

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos(x)$

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

$f'_0(x) = -a \sin(x) + b \cos(x)$ $-a \sin(x) + b \cos(x) = 2(a \cos(x) + b \sin(x)) + \cos(x)$ $-a \sin(x) + b \cos(x) = (2a + 1) \cos(x) + 2b \sin(x)$	$\begin{cases} -a \sin(x) = 2b \sin(x) \\ b \cos(x) = (2a + 1) \cos(x) \end{cases}$ $\begin{cases} -a = 2b \\ b = (2a + 1) \end{cases}$ $b = \frac{1}{5} \text{ et } a = -\frac{2}{5}$
---	--

Une solution particulière de (E) : $f_0(x) = -\frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x)$

b. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E₀) : $y' - 2y = 0$

C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants.

Sa solution générale est : $y(x) = C \times e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si (f - f₀) est solution de (E₀).

On a :

- (E₀) : $y' = 2y$ de solution générale est : $y(x) = C \times e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- (E) : $y' = 2y + \cos(x)$ a une solution particulière : $f_0(x) = -\frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x)$

Soit f une fonction de (E). On pose $u(x) = f(x) - f_0(x)$

$$u'(x) = f'(x) - f'_0(x)$$

f et f₀ sont solutions de (E) : $f' = 2f + \cos(x)$ et $f'_0 = 2f_0 + \cos(x)$ donc $u' = 2f + \cos(x) - 2f_0 - \cos(x) = 2(f - f_0) = 2u$

Donc f est solution de (E) si et seulement si (f - f₀) est solution de (E₀)

d. En déduire les solutions de (E).

Donc, solution générale de (E) : $y(x) = -\frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x) + C \times e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C \times e^{2\frac{\pi}{2}} = 0 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{5} + C \times e^{\pi} = 0 \text{ donc } C = \frac{-1}{5e^{\pi}} = \frac{-e^{-\pi}}{5}$$

$$k(x) = -\frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x) - \frac{e^{2x-\pi}}{5}$$

2. En déterminant une solution particulière de chaque équation et en s'appuyant sur la méthode utilisée précédemment, déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

a. (E₁) : $y' = 2y + 5x + 3$

Solution générale : (E₀) : $y' = 2y$ l'équation différentielle est linéaire du 1er ordre à coefficients constants.

Sa solution générale est : $y(x) = C \times e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Solution particulière : On cherche deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = ax + b$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$$f'_0(x) = a$$

On remplace dans l'équation (E₁) : $y' = 2y + 5x + 3$

$$a = 2(ax + b) + 5x + 3$$

$$a = 2ax + 2b + 5x + 3$$

$$a = (2a + 5)x + (2b + 3)$$

$$\begin{cases} 2a + 5 = 0 \\ 2b + 3 = a \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ b = -\frac{11}{4} \end{cases}$$

Solution générale :

$$y(x) = -\frac{5}{2}x - \frac{11}{4} + C \times e^{2x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

b. (E₂) : $y' = 2y + x^2$

Solution générale : (E₀) : $y' = 2y$ l'équation différentielle est linéaire du 1er ordre à coefficients constants.

Sa solution générale est : $y(x) = C \times e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Solution particulière : On cherche deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$$f'_0(x) = 2ax + b$$

On remplace dans l'équation (E₂) : $y' = 2y + x^2$

$$2ax + b = 2(ax^2 + bx + c) + x^2$$

$$2ax + b = 2ax^2 + 2bx + 2c + x^2$$

$$\begin{cases} b = 2c \\ 2a = 2b \\ 2a + 1 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} c = -\frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Solution générale :

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + C \times e^{2x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$