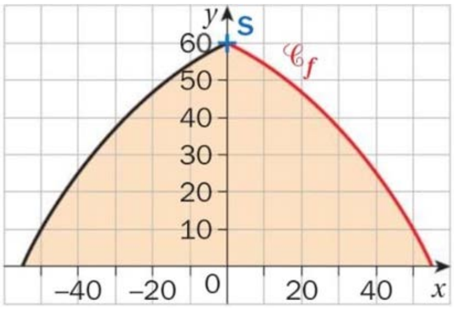
Modélisation et aire de la façade d'un hangar



Un architecte veut établir les plans d'un hangar pour ballon dirigeable.
La coupe de ce hangar, représentée ci – contre dans le plan muni d'un repère orthonormé, est symétrique par rapport à la droite (OS) et la partie droite est modélisée par la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;55]$ par $f(x) = 80 - 20 \times e^{0,025x}$

L'unité est le mètre.

1. Quelle est la hauteur du hangar en mètres ?

$$f(0) = 80 - 20 \times e^0 = 60\ m$$

2. Étudier le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;55]$.

$0 \leq x \leq 55$

$0 \leq 0,025x \leq 1,375$

$e^0 \leq e^{0,025x} \leq e^{1,375}$

$20 \leq 20 \times e^{0,025x} \leq 20 \times e^{1,375}$

$-20 \times e^{1,375} \leq -20 \times e^{0,025x} \leq -20$

$80 - 20 \times e^{1,375} \leq f(x) \leq 60$

$0,898 \ldots \leq f(x) \leq 60$

$\forall x \in [0\,;55], f(x) > 0$

3. L'architecte souhaite calculer l'aire **A** de la surface de la façade du hangar en m².

a. Vérifier que $A = 2\int_0^{55} f(x)dx\ m^2$

Sur l'intervalle $[-55\,;55]$, $f(x)$ $est\ une\ fonction\ paire, c'est - à - dire\ symétrique\ par - rapport - à\ l'axe\ verticale$

$$A = \int_{-55}^{55} f(x)dx = \int_{-55}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{55} f(x)dx\ \ Or\ \int_{-55}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{55} f(x)dx\ \ donc\ \boldsymbol{A = 2\int_0^{55} f(x)dx}$$

b. Calculer **A** et donner sa valeur approchée, arrondie à $10^{-2}\ m^2\ de\ A$

$$A = 2\int_0^{55} f(x)dx = 2\int_0^{55}(80 - 20 \times e^{kx})dx = 2\left[80x - \frac{20}{k} \times e^{kx}\right]_0^{55}\ \ avec\ k = 0,025$$

$$A = 2[80x - 800 \times e^{0,025x}]_0^{55} = 2[(80 \times 55 - 800 \times e^{0,025\times 55}) - (80 \times 0 - 800 \times e^{0,025\times 0})]$$

$$\boldsymbol{A = 10400 - 1600 \times e^{1,375} \approx 4071,88\ m^2}$$