Dynamique Newtonienne - Comment améliorer la performance d'un tir ?

L'artillerie a contribué, par son développement, à la fin de la guerre de Cent Ans.

1. On étudie la trajectoire du centre de masse G d'un boulet de canon dans un référentiel terrestre considéré comme galiléen auquel on associe le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'origine des dates est choisie à l'instant où le boulet part du point O. Les actions de l'air sur le boulet sont négligées. Le vecteur vitesse initiale , $\vec{v_0}$ est incliné d'un angle α, appelé angle de tir, par rapport à l'horizontale.

a. Déterminer l'expression du vecteur accélération du centre de masse du boulet lors du mouvement.

Le boulet est soumis à une seule force, son poids : Les caractéristiques du poids sont : $\vec{P} = m \times \vec{g}$

Force verticale et dirigée vers le bas, de valeur constante puisque la masse m du solide est constante et le vecteur $\vec{g}$ est constant car on a supposé le champ de pesanteur uniforme.

La deuxième loi de Newton (relation fondamentale de la dynamique) s'écrit $\sum \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a}$

$$\vec{P} = m \times \vec{g} = m \times \vec{a} \quad \Longrightarrow \quad -m \times g \times \vec{j} = m \times \vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = -g \times \vec{j} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = \begin{cases} 0 \times \vec{j} \\ -g \times \vec{j} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -g \end{cases}$$

b. Montrer que les équations horaires du mouvement s'expriment sous la forme : $x = v_0 \times cos(\alpha) \times t \ et \ y = -\frac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times sin(\alpha) \times t$

$$\vec{a} = \begin{cases} 0 \\ -g \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = \begin{cases} v_{0x} \\ -g \times t + v_{0y} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{v} = \begin{cases} v_0 \times cos(\alpha) \\ -g \times t + v_0 \times sin(\alpha) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \begin{cases} v_0 \times cos(\alpha) \times t + x_0 \\ -\frac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times sin(\alpha) \times t + y_0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = v_0 \times cos(\alpha) \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times sin(\alpha) \times t \end{cases}}$$

c. Établir l'équation de la trajectoire du boulet.

$$x(t) = v_0 \times cos(\alpha) \times t \ et \ y(t) = -\frac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times sin(\alpha) \times t$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \times \left(\frac{x}{v_0 \times cos(\alpha)}\right)^2 + v_0 \times sin(\alpha) \times \frac{x}{v_0 \times cos(\alpha)}$$

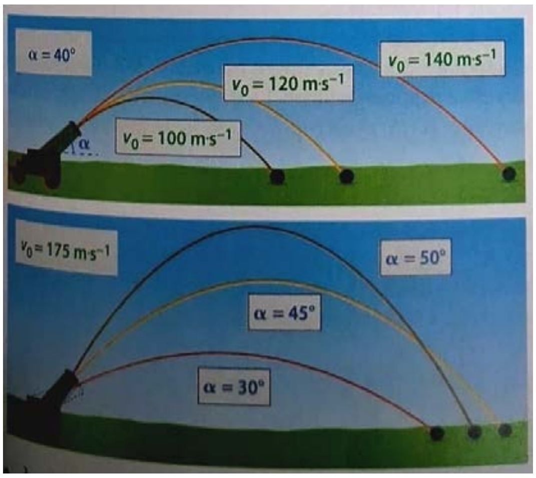
$$\boldsymbol{y(x) = \frac{-g}{2{v_0}^2 \times cos(\alpha)^2} \times x^2 + tan(\alpha) \times x}$$

d. Quelle est l'expression de l'abscisse d du boulet, encore appelée « portée », lorsqu'il repasse par la même altitude qu'à l'instant initial ?

$$y(d) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-g}{2{v_0}^2 \times cos(\alpha)^2} \times d^2 + tan(\alpha) \times d = 0$$

$$\frac{-g}{2{v_0}^2 \times cos(\alpha)^2} \times d + tan(\alpha) = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{tan(\alpha) \times 2{v_0}^2 \times cos(\alpha)^2}{g}$$

$$d = \frac{2 \times sin(\alpha) \times cos(\alpha) \times {v_0}^2}{g} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{d = \frac{sin(2\alpha) \times {v_0}^2}{g}}$$

<table>
<tr>
<td>2. Pour améliorer la performance de son tir, un artilleur décide d'étudier l'influence de la valeur v_0 de la vitesse initiale du lancer et de l'angle de tir α. Ses résultats sont schématisés ci-dessous.

</td>
<td>a. A partir des figures proposer, indiquer comment évolue la portée du tir en fonction des paramètres testée.
Elle croit avec $\boldsymbol{v_0}^{\mathbf{2}}$ et $\boldsymbol{sin}(\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha})$. Pour une valeur donnée de $\boldsymbol{v_0}$, elle est maximale pour $\boldsymbol{sin}(\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{1}$ c'est-à-dire pour $\boldsymbol{\alpha} = 45°$.
b. Dans quelles conditions, parmi celles testé, l'artilleur obtient-il la plus grande portée ?
$\boldsymbol{v_0} = \mathbf{140}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{\alpha} = 40$ donne $\mathrm{d} = 1968\ \mathrm{m}$
$\boldsymbol{v_0} = \mathbf{175}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{\alpha} = 45$ donne $\mathrm{d} = 3122\ \mathrm{m}$</td>
</tr>
</table>