1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$

(E) : $2y' + y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{2}y = 0$ C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants. Sa solution générale est : $\mathbf{y(x) = C \times e^{-\frac{x}{2}}}$ ***avec*** $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}$

2. On considère l'équation différentielle (E') : $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$

a. Déterminer deux nombres réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$ soit solution de (E') sur $\mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière sous la forme : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px)$ $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px) + e^{-\frac{x}{2}}(2mx+p)$ (E') : $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ $2 \times \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px) + e^{-\frac{x}{2}}(2mx+p)\right) + e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px) = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$	$-e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px) + 2 \times e^{-\frac{x}{2}}(2mx+p) + e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px) = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ $2 \times e^{-\frac{x}{2}}(2mx+p) = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ $4mx + 2p = x + 1$ $4mx + 2p = x + 1$ *par* ***identification*** *on a* $4m = 1$ *et* $2p = 1$ *soit* $m = \frac{1}{4}$ *et* $p = \frac{1}{2}$

b. Montrer qu'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation (E') sur $\mathbb{R}$ si et seulement si (g - f) est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

On a : • (E) : $2y' + y = 0$ La solution générale est : $y(x) = C \times e^{-\frac{x}{2}}$ *avec* $C \in \mathbb{R}$ • (E') : $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$une solution particulière est : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$ Soit g solution de (E'), et f solution particulière de (E'). Posons $u = g - f$ Alors : $u' = g' - f' \Leftrightarrow g' = u' + f'$	On peut écrire : $2g' = 2u' + 2f'$ On ajoute g à chaque terme : $2g' + g = 2u' + 2f' + g$ $2g' + g = 2u' + 2f + u + f$ *ce qui peut s'écrire par* $2g' + g = (2u' + u) + (2f + f)$ g et f sont solutions de (E') $e^{-\frac{x}{2}}(x+1) = (2u' + u) + e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ $2u' + u = 0$ donc u est solution de (E) Conclusion : g est solution de (E') $\Leftrightarrow$ $(g - f)$ est solution de (E)

c. Résoudre l'équation (E') sur $\mathbb{R}$

On a : • (E) : $2y' + y = 0$ Sa solution générale est : $y(x) = C \times e^{-\frac{x}{2}}$ *avec* $C \in \mathbb{R}$ • (E') : $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ une solution particulière est : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$	$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right) + C \times e^{-\frac{x}{2}}$ *avec* $C \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C\right)}$ ***avec*** $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}$

3. Étudier les variations de la fonction **h** définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{h(x)} = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2+2x)$ et déterminer ses limites en $-\infty$ *et* $+\infty$.

$$\mathrm{h}'(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}(x^2+2x) + \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(2x+2)$$

$$\mathrm{h}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}(-x^2+2x+4)$$

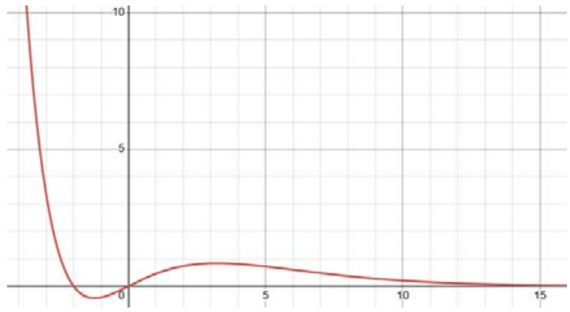
$\Delta = 20 > 0$ *on trouve les racines :* $(x_1\,;\,x_2) = 1 \pm \sqrt{5}$

$\lim\limits_{+\infty} \mathrm{h(x)} = 0$ *et* $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{h(x)} = +\infty$

$$h(x_2) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^2 + 2\left(1+\sqrt{5}\right)\right) \approx 3{,}23$$

$$h(x_1) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\left(\left(1-\sqrt{5}\right)^2 + 2\left(1-\sqrt{5}\right)\right) \approx -1{,}23$$

	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	0	-	
h(x)	$+\infty$		h(x1)=-1,23		h(x2)=3,23		0



4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{j}\,)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h et $\mathcal{F}$ celle de la fonction $\mathrm{x} \to e^{-\frac{x}{2}}$

a. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$.

$$\mathrm{h(x)} = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2+2x)$$

$$\mathrm{h(x)} - e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2+2x) - e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2+2x-4)$$

$\Delta = 20$ *donc* $(x_3\,;\,x_4) = -1 \pm \sqrt{5}$

$-\infty < x < -1-\sqrt{5},$

$\mathrm{h(x)} - e^{-\frac{x}{2}} > 0$ *donc* $\mathcal{C}$ *est au* $-$ *dessus de* $\mathcal{F}$

$-1-\sqrt{5} < x < -1+\sqrt{5},$

$\mathrm{h(x)} - e^{-\frac{x}{2}} < 0$ *donc* $\mathcal{C}$ *est en* $-$ *dessous de* $\mathcal{F}$

$-1+\sqrt{5} < x < +\infty,$

$\mathrm{h(x)} - e^{-\frac{x}{2}} > 0$ *donc* $\mathcal{C}$ *est au* $-$ *dessus de* $\mathcal{F}$

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.