Intégrales et exponentielles

On considère : $I = \int_0^{ln(5)} \frac{e^x + 4}{e^x + 6} dx$ et $J = \int_0^{ln(5)} \frac{2}{e^x + 6} dx$

a. Calculer $I + J$ et $I - 2J$.

$$I + J = \int_0^{ln(5)} \frac{e^x + 4}{e^x + 6} dx + \int_0^{ln(5)} \frac{2}{e^x + 6} dx = \int_0^{ln(5)} \left(\frac{e^x + 4}{e^x + 6} + \frac{2}{e^x + 6}\right) dx = \int_0^{ln(5)} \left(\frac{e^x + 6}{e^x + 6}\right) dx = [x]_0^{ln(5)}$$

$donc$ $\boldsymbol{I + J = ln(5)}$

$$I - 2J = \int_0^{ln(5)} \left(\frac{e^x + 4}{e^x + 6} - 2 \times \frac{2}{e^x + 6}\right) dx = \int_0^{ln(5)} \left(\frac{e^x}{e^x + 6}\right) dx$$

$Un\ primitive\ de\ \frac{e^x dx}{e^x + 6}\ est\ ln(e^x + 6)$

$I - 2J = [ln(e^x + 6)]_0^{ln(5)} = ln\left(e^{ln(5)} + 6\right) - ln(e^0 + 6) = ln(5 + 6) - ln(1 + 6)$ $donc$ $\boldsymbol{I - 2J = ln\left(\frac{11}{7}\right)}$

b. En déduire les valeurs de I et J.

$On\ a :\ I + J = ln(5)\ et\ I - 2J = ln\left(\frac{11}{7}\right)$

$(I + J) - (I - 2J) = 3J = ln(5) - ln\left(\frac{11}{7}\right)$ $donc$ $\boldsymbol{J = \frac{1}{3} ln\left(\frac{35}{11}\right)}$

$On\ a$ $\boldsymbol{I + J = ln(5)}$ $donc\ I = ln(5) - J\ donc$ $\boldsymbol{I = ln(5) - \frac{1}{3} ln\left(\frac{35}{11}\right)}$