Étude des performances au lancer de basket-ball

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points

PARTIE A : L'entraîneur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entraînement, lorsque Victor tente un panier à **trois points**, il le réussit avec une probabilité de **0,32.**

Lors d'un entraînement, Victor effectue une série de **15 lancers à trois points.** On suppose que ces lancers sont **indépendants.** On note **N** la **variable aléatoire** qui donne le **nombre de paniers marqués.** Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres×

Dire que la variable aléatoire N suit une loi binomiale $B(n, p)$ signifie que :

- N compte le nombre de succès (ici, les paniers marqués) obtenus lors d'une suite de **n** essais indépendants identiques
- Chaque essai a deux issues possibles : succès (panier marqué) ou échec (pas de panier)
- La probabilité de succès lors de chaque essai est la même et égale à p

La probabilité que N prenne la valeur k (c'est-à-dire que Victor marque exactement k paniers) est donnée par la formule suivante : $P(N = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Loi suivie par la variable aléatoire N et ses paramètres

La variable aléatoire N compte le nombre de paniers à trois points réussis par Victor lors des 15 tentatives

Chaque lancer est un essai **indépendant** avec deux issues possibles (réussite ou échec). La probabilité de réussite d'un lancer est **p = 0,32**× Comme il y a **n = 15** lancers, la variable **N** suit une loi binomiale : $N \sim B(n = 15, p = 0{,}32)$

2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série

Victor tente 15 lancers à trois points, chacun ayant une probabilité de réussite de 0,32 La variable aléatoire N compte le nombre de paniers réussis. La question était de trouver la probabilité qu'il en réussisse exactement 4.

On a modélisé la situation avec une loi binomiale $B(n = 15, p = 0{,}32)$. La probabilité de réussir exactement 4 paniers est donnée par :

$$P(N = 4) = \binom{15}{4} \times 0{,}32^4 \times (0{,}68)^{15-4} = \frac{15!}{4! \times (15-4)!} \times 0{,}32^4 \times (0{,}68)^{15-4} \approx 0{,}206 \approx 21\%$$

3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.

On cherche la probabilité que Victor réussisse **au plus 6 paniers** sur 15 tentatives, c'est-à-dire :

$$P(N \leq 6) = P(N = 0) + P(N = 1) + \cdots + P(N = 6)$$

Comme la variable aléatoire N suit une loi binomiale $B(15{,}0{,}32)$, la probabilité d'avoir exactement k paniers réussis est :

$$P(N = k) = \binom{15}{k} \times 0{,}32^k \times (1 - 0{,}32)^{15-k}$$

On additionne ces probabilités pour tous les k de 0 à 6 :

$$P(N \leq k) = P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4) + P(N = 5) + P(N = 6)$$

$$P(N \leq k) = \binom{15}{0} \times 0{,}68^{15} + \binom{15}{1} \times 0{,}32 \times 0{,}68^{14} + \binom{15}{2} \times 0{,}32^2 \times 0{,}68^{13} + \binom{15}{3} \times 0{,}32^3 \times 0{,}68^{12}$$
$$+ \binom{15}{4} \times 0{,}32^4 \times 0{,}68^{11} + \binom{15}{5} \times 0{,}32^5 \times 0{,}68^{10} + \binom{15}{6} \times 0{,}32^6 \times 0{,}68^9$$
$$P(N \leq k) = 0{,}003 + 0{,}022 + 0{,}071 + 0{,}146 + 0{,}206 + 0{,}213 + 0{,}167 \approx 0{,}828 = \mathbf{82{,}8}\%$$

Cela signifie que, lors de cette série de 15 lancers, Victor a environ **82,8 % de chances** de réussir 6 paniers ou moins

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N.

La variable N suit une loi binomiale $B(n = 15, p = 0{,}32)$: $E(N) = n \times p = 15 \times 0{,}32 = 4{,}8$

Cela signifie qu'en moyenne, Victor réussit 4,8 paniers sur les 15 tentatives lors de ses entraînements.

5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.
   a. Exprimer T en fonction de N.

Victor ne tire que des paniers à 3 points. La variable N représente le **nombre de paniers réussis** : $\boldsymbol{T = 3 \times N}$

   b. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T. Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.

$E(T) = 3 \times E(N) = 3 \times 4{,}8 = 14{,}4$. En moyenne, Victor marque **14,4 points** lors de ses séries de 15 lancers à 3 points.

   c. Calculer P(12 ≤ T ≤ 18).

$$P(12 \leq T \leq 18) \approx 0{,}586$$

Comme chaque panier marqué rapporte 3 points, l'intervalle $12 \leq T \leq 18$ correspond à : $4 \leq N \leq 6 \; car \; T = 3N$

On a donc calculé : $P(4 \leq N \leq 6) = P(N = 4) + P(N = 5) + P(N = 6)$

$$P(4 \leq N \leq 6) = \binom{15}{4} \times 0{,}32^4 \times 0{,}68^{11} + \binom{15}{5} \times 0{,}32^5 \times 0{,}68^{10} + \binom{15}{6} \times 0{,}32^6 \times 0{,}68^9$$
$$P(4 \leq N \leq 6) = \binom{15}{4} \times 0{,}32^4 \times 0{,}68^{11} + \binom{15}{5} \times 0{,}32^5 \times 0{,}68^{10} + \binom{15}{6} \times 0{,}32^6 \times 0{,}68^9$$
$$P(4 \leq N \leq 6) = 0{,}206 + 0{,}213 + 0{,}167 \approx 0{,}586 = \mathbf{58{,}6}\%$$

Victor a environ **58,6 % de chances** de marquer un total de points compris entre 12 et 18 lors de cette série de 15 lancers.