Exponentielle, logarithme, puissance

Rappels de cours :

$\begin{cases} y = e^x \\ y > 0,\ x \text{ réel} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0,\ x \text{ réel} \end{cases}$	$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\ln(a^p) = p \times \ln(a)$ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, de fonction dérivée $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ donc la fonction ln est **continue** et **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$.

$\ln(x) < 0$ si $x < 1$ et $\ln(x) > 0$ si $x > 1$

$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ et $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Il y a trois formules de formes indéterminées à connaître :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

f - Fonction ln(u), où u est une fonction

Si u est une fonction dérivable et strictement positive alors : $\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$

73 **a.** Montrer que $\ln(\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{27}) = 2\ln(3)$.

b. Avec sa calculatrice, Rashana a obtenu ce qui suit :

ln(2e^3)+ln(e^1/2)

4

Justifier ce résultat.

c. Adel affirme que $x = e^{\frac{\ln(5)}{2}}$ est solution de l'équation $x^6 = 125$. A-t-il raison ? Justifier.

a.

$$\ln(\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{27}) = \frac{1}{2}\ln(3) + \frac{3}{2}\ln(3) = 2\ln(3)$$

b.

$$\ln(2e^3) + \ln\left(\frac{e^1}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{e^{-3}}\right) + \ln\left(\frac{e^1}{2}\right)$$

$$= \ln(2) - \ln(e^{-3}) + \ln(e^1) - \ln(2)$$

$$= \ln(2) + 3 + 1 - \ln(2) = 4$$

c.

$$x = e^{\frac{\ln(5)}{2}}$$

$$\begin{cases} y = e^x \\ y > 0,\ x \text{ réel} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0,\ x \text{ réel} \end{cases}$$

$$x^6 = e^{\frac{6 \times \ln(5)}{2}} = e^{3 \times \ln(5)} = \left(e^{\ln(5)}\right)^3 = (5)^3 = 125$$

95 La fonction f est définie sur l'intervalle [1,1 ; 8] par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{\ln(x)}.$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel x de [1,1 ; 8] :

$$f'(x) = \frac{2\ln(x) - 2 + \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}.$$

2. La fonction h est définie sur l'intervalle [1,1 ; 8] par :

$$h(x) = 2\ln(x) - 2 + \frac{1}{x}.$$

a. Montrer que, pour tout nombre réel x de [1,1 ; 8] :

$$h'(x) = \frac{2x-1}{x^2}.$$

b. En déduire les variations de la fonction h sur [1,1 ; 8].

c. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur [1,1 ; 8].

d. Encadrer α par deux entiers consécutifs.

3. En déduire le signe de $h(x)$ sur [1,1 ; 8].

4. Dresser le tableau de variations de f sur [1,1 ; 8].

Exercice 95 :

$$f(x) = \frac{2x-1}{ln(x)}$$

1. f est continue et définie sur I donc

$$f'(x) = \frac{(2x-1)' \times ln(x) - (2x-1)\big(ln(x)\big)'}{\big(ln(x)\big)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \times ln(x) - \frac{(2x-1)}{x}}{\big(ln(x)\big)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \times ln(x) - 2 + \frac{1}{x}}{\big(ln(x)\big)^2}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{f}' \textbf{existe}.$$

2. h est continue et définie sur I donc

$$h(x) = 2 \times ln(x) - 2 + \frac{1}{x}$$

a.

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{h'} \textbf{ existe}.$$

b.

$$\forall x \in I = [1,,1;8], h'(x) > 0 \; donc \; h(x) \; est \; croissante \; sur \; I$$

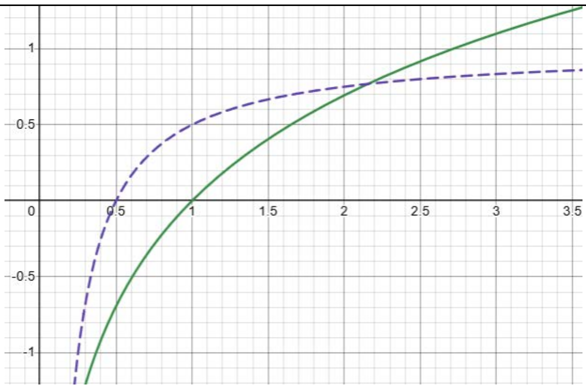
c.

$$h(1,1) = 2 \times ln(1,1) - 2 + \frac{1}{1,1} \approx -2,7 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad h(8) = 2 \times ln(8) - 2 + \frac{1}{8} \approx 2,3 > 0$$

$La\ fonction\ h(x)$ définie, continue et strictement croissante sur un intervalle $[1,,1;8]$ et $h(1,1) < 0\ et\ h(8) > 0$

L'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1,,1;8]$ d'après le **Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires**.

d.



$$h(x) = 2 \times ln(x) - 2 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow ln(x) - \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x}}\right) = 0$$

On trace les deux courbes $ln(x)\ et\ 1 - \frac{1}{2x}$

$$h(2) = 2 \times ln(2) - 2 + \frac{1}{2} \approx -0,11 < 0$$

$$h(3) = 2 \times ln(3) - 2 + \frac{1}{3} \approx 0,53 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < \alpha < 3$$

3.

$$x \in [1{,}1;\alpha], h(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\alpha\,;8], h(x) \geq 0$$

4.

On a :

$f(x) = \dfrac{2x-1}{ln(x)}$ $f(1{,}1) \approx 12{,}6$ $f(8) \approx 7{,}2$	$f'(x) = \dfrac{2 \times ln(x) - 2 + \frac{1}{x}}{\left(ln(x)\right)^2}$ $f'(x) = \dfrac{h(x)}{\left(ln(x)\right)^2}$	$h(x) = 2 \times ln(x) - 2 + \dfrac{1}{x}$	$x \in [1{,}1;\alpha], h(x) \leq 0$ $x \in [1{,}1;\alpha], f'(x) \leq 0$ $f\ est\ décroissante$ $x \in [\alpha\,;8], h(x) \geq 0$ $x \in [\alpha\,;8], f'(x) \geq 0$ $f\ est\ croissante$

x	1,1	α	8
$h(x)$	-		+
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	12,6 ↘	f(alpha)	↗ 7,2

113 Un fournisseur d'énergie envisage d'installer un parc éolien en pleine mer. On note x la distance, en dizaines de kilomètres, séparant le parc de la côte.

Pour des raisons techniques, l'installation doit se faire entre 2 et 12 km de la côte, c'est-à-dire $0{,}2 \leqslant x \leqslant 1{,}2$. Les ingénieurs spécialisés proposent de modéliser le bénéfice de ce parc, exprimé en centaines de milliers d'euros par année de fonctionnement, en fonction de la distance x de la côte, à l'aide de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x + \ln(-2x + 3).$$

a. À combien de kilomètres de la côte ce fournisseur d'énergie doit-il placer le parc éolien pour que son bénéfice soit maximal ?

b. Déterminer le bénéfice réalisé, en euros, en plaçant le parc à cette distance.

c. À partir de quelle distance x de la côte, exprimée en dizaines de kilomètres, le bénéfice dépasse-t-il 190 000 € ? En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Sujet adapté, Bac ES, Centres étrangers, juin 2011.

Exercice 113 :

$$0{,}2 \leq x \leq 1{,}2$$

$$f(x) = 2x + ln(-2x + 3)$$

a. Pour tout réel x de l'intervalle I = [0,2 ; 1,2]

$$f'(x) = 2 + \frac{-2}{(-2x+3)} = 2 + \frac{2}{(2x-3)} = \frac{4(x-1)}{(2x-3)}$$

Ainsi, la fonction f' est définie sur l'intervalle I

$$f'(x) = 0 \; si \; x = 1 \in I$$

x	0,2		1		1,2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1,36	↗	2	↘	1,89

$$f(0{,}2) \approx 1{,}36 \; ; \; f(1{,}2) \approx 1{,}89 \; ; \; f(1) = 2$$

Pour que son bénéfice soit maximal, le fournisseur d'énergie doit placer le parc à 10 kilomètres de la côte

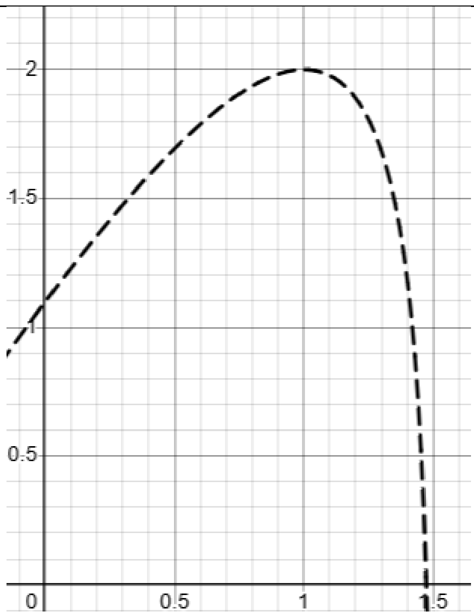
b.

$$\boldsymbol{f(1) = 2, Le\ bénéfice\ maximum\ est\ de\ 200\ milliers\ d'euros.}$$

c. Sur l'intervalle [0,2 ; **1**], la fonction f est dérivable donc continue, strictement croissante et

$$f(0{,}2) \approx 1{,}36 < 1{,}9 < f(1) = 2$$

Alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire l'équation $f(x) = 1{,}9$ admet une unique solution **α** appartenant à l'intervalle [0,2 ; **1**].



$$f(x) = 2x + ln(-2x + 3) = 1{,}9$$

$$f(0{,}74) = 2 \times 0{,}74 + ln(-2 \times 0{,}74 + 3) \approx 1{,}89$$

$$f(0{,}75) = 2 \times 0{,}75 + ln(-2 \times 0{,}75 + 3) \approx 1{,}91$$

Une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α obtenue à la calculatrice est α ≈ 0,75.

Le bénéfice dépassera 190 000 euros à partir d'une distance supérieure à α. Soit à une distance supérieure à 7,5 kilomètres de la côte.