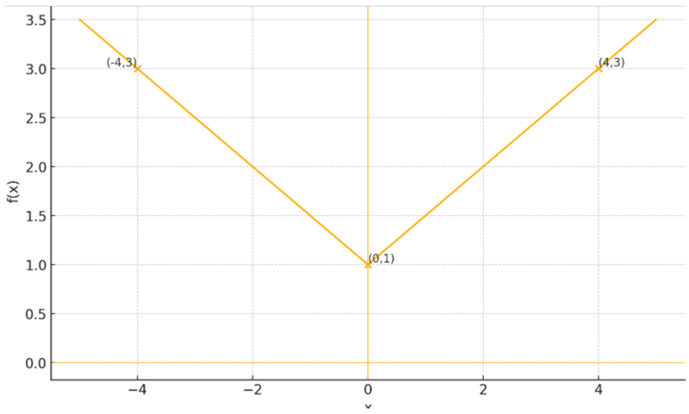
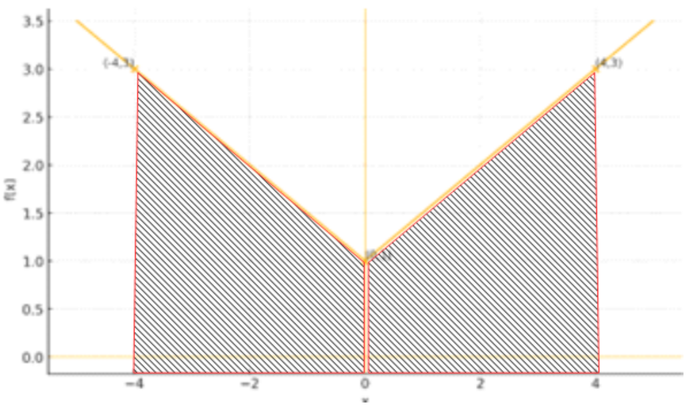
Symétrie et intégration de la fonction

On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = \frac{|x|}{2} + 1$

a. Représenter f dans le plan muni d'un repère orthonormé.



b. Interpréter géométriquement, puis calculer les intégrales $I = \int_{-4}^{0} f(x).dx$ et $J = \int_{0}^{4} f(x).dx$



$$I = \int_{-4}^{0} f(x).dx = \int_{-4}^{0} \left(-\frac{x}{2} + 1\right).dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_{-4}^{0} = 8$$

$$J = \int_{0}^{4} f(x).dx = \int_{0}^{4} \left(\frac{x}{2} + 1\right).dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{0}^{4} = 8$$

L'aire sous la courbe entre -4 et 0 est celle d'un trapèze

L'aire sous la courbe entre 0 et 4 est aussi celle d'un trapèze de même aire

c. a est un nombre réel positif. Justifier géométriquement que : $\int_{-a}^{0} f(x).dx = \int_{0}^{a} f(x).dx$

$$f(-x) = \frac{|-x|}{2} + 1 = \frac{|x|}{2} + 1 = f(x)$$

f est une fonction paire, pour tout x ∈ R. Géométriquement, son graphe est symétrique par rapport à l'axe vertical Oy.

L'aire sous la courbe entre x =−a et x = 0 est exactement égal à l'aire sous la courbe entre x = 0 et x = +a

Par symétrie, les deux intégrales, qui représentent ces deux aires, sont donc égales : $\int_{-a}^{0} f(x).dx = \int_{0}^{a} f(x).dx$