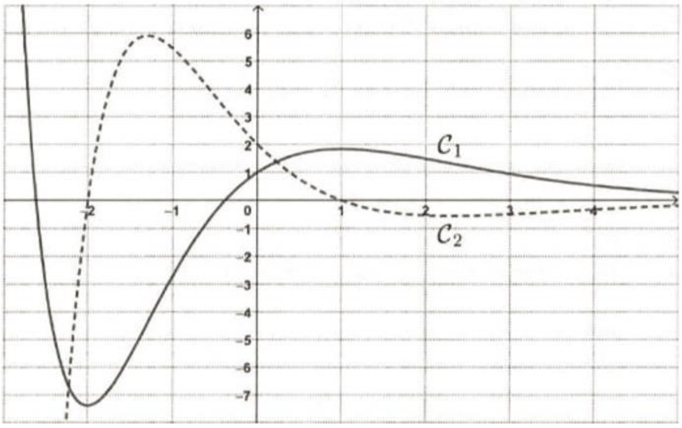
Analyse graphique et résolution d'équation différentielle

Partie A : On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes C_1 et C_2, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur **R**. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g'.

On précise également que :

- La courbe C_1 coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0; 1).
- La courbe C_2 coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0; 2) et l'axe des abscisses aux points de coordonnées (-2; 0) et (1; 0).



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.

C_1 est la représentation de la fonction g. C_2 est la représentation de sa dérivée g′

2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est y = 2x + 1.

On sait que $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$

Équation de la tangente : $y = g'(0) \times (x - 0) + g(0) = 2x + 1$

Partie B : On considère (E) l'équation différentielle $y + y' = (2x + 3)e^{-x}$, où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

$f'_0(x) = (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x)e^{-x} = (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x} = (-x^2 - x + 3)e^{-x}$

$f_0(x) + f'_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + (-x^2 - x + 3)e^{-x} = (x^2 + 3x - x^2 - x + 3)e^{-x} = (2x + 3)e^{-x}$

$f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.

$C'est\ une\ équation\ différentielle\ linéaire\ du\ premier\ ordre\ à\ coefficients\ constants.$

$Elle\ peut\ s'écrire\ sous\ forme :$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -1$$

$avec\ une\ solution\ de\ la\ forme\ y(x) = C \times e^{-x}$ où C ∈ R est une constante réelle.

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

$$y(x) = (C + x^2 + 3x)e^{-x}$$

4. On admet que la fonction g décrite dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E). Déterminer alors l'expression de la fonction g.

On sait que $g(0) = 1$ $\qquad$ $g(0) = C = 1$ $\qquad$ $g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Solution générale de l'équation différentielle (E) est : $y(x) = (C + x^2 + 3x)e^{-x}$

Points d'inflexion : Les points d'inflexion sont les points où la courbure change de signe, c'est-à-dire où la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Trouvons donc y″(x) et les conditions pour qu'il y ait **exactement deux points d'inflexion**.

$$y'(x) = (2x + 3)e^{-x} - (C + x^2 + 3x)e^{-x}$$

$$y''(x) = 2e^{-x} - (2x + 3)e^{-x} - (2x + 3)e^{-x} + (C + x^2 + 3x)e^{-x}$$

$$y''(x) = (2 - 2x - 3 - 2x - 3 + C + x^2 + 3x)e^{-x} = (x^2 - x + C - 4)e^{-x}$$

$$\boldsymbol{y''(x) = \left(x^2 - x + C - 4\right)e^{-x}}$$

Les points d'inflexion sont les solutions de : $y''(x) = 0$

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + C - 4 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times (C - 4) = 17 - 4C > 0 \; cad \; C < \frac{17}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17 - 4C}}{2}$$

Les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement **deux points d'inflexion** sont :

$$y(x) = (C + x^2 + 3x)e^{-x}, avec \; C < \frac{17}{4}$$