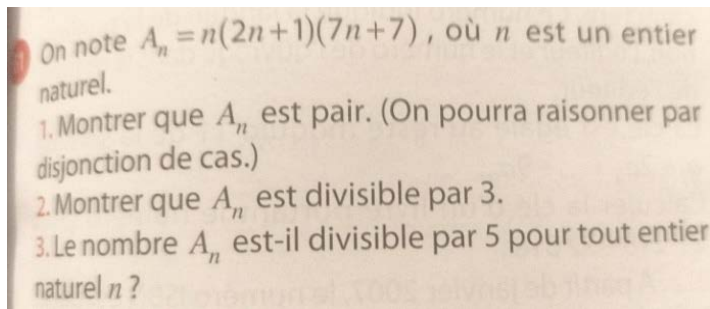




Q1) On raisonne par disjonction de cas :

Si n est pair, $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$	Si n est impair, $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$
$A_n = n(2n + 1)(7n + 7)$	$A_n = n(2n + 1)(7n + 7)$
$= 2k(4k + 1)(14k + 7)$	$= (2k + 1)[2(2k + 1) + 1][7(2k + 1) + 7]$
$= 4k(4k + 1)(7k + 1)$	$= (2k + 1)[4k + 3][14k + 14]$
Ainsi A_n est pair car multiple de 4.	$= 2(2k + 1)[4k + 3][7k + 7]$ Ainsi A_n est pair car multiple de 2

Finalement, $\forall n \in \mathbb{Z}, A_n$ est pair

Q2) Montrer que A_n est divisible par 3 :

Division euclidienne : Soient a un entier relatif et b un entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entiers relatifs $(q ; r)$ tel que : $a = qb + r$ et $0 \leq r < b$, q s'appelle le **quotient** et r s'appelle le **reste** de la division euclidienne de a par b .

Propriété : Les restes possibles de la division euclidienne d'un entier relatif a par un entier naturel non nul b sont : $0, 1, 2, \dots, b - 1$.

Et par là, tout entier relatif a peut s'écrire: soit: bk , soit : $bk+1$, soit: $bk+2$, ..., soit: $bk+b-1$ (où k est un entier relatif)

On raisonne par disjonction de cas : $A_n = n(2n + 1)(7n + 7)$

A_n est divisible par 3 donc n peut s'écrire soit $3k$, soit $3k+1$, soit $3k+2$ (où k est un entier naturel).

Autre écriture : soit $A_n \equiv 0[3]$ ou soit $A_n \equiv 1[3]$ ou soit $A_n \equiv 2[3]$

- Si $A_n \equiv 0[3]$, $n = 3k$, alors $A_n = 3k(6k + 1)(21k + 7) = 3k'$, avec $k' = k(6k + 1)(21k + 7)$ entier naturel.

On constate donc que A_n est bien divisible par 3.

- Si $A_n \equiv 1[3]$, $n = 3k+1$, alors $A_n = (3k + 1)[2(3k + 1) + 1][7(3k + 1) + 7]$

$$= (3k + 1)[6k + 3][21k + 14]$$

$$= 3(3k + 1)[2k + 1][21k + 14] = 3k', \text{ avec } k' = (3k + 1)[2k + 1][21k + 14] \text{ entier naturel.}$$

On constate donc que A_n est bien divisible par 3.

- Si $A_n \equiv 2[3]$, $n = 3.k+2$, alors $A_n = (3k+2)[2(3k+2)+1][7(3k+2)+7]$

$$= (3k+2)[6k+5][21k+21]$$

$$= 3(3k+2)[6k+5][7k+7] = 3k', \text{ avec } k' = (3k+2)[6k+5][7k+7] \text{ entier naturel.}$$

On constate donc que A_n est bien divisible par 3.

Autre méthode avec le tableau des congruences

$n \equiv \dots [3]$	$\equiv 0[3]$	$\equiv 1[3]$	$\equiv 2[3]$
$2n+1$	$1 \Rightarrow \equiv 1[3]$	$3 \Rightarrow \equiv 0[3]$	$5 \Rightarrow \equiv 2[3]$
$7n+7$	$7 \Rightarrow \equiv 1[3]$	$14 \Rightarrow \equiv 2[3]$	$21 \Rightarrow \equiv 0[3]$
A_n	0	0	0

$$A_n \equiv 0[3], \text{ on constate donc que } A_n \text{ est bien divisible par 3.}$$

Q3) Le nombre A_n est-il divisible par 5 pour tout entier naturel n ?

Méthode 1 : recherche d'un contre exemple :

$$A_n = n(2n+1)(7n+7), A_0 = 0 \text{ et } A_1 = 3 * 14 = 42 \text{ non divisible par 5}$$

Si $n = 1$, $A_n = 42$ n'est pas divisible par 5 donc il existe n tel que A_n n'est pas divisible par 5.

