

Réserve marine et famille de plan

1.

$$U_{n+1} = (U_n + 80) \times (1 - 5\%)$$

$$U_{n+1} = 0,95 \times U_n + 0,95 \times 80$$

$$U_{n+1} = 0,95 \times U_n + 76$$

2.

~~$$f(x) = 0,95x + 76 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } U_{n+1} = f(U_n)$$~~

U_0	3000
U_1	2926
U_2	2856
U_3	2789
U_4	2725
U_5	2665
U_6	2608
U_7	2554

3.a. A démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1520$

Par récurrence :

Initialisation $U_0 = 3000 \geq 1520$

On fait l'hypothèse que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1520$

On calcule, U_{n+1}

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1520$$

$$0,95 \times U_n \geq 1444$$

$$0,95 \times U_n + 76 \geq 1520$$

$$U_{n+1} \geq 1520$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse est vraie : $U_n \geq 1520$

3.b.

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = 0,95 \times U_n + 76 - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = 76 - 0,05 \times U_n$$

$$\text{or } U_n \geq 1520 \text{ donc } 0,05 \times U_n \geq 76$$

$$76 - 0,05 \times U_n \leq 0$$

$U_{n+1} - U_n \leq 0$, La suite U_n est donc décroissante

3.c. $U_{n+1} = 0,95 \times U_n + 76$

Soit m la lte de U_{n+1} , $m = 0,95 \times m + 76$

$$0,05 \times m = 76$$

$$m = 1520$$

La suite (U_n) est décroissante et convergente vers la limite $m = 1520$

4. $U_0 = 3000$ et (U_n) est décroissante et minoré par $m = 1520$ donc $\exists ! n \in \mathbb{N} / U_n \leq 2000$

5.

def cetaces():

 n = 0

 c = 3000

 while c >= 2000:

 n = n + 1

 c = 0.95 * c + 76

 return n

1.

$$(P) : x + y + z = 0 \text{ de vecteur normal } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } (Q) : 2x + 3y + z - 4 = 0 \text{ de vecteur normal } \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans sont sécants suivant une droite

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \text{ avec } t \text{ réel} \\ t + y + z = 0 \\ 2t + 3y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t - z \\ 2t + 3(-t - z) + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t - z \\ z = -\frac{t}{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{t}{2} + 2 \\ z = -\frac{t}{2} - 2 \end{cases}$$

$$\text{Equation paramétrique de la droite sécante : } \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{t}{2} + 2 \\ z = -\frac{t}{2} - 2 \end{cases}$$

$$\text{Equation de la droite (D) : } x + y + z = 0 \text{ de vecteur normal } \vec{n'} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Droite avec le vecteur directeur : } \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ qui passe par le point : } (0 ; 2 ; -2)$$

2.

$$(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$$

$$(x + y + z) - \lambda(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$$

$$x + y + z - \lambda x - \lambda y - \lambda z + 2\lambda x + 3\lambda y + \lambda z - 4\lambda = 0$$

$$x + y + z - \lambda x - \lambda y - \lambda z + 2\lambda x + 3\lambda y + \lambda z - 4\lambda = 0$$

$$(1 + \lambda)x + (1 + 2\lambda)y + z - 4\lambda = 0 \text{ de vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 1 + 2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Produit scalaire des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{n'}$

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 1 + 2\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (1 + \lambda) - \frac{1}{2}(1 + 2\lambda) - \frac{1}{2} = 1 + \lambda - \frac{1}{2} - \lambda - \frac{1}{2} = 0. \text{ Ses deux vecteurs sont orthogonaux}$$

La droite appartient bien au plan (P_λ)

3.

$$\text{vecteur normal au plan } P_\lambda : \vec{n} \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 1 + 2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.a.

Soit un vecteur normal au plan P_λ : $\vec{n} \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1+2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal au plan P : $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

P_λ et P parallèle ssi leur vecteurs normaux sont colinéaires :

$$\exists k \text{ réel, tel que } \vec{n} = k \times \vec{n}' : \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1+2\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = k \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda = k \\ 1+2\lambda = k \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 0$$

4.b.

Soit vecteur normal au plan P_λ : $\vec{n} \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1+2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur appartenant au plan P : $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

P_λ et P perpendiculaires ssi $\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$:

$$\vec{n} \cdot \vec{w} = 0 : \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1+2\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+\lambda) + (1+2\lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

5.

- $(d_\lambda) \in (P_\lambda) : (1+\lambda)x + (1+2\lambda)y + z - 4\lambda = 0$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1+2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$
- $A(-4; 4; 0) \in (d_\lambda)$
- $(d_\lambda) \perp (d)$ alors le produit scalaire de leur vecteur directeur est nul

On veut une représentation paramétrique de (d_λ)

Dans un repère de l'espace, la droite d passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\{ x = x_0 + at; y = y_0 + bt; z = z_0 + ct$ Ce système d'équation est appelé une représentation paramétrique de d .

Dans notre cas : (d_λ) passant par $A(-4; 4; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\{ x = -4 + at; y = 4 + bt; z = ct$

$$(d_\lambda) : \begin{cases} x = -4 + a.t \\ y = 4 + b.t \\ z = c.t \end{cases} \text{ de vecteur directeur : } \vec{u}_\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$(d_\lambda) \in (P_\lambda) \text{ ssi } \vec{n} \cdot \vec{u}_\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1+2\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a(1+\lambda) + b(1+2\lambda) + c = 0$$