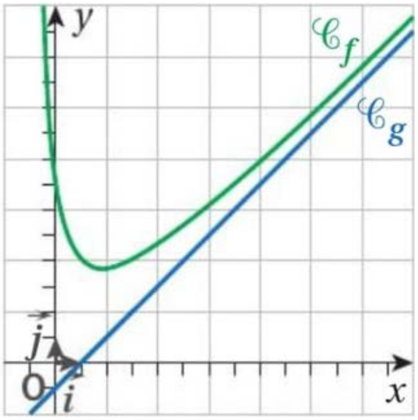
Étude comparative de fonctions

Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+7}{x+1}$ et $g(x)=x-1$

On a tracé les courbes représentatives C_f et C_g de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1. Conjecturer la position relative de C_f et C_g.

D'après le tracé, la courbe C_f est toujours située au-dessus de la droite C_g sur tout l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

2. a. Montrer que, $\forall x>-1:\ f(x)-g(x)=\dfrac{8}{x+1}$

$f(x)-g(x)=\dfrac{x^2+7}{x+1}-(x-1)=\dfrac{x^2+7-(x-1)(x+1)}{x+1}$ donc $\boldsymbol{f(x)-g(x)=\dfrac{8}{x+1}}$

b. Valider ou infirmer la conjecture du 1 et calculer la limite de $f(x)-g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

$$\forall x>-1:\ f(x)-g(x)=\frac{8}{x+1}>0$$

donc la courbe C_f est toujours située au-dessus de la droite C_g sur tout l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ *et* $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{8}{x+1}=0$

3. Pour $\lambda\in[0\,;\,+\infty[$, on note $I_\lambda=\displaystyle\int_0^\lambda\frac{8}{x+1}\,dx$

a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_λ.

I_λ représente l'aire qui se trouve antre C_f et C_g sur l'intervale $[0\,;\,\lambda]$

b. Calculer I_λ.

$I_\lambda=\displaystyle\int_0^\lambda\frac{8}{x+1}dx=8\int_0^\lambda\frac{dx}{x+1}=8[\ln(x+1)]_0^\lambda=8[\ln(\lambda+1)-\ln(1)]$ donc $\boldsymbol{I_\lambda=8\times\ln(\lambda+1)}$

c. Déterminer la limite de I_λ lorsque λ tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}I_\lambda=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}8\times\ln(\lambda+1)=+\infty$

I_λ Représente l'aire, sur l'intervalle $[0\,;\,\lambda]$, de la région située entre la courbe Cf et sa droite asymptote Cg.