

Probabilités en Voyage Touristique

Une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. Le choix du mode de transport peut changer entre l'aller et le retour.

À l'aller, le **bateau** est choisi dans **65 %** des cas.

