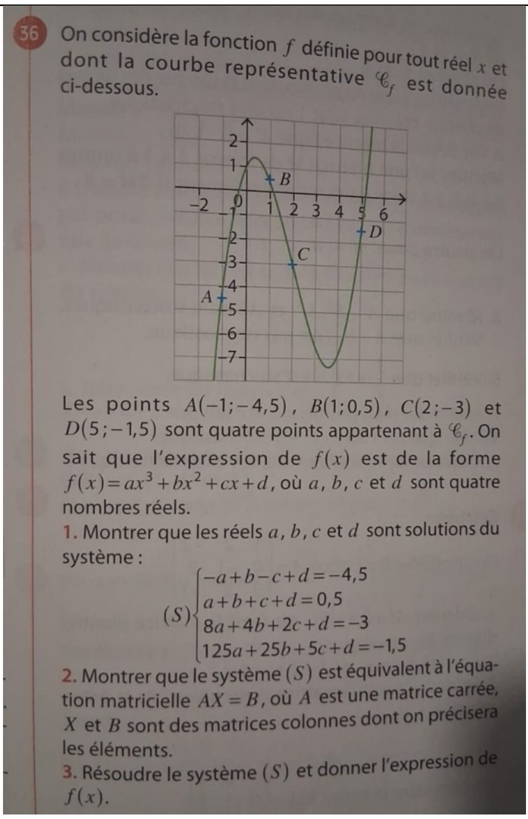
Matrices - Terminale, mathématiques expertes



36 On considère la fonction f définie pour tout réel x et dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.

Les points $A(-1;-4{,}5)$, $B(1;0{,}5)$, $C(2;-3)$ et $D(5;-1{,}5)$ sont quatre points appartenant à $\mathscr{C}_f$. On sait que l'expression de $f(x)$ est de la forme $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, où a, b, c et d sont quatre nombres réels.

1. Montrer que les réels a, b, c et d sont solutions du système :

$$(S)\begin{cases}-a+b-c+d=-4{,}5\\ a+b+c+d=0{,}5\\ 8a+4b+2c+d=-3\\ 125a+25b+5c+d=-1{,}5\end{cases}$$

2. Montrer que le système (S) est équivalent à l'équation matricielle $AX=B$, où A est une matrice carrée, X et B sont des matrices colonnes dont on précisera les éléments.

3. Résoudre le système (S) et donner l'expression de $f(x)$.

c

1.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$A(-1;-4{,}5)\ \ donne\ f(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d$$

$$f(-1) = \boldsymbol{-a+b-c+d=-4,5}$$

$$B(1;0{,}5)\ donne\ f(x) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d$$

$$f(x) = \boldsymbol{a+b+c+d=0,5}$$

$$C(2;-3)\ donne\ f(x) = a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d$$

$$f(x) = \boldsymbol{8a+4b+2c+d=-3\ donne}\ D(5,-1{,}5)$$

$$f(x) = a(5)^3 + b(5)^2 + c(5) + d$$

$$f(x) = \boldsymbol{125a+25b+5c+d=-1,5}$$

Les réels a, b, c et d sont bien solution du système S

2. Equation matricielle

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{8} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{125} & \boldsymbol{25} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix}\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{-4,5}\\ \boldsymbol{0,5}\\ \boldsymbol{-3}\\ \boldsymbol{-1,5}\end{pmatrix}\ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{d}\end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{cases}-a+b-c+d=-4{,}5 & :\ (L1)\\ a+b+c+d=0{,}5 & :\ (L2)\\ 8a+4b+2c+d=-3 & :\ (L3)\\ 125a+25b+5c+d=-1{,}5 & :\ (L4)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{-a+b-c+d=-4,5} & :\ (L1)\\ 2a+2c=5 & :\ (L2)-(L1):(L5)\\ 9a+3b+3c=1{,}5 & :\ (L3)-(L1):(L6)\\ 126a+24b+6c=3 & :\ (L4)-(L1):(L7)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{-a+b-c+d=-4,5} & :\ (L1)\\ 120a+24b=-12 & :\ (L7)-3\times(L5):\ (L8)\\ 108a+18b=0 & :(L7)-2\times(L6):\ (L9)\\ \boldsymbol{126a+24b+6c=3} & :\ (L7)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{-a+b-c+d=-4,5} & :\ (L1)\\ 10a+2b=-1 & :\ (L8)\\ 6a+b=0 & :\ (L9)\\ \boldsymbol{42a+8b+2c=3} & :\ (L7)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{-a+b-c+d=-4,5} & :\ (L1)\\ -2a=-1 & :\ (L8)-2\times(L9)\\ \boldsymbol{6a+b=0} & :\ (L9)\\ \boldsymbol{42a+8b+2c=3} & :\ (L7)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{d=1}\\ \boldsymbol{c=2}\\ \boldsymbol{b=-3}\\ \boldsymbol{a=1/2}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{1};\boldsymbol{2};\boldsymbol{-3};\boldsymbol{1/2}\}$$

41 Raisonner On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,25 & 0,25\\ 0,25 & 0,5 & 0,25\\ 0,25 & 0,25 & 0,5\end{pmatrix}$. 1. Vérifier que $4A^2=5A-I$ où I est la matrice identité d'ordre 3. 2. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.	$A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,25 & 0,25\\ 0,25 & 0,5 & 0,25\\ 0,25 & 0,25 & 0,5\end{pmatrix}$

1.

$$A^2=\begin{pmatrix}0,5 & 0,25 & 0,25\\ 0,25 & 0,5 & 0,25\\ 0,25 & 0,25 & 0,5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,5 & 0,25 & 0,25\\ 0,25 & 0,5 & 0,25\\ 0,25 & 0,25 & 0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & Y & Y\\ Y & X & Y\\ Y & Y & X\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\times\begin{pmatrix}6 & 5 & 5\\ 5 & 6 & 5\\ 5 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$4A^2=\frac{1}{4}\times\begin{pmatrix}6 & 5 & 5\\ 5 & 6 & 5\\ 5 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$5A-I=5\times\begin{pmatrix}0,5 & 0,25 & 0,25\\ 0,25 & 0,5 & 0,25\\ 0,25 & 0,25 & 0,5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2 & 5/4 & 5/4\\ 5/4 & 3/2 & 5/4\\ 5/4 & 5/4 & 3/2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\times\begin{pmatrix}6 & 5 & 5\\ 5 & 6 & 5\\ 5 & 5 & 6\end{pmatrix}=4A^2$$

2.

Définition : Une matrice carrée A ∈ $M_n(R)$ est inversible s'il existe une matrice B ∈ $M_n(R)$ telle que AB = BA = I_n. La matrice B est alors notée A^{-1} et on l'appelle matrice inverse de la matrice A.

$$5A-I=4A^2$$

$$I=5A-4A^2$$

$$I=A(5I-4A)$$

$$A^{-1}=(5I-4A)$$

La matrice carrée A ∈ $M_n(R)$ est inversible car il existe une matrice B ∈ $M_n(R)$ telle que AB = BA = I et B est sa matrice inverse, avec $B=5I-4A$

Calcul de A^{-1}

$$A^{-1}=5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0,5 & 0,25 & 0,25\\ 0,25 & 0,5 & 0,25\\ 0,25 & 0,25 & 0,5\end{pmatrix}=$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$