Refroidissement modélisé – Les suites

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80°C dans un milieu dont la température exprimée en degré Celsius, supposée constante notée **M**.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton.

Pour tout entier naturel **n**, on note $\mathbf{T_n}$ la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0=80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et n+1 par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k\,(T_n - M),$$

où k est une constante réelle.

On choisit M = 10 et k = −0,2.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?

La température va diminuer jusqu'à la valeur M

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2$.

$$T_{n+1} - T_n = k\,(T_n - M)$$

$$T_{n+1} = T_n - 0{,}2(T_n - 10)$$

$$T_{n+1} = T_n - 0{,}2T_n + 2$$

$$T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2 \qquad \text{cqfd}$$

3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.

$u_{n+1} = T_{n+1} - 10$ $u_{n+1} = 0{,}8T_n + 2 - 10$ $u_{n+1} = 0{,}8T_n - 8$ or $T_n = u_n + 10$ $u_{n+1} = 0{,}8(u_n + 10) - 8$ $u_{n+1} = 0{,}8u_n$	$u_{n+1} = 0{,}8u_n$ $u_n = 0{,}8u_{n-1}$ $u_{n-1} = 0{,}8u_{n-2}$ … $u_2 = 0{,}8u_1$ $u_1 = 0{,}8u_0$	$u_n = 0{,}8^n * u_0$ suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = T_0 - 10 = 70$ $u_n = 70*0{,}8^n$

b. Montrer que, que pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70\times0{,}8^n + 10$.

$u_n = 70*0{,}8^n$

$T_n = u_n + 10.$

$T_n = 70*0{,}8^n + 10$ cqfd

c. Déterminer la limite de la suite (T_n) .

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty}(70 \times 0{,}8^n + 10) = 10$$