(1 - 2\cos^4(x)\right)$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Calcul de $f'(x) = \left(\arcsin\left(u(x)\right)\right)' = \dfrac{u(x)'}{\sqrt{1 - u(x)^2}} = \dfrac{-8\cos^3(x) \times \left(-\sin(x)\right)}{\sqrt{1 - \left(1 - 2\cos^4(x)\right)^2}} = \dfrac{8 \times \cos^3(x) \times \sin(x)}{\sqrt{1 - \left(1 - 2\cos^4(x)\right)^2}}$

Simplification du dénominateur

$$1 - \left(1 - 2\cos^4(x)\right)^2 = 1 - 1 + 4\cos^4(x) - 4\cos^8(x) = 4\cos^4(x) - 4\cos^8(x) = 4\cos^4(x) \times \left(1 - \cos^4(x)\right)$$

$$\sqrt{1 - \left(1 - 2\cos^4(x)\right)^2} = 2\cos^2(x) \times \sqrt{1 - \cos^4(x)} = 2\cos^2(x) \times \sqrt{\left(1 - \cos^2(x)\right) \times \left(1 + \cos^2(x)\right)}$$

$$= 2\cos^2(x) \times \sqrt{\sin^2(x) \times \left(1 + \cos^2(x)\right)} = 2\cos^2(x) \times \sin(x)\sqrt{\left(1 + \cos^2(x)\right)}$$

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, f'(x) = \frac{8 \times \cos^3(x) \times \sin(x)}{2\cos^2(x) \times \sin(x)\sqrt{\left(1 + \cos^2(x)\right)}} = \frac{\mathbf{4 \times \cos(x)}}{\sqrt{\mathbf{\left(1 + \cos^2(x)\right)}}}$$

Exercice : Soit $\mathbf{u} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **telle que, pour tout** $\mathbf{n} \geq \mathbf{3}$**, et pour tout** $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$**,** $|\mathbf{u}_n - \mathbf{1}| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$**.**

Que peut − on dire de la suite u ?

On fixe $n \geq 3, \forall \varepsilon > 0,$ l'écart $|u_n - 1| \leq \varepsilon$

On pose $a = |u_n - 1| \geq 0 : \forall \varepsilon > 0$ on a : $a \leq \varepsilon$

- On suppose que $a > 0$
- $\forall \varepsilon > 0$ (condition), on prends $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$
- On obtient $a \leq \frac{a}{2}$, impossible si $a > 0$ car $\frac{a}{2} < a$
- donc nécessairement $\mathbf{a = 0}$
- $|u_n - 1| = 0$, donc $u_n = 1$ pour ce rang n

$\forall\, n \geq 3$, on a : $u_n = 1$

La suite est donc stationnaire à partir de 3 et converge vers 1.