

Limites - Continuité - Dérivation - Etude de fonctions

S6 f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$.

a. Justifier que l'ensemble de définition de f est $]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup [\frac{1}{2}; +\infty[$.

b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$ sur ceux-ci.

d. Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées.

Exercice 56 : f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$

a. Justifier que l'ensemble de définition de f est $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup [\frac{1}{2}, +\infty[$

f est définie si et seulement si $\frac{2x-1}{2x+1} \geq 0$ et si $(2x+1) \neq 0$.

On fait un tableau de signe de la fonction

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	-		0	+
$2x+1$	-	0		+
$\frac{2x-1}{2x+1}$	+		0	+

Domaine de définition de f : $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup [\frac{1}{2}, +\infty[$

b. calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{2x}{2x}} = 1$	$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{-2}{0^-}} = +\infty$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
---	---	---------------------------------

c. déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$ sur ceux-ci

Définition : f est dérivable en $a \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup [\frac{1}{2}, +\infty[$ si et seulement si : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \in \mathbb{R}$

I - Nombre dérivé et fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 un point de I .

a - Fonction dérivable

On dit que f est **dérivable** en x_0 si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

La fonction :	$h \rightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$	tend vers un réel L quand h tend vers 0.
La fonction :	$x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	tend vers un réel L quand x tend vers x_0 .

Si la fonction f est **dérivable** en tout point x_0 de l'intervalle I , on dit que la fonction f est **dérivable** sur I .

b - Nombre dérivé

Le réel L défini au paragraphe précédent est appelé le **nombre dérivé de la fonction f en a** et est noté : $f'(x_0)$. On note ainsi :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{\frac{2(a+h)-1}{2(a+h)+1}} - \sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}}}{h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{\frac{2(a+h)-1}{2(a+h)+1}} - \sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}}}{h} \times \frac{\sqrt{\frac{2(a+h)-1}{2(a+h)+1}} + \sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}}}{\sqrt{\frac{2(a+h)-1}{2(a+h)+1}} + \sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}}}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{2(a+h)-1}{2(a+h)+1} - \frac{2a-1}{2a+1}}{h \times \left(\sqrt{\frac{2(a+h)-1}{2(a+h)+1}} + \sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}} \right)}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{4h}{h \times ((2(a+h)+1) \times (2a+1)) \times \left(\sqrt{\frac{2(a+h)-1}{2(a+h)+1}} + \sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}} \right)}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{4}{((2(a+h)+1) \times (2a+1)) \times \left(\sqrt{\frac{2(a+h)-1}{2(a+h)+1}} + \sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}} \right)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{((2(a+h)+1) \times (2a+1)) \times \left(\sqrt{\frac{2(a+h)-1}{2(a+h)+1}} + \sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}} \right)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{4}{((2a+1) \times (2a+1)) \times \left(\sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}} + \sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}} \right)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{4}{(2a+1)^2 \times 2 \times \sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2}{(2a+1)^2 \times \sqrt{\frac{2a-1}{2a+1}}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2}{(2a+1)^2} \times \sqrt{\frac{2a+1}{2a-1}} = f'(a)$$

$$f'(a) \text{ existe si et seulement si } a \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$f(x) \text{ est dérivable si et seulement si } x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

Dérivée de la fonction :

$$\sqrt{w} \rightarrow \frac{w'}{2\sqrt{w}} \text{ si } w > 0$$

Dans notre cas

$$w = \frac{u}{v} \text{ avec } u = 2x-1 \text{ et } v = 2x+1$$

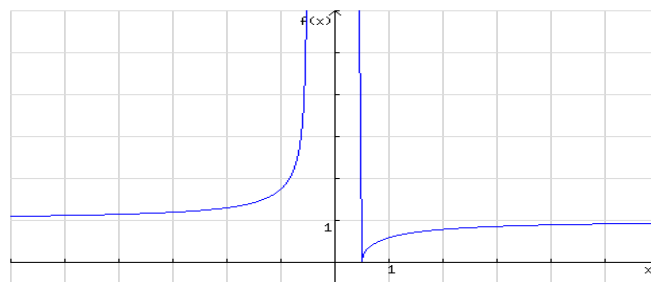
$$w' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2(2x+1) - 2(2x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{4}{(2x+1)^2}$$

$$\forall x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[, f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} \times \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$$

d. dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{2x}{2x}} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \sqrt{\frac{-2}{0^-}} = +\infty$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
---	--	---------------------------------

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	0	1



75 a. Conjecturer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 85x + 15$.

b. Dresser le tableau de variations de f .

c. Peut-on trouver un intervalle I de la forme $[a; +\infty[$ tel que, pour tout nombre réel $x \in I$, on a $f(x) > 10000$? Si oui, préciser cet intervalle.

d. Résoudre l'inéquation $f(x) > 10000$. L'intervalle donné au c est-il compatible avec celui trouvé ?

Exercice 75

a. Conjecturer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 85x + 15$

On peut conjecturer que si x tend vers $+\infty$ alors x^2 tend vers $+\infty$ donc $f(x)$ tend vers $+\infty$

b. Dresser le tableau de variation de f

$$f'(x) = 2x - 85$$

x	$-\infty$	$\frac{85}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-1791,25$	$+\infty$

c. Peut-on trouver un intervalle I de la forme $[a; +\infty[$ tel que, pour tout nombre réel $x \in I$ on a $f(x) > 10000$? Si oui, préciser cet intervalle.

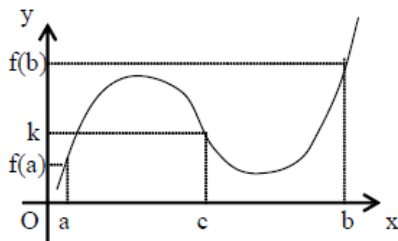
Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires : On considère la fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; +\infty[$.

Pour tout réel $k > f(a)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; +\infty[$.

4° Théorème des valeurs intermédiaires

a - Énoncé

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Soient a et b deux réels dans I . Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Ce théorème est utilisé pour prouver l'existence d'une solution d'une équation du type : $f(x) = k$.

La fonction $f(x)$ définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $\left[\frac{85}{2}; +\infty\right[$.

L'équation $f(x) > 10000$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[\frac{85}{2}; +\infty\right[$.

d. Résoudre l'inéquation $f(x) > 10000$. L'intervalle donné au c est-il compatible avec celui trouvé ?

$$f(x) = x^2 - 85x + 15 > 10000 \Leftrightarrow \text{Soit } g(x) = x^2 - 85x + 15 - 10000,$$

$$\text{on veut la valeur de } x \text{ tel que } g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 85x - 9985 \Leftrightarrow \Delta = 85^2 + 4 \times 9985 = 47165$$

$$a = \frac{85 + \sqrt{47165}}{2} \approx 152, \dots \in I \Leftrightarrow \forall x > a, g(x) > 0 \text{ donc } f(x) > 10000 \Leftrightarrow I = \left[\frac{85 + \sqrt{47165}}{2}, +\infty\right[$$

99 f est la fonction définie sur $]1; 3[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}.$$

a. Conjecturer la limite de f en 1 par la méthode de votre choix.

b. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{(x-1)(x-3)} < -1000$.

c. En déduire le plus grand nombre réel a , arrondi au dix-millième, tel que si $x \in]1; a[$, alors $f(x) < -1000$.

d. A est un nombre réel strictement positif.

Décrire la démarche pour trouver le plus grand nombre réel a tel que si $x \in]1; a[$, alors $f(x) < -A$.

Exercice 99

f est la fonction définie sur $]1; 3[$ par

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

a. Conjecturer la limite de f en 1 par la méthode de votre choix.

$f(1,1) = \frac{1}{(x-1)(x-3)} \approx 5$	$f(1,01) = \frac{1}{(x-1)(x-3)} \approx 50$	$f(1,001) = \frac{1}{(x-1)(x-3)} \approx 500$
---	---	---

On peut conjecturer que si x tend vers 1 alors $f(x)$ tend vers $+\infty$

b. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{(x-1)(x-3)} < -1000$

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} < -1000 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < -\frac{1}{1000} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + \frac{1}{1000} < 0$$

$$x^2 - 4x + \frac{3001}{1000} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 16 - 4 \times \frac{3001}{1000} = \frac{16000 - 4 \times 3001}{1000} = \frac{3996}{1000}$$

$$(x_1; x_2) = \frac{4 \pm \sqrt{\frac{3996}{1000}}}{2} \approx (1,0005; 2,9995) \Leftrightarrow \forall x \in]1; x_1[\cup]x_2; 3[, \frac{1}{(x-1)(x-3)} < -1000$$

c. En déduire le plus grand nombre réel a , arrondi au dix-millième, tel que si $x \in]1; a[$, alors $f(x) < -1000$

$$a = 1,0005$$

d. A est un nombre réel strictement positif. Décrire la démarche pour trouver le plus grand nombre réel tel que si $x \in]1; a[$ alors $f(x) < -A$.

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} < -A \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < -\frac{1}{A} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + \frac{1}{A} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + \frac{3+A}{A} = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \times \frac{3+A}{A} = \frac{16A - 4 \times (3+A)}{A} = \frac{12 \times (A-1)}{A} \Leftrightarrow x_1 = 2 - \sqrt{\frac{3(A-1)}{A}}$$

$$\forall x \in]1; x_1[\cup]x_2; 3[, \frac{1}{(x-1)(x-3)} < -1000$$

129 k est la fonction définie pour tout nombre réel x par $k(x) = e^{2x} - 5e^x + 3$. a. En observant que $e^{2x} = e^x \times e^x$, étudier la limite de k en $-\infty$. b. Montrer que $k(x) = e^{2x} \left(1 - \frac{5}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right)$. En déduire la limite de k en $+\infty$.	Exercice 129 : k est la fonction définie pour tout nombre réel x par $k(x) = e^{2x} - 5e^x + 3$
---	--

Propriétés :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	pour tout n entier, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	pour tout n entier, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
--	--	--	--

a. En observant que $e^{2x} = e^x \times e^x$, étudier la limite de k en $-\infty$

$$k(x) = e^{2x} - 5e^x + 3 = e^x(e^x - 5) + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = +3$$

b. Montrer que $k(x) = e^{2x} \left(1 - \frac{5}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right)$. En déduire la limite de k en $+\infty$

$$k(x) = e^{2x} - 5e^x + 3 = e^{2x} \left(1 - \frac{5}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$$

151 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x}.$$

a. Vérifier que, pour tout nombre réel x :

$$h(x) = 1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}.$$

b. Calculer la limite de la fonction h en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. En déduire que la courbe représentative de la fonction h admet une asymptote dont on précisera une équation.

Exercice 151 : h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x}$$

a. Vérifier que, pour tout réel x : $h(x) = 1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \text{ si } c \text{ est non nul}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \text{ donc } \frac{x-1}{e^x} = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \text{ donc } h(x) = 1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

b. Calculer la limite de la fonction h en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	<i>pour tout n entier, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$</i>	<i>pour tout n entier, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$</i>
--	--	---	---

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x e^{-x} + e^{-x}) = +\infty$$

c. En déduire que la courbe représentative de la fonction h admet une asymptote dont on précisera une équation.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$

La droite D d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction h au voisinage de $+\infty$