Méthode 2 : divisibilité à l'aide des congruences

n	$\equiv 0[5]$	$\equiv 1[5]$	$\equiv 2[5]$	$\equiv 3[5]$	$\equiv 4[5]$
n	0	1	2	3	4
$2n$	0	2	4	$6 \Rightarrow \equiv 1[5] = 1$	$8 \Rightarrow \equiv 3[5] = 3$
$2n+1$	1	3	$5 \Rightarrow \equiv 0[5] = 0$	2	4
$7n$	0	$7 \Rightarrow \equiv 2[5] = 2$	$14 \Rightarrow \equiv 4[5] = 4$	$21 \Rightarrow \equiv 1[5] = 1$	$28 \Rightarrow \equiv 3[5] = 3$
$7n+7$	$7 \Rightarrow \equiv 2[5] = 2$	$9 \Rightarrow \equiv 4[5] = 4$	$11 \Rightarrow \equiv 1[5] = 1$	$8 \Rightarrow \equiv 3[5] = 3$	$10 \Rightarrow \equiv 0[5] = 0$
A_n	0	$12 \Rightarrow \equiv 2[5] = 2$	0	$18 \Rightarrow \equiv 3[5] = 3$	0

A_n n'est pas divisible par 5.

Démontrer que pour tout entier naturel n , $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Démontrer que pour tout entier naturel n , $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7

1^{ère} méthode : Par récurrence

Soit la relation de récurrence P_n : $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7, $3^{2n} - 2^n = 7k$, avec k entier

Pour $n = 1$: $3^2 - 2^1 = 9 - 2 = 7$ donc divisible par 7. **P_1 est vraie.**

Soit **P_n supposée vraie** $3^{2n} - 2^n = 7k$

Alors vérifions que c'est vrai pour P_{n+1} :

$$\begin{aligned}
 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 3^{2n} 3^2 - 2^1 2^n \\
 &= 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n \\
 &= 7 \times 3^{2n} + 2 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n \\
 &= 7 \times 3^{2n} + 2 \times (3^{2n} - 2^n) \\
 &= 7 \times 3^{2n} + 2 \times 7k \\
 &= 7 \times (3^{2n} + 2k) \text{ est un multiple entier de 7}
 \end{aligned}$$

Donc : P_{n+1} est vraie

Conclusion : P_n est vraie pour tout entier n .

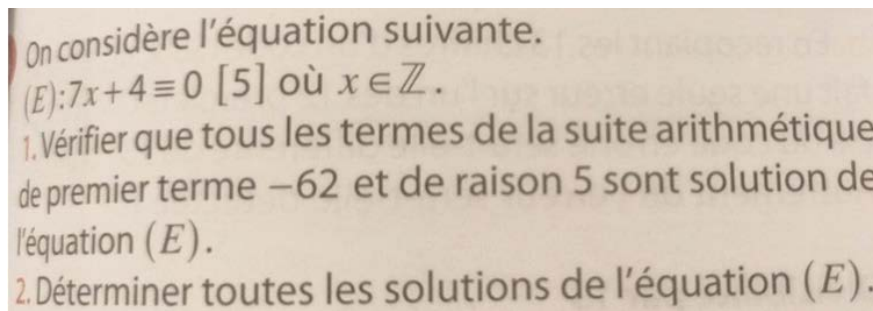
2^{ème} méthode : Par les congruences

On cherche les restes des divisions par 7 de 3^{2n} et de 2^n .

$$3^{2n} = 9^n$$

n	0	1	2	3	4	5	6
9^n	1	9	81	729	6 561	59 049	531 441
9^n	$\equiv 1[7]$	$\equiv 2[7]$	$\equiv 4[7]$	$\equiv 1[7]$	$\equiv 2[7]$	$\equiv 4[7]$	$\equiv 1[7]$
2^n	1	2	4	8	16	32	64
2^n	$\equiv 1[7]$	$\equiv 2[7]$	$\equiv 4[7]$	$\equiv 1[7]$	$\equiv 2[7]$	$\equiv 4[7]$	$\equiv 1[7]$
$9^n - 2^n$	0	0	0	0	0	0	0

$9^n - 2^n$ est divisible par 7 quelque soit n entier naturel.



On considère l'équation suivante (E) : $7x + 4 \equiv 0[5]$ où $x \in \mathbb{Z}$.

1) Vérifier que tous les termes de la suite arithmétique de premier terme - 62 et de raison 5 sont solution de l'équation (E)

Définition : Une suite (U_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que $U_{n+1} = U_n + r$. Le nombre r est appelé raison de la suite.

$$U_{n+1} = U_n + 5 \text{ avec } U_0 = -62$$

Soit la relation de récurrence P_n :

On veut démontrer que (U_n) est divisible par 5

Pour $n = 0$: $U_0 = -62$ est solution de (E) car $7(-62) + 4 = -430$ est multiple de 5. P_1 est vraie.

On suppose vraie la proposition (P_n) : $U_n = k \times 5$

Alors vérifions que c'est vrai pour (P_{n+1}) : $U_{n+1} = U_n + 5 = k \times 5 + 5 = 5 \times (k + 1)$

Conclusion : (P_n) est vraie pour tout entier n .

2) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E) $7x + 4 \equiv 0[5]$ où $x \in \mathbb{Z}$.

$$7x + 4 \equiv 0[5] \Leftrightarrow 7x \equiv -4 + 0[5]$$

$$7x + 4 \equiv 0[5] \Leftrightarrow 7x \equiv -4[5]$$

$$7x + 4 \equiv 0[5] \Leftrightarrow 7x = -4 + 5k = 1 + 5k'$$

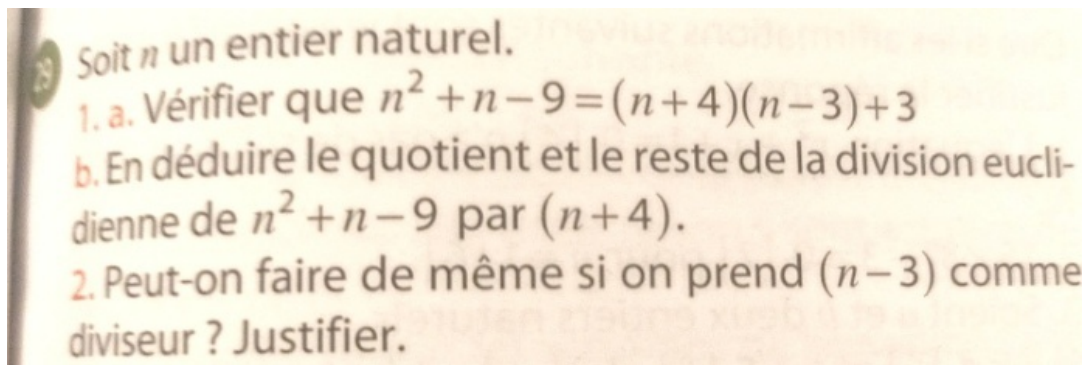
$$7x + 4 \equiv 0[5] \Leftrightarrow 7x \equiv 1[5]$$

x modulo 5	0	1	2	3	4
7x modulo 5	0	2	4	1	3

$$7x + 4 \equiv 0[5] \Leftrightarrow x \equiv 3[5]$$

$$\exists k \in \mathbb{Z}, x = 5k + 3$$

$$\mathcal{S} = \{5k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$$



Soit n un entier naturel.

Q1) a. Vérifier que $n^2 + n - 9 = (n + 4)(n - 3) + 3$

$$(n + 4)(n - 3) + 3 = n^2 - 3n + 4n - 12 + 3 = n^2 + n - 9$$

Q1) b. En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de $n^2 + n - 9$ par $(n+4)$.

$$a = bq + r \text{ avec } r < q$$

$$a = n^2 + n - 9 \text{ et } b = (n + 4)$$

$$q = (n - 3) \text{ et } r = 3$$

Q2) Peut-on faire de même si on prend $(n-3)$ comme diviseur ? Justifier.

$$a = bq + r \text{ avec } r < q$$

$$a = n^2 + n - 9 \text{ et } b = (n - 3)$$

$$q = (n + 4) \text{ et } r = 3$$

38

CalculerRésoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes.

a. $327 \equiv x [11]$ et $0 \leq x < 11$.

b. $5x \equiv 2 [7]$ et $-3 < x < 12$.

c. $17 - x \equiv 2 [13]$ et $-25 < x < 5$.

Calculer

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes

a. $327 \equiv x [11]$ et $0 \leq x < 11$

b. $5x \equiv 2 [7]$ et $-3 < x < 12$

c. $17 - x \equiv 2 [13]$ et $-25 < x < 5$

a. $327 \equiv x [11]$ et $0 \leq x < 11$ donc $327 = 11k + x$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$327 \equiv x [11] \Leftrightarrow x \equiv 327 [11]$$

$$327 = 29 \times 11 + 8$$

$$327 \equiv x [11] \Leftrightarrow x \equiv 8 [11]$$

$$\exists k \in \mathbb{Z}, x = 11k + 8$$

$$\mathcal{S} = \{8 + 11k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$0 \leq x < 11 \text{ donc } \mathcal{S} = \{8 + 11k, k = 0\}$$

b. $5x \equiv 2 [7]$ et $-3 < x < 12$ donc $5x = 7k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

x modulo 7	-2	-1	0	1	2	3	4	5
5x modulo 7	-3	-5	0	5	3	1	6	4

x modulo 7	6	7	8	9	10	11
5x modulo 7	2	0	5	3	1	6

$$5x \equiv 2 [7] \Leftrightarrow x \equiv 6 [7]$$

$$\exists k \in \mathbb{Z}, x = 7k + 6$$

$$\mathcal{S} = \{6 + 7k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$-3 < x < 12 \text{ donc } \mathcal{S} = \{6 + 7k, k = (-1; 0)\}$$

c. $17 - x \equiv 2 [13]$ et $-25 < x < 5$ donc $17 - x = 13k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$17 - x \equiv 2 [13]$$

$$-x \equiv -17 + 2 [13]$$

$$-x \equiv -15 [13]$$

$$x \equiv 15 [13]$$

$$x \equiv 2 [13]$$

$$\exists k \in \mathbb{Z}, x = 13k + 2$$

$$\mathcal{S} = \{2 + 13k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$-25 < x < 5 \text{ donc } \mathcal{S} = \{2 + 13k, k = (-2; -1; 0)\}$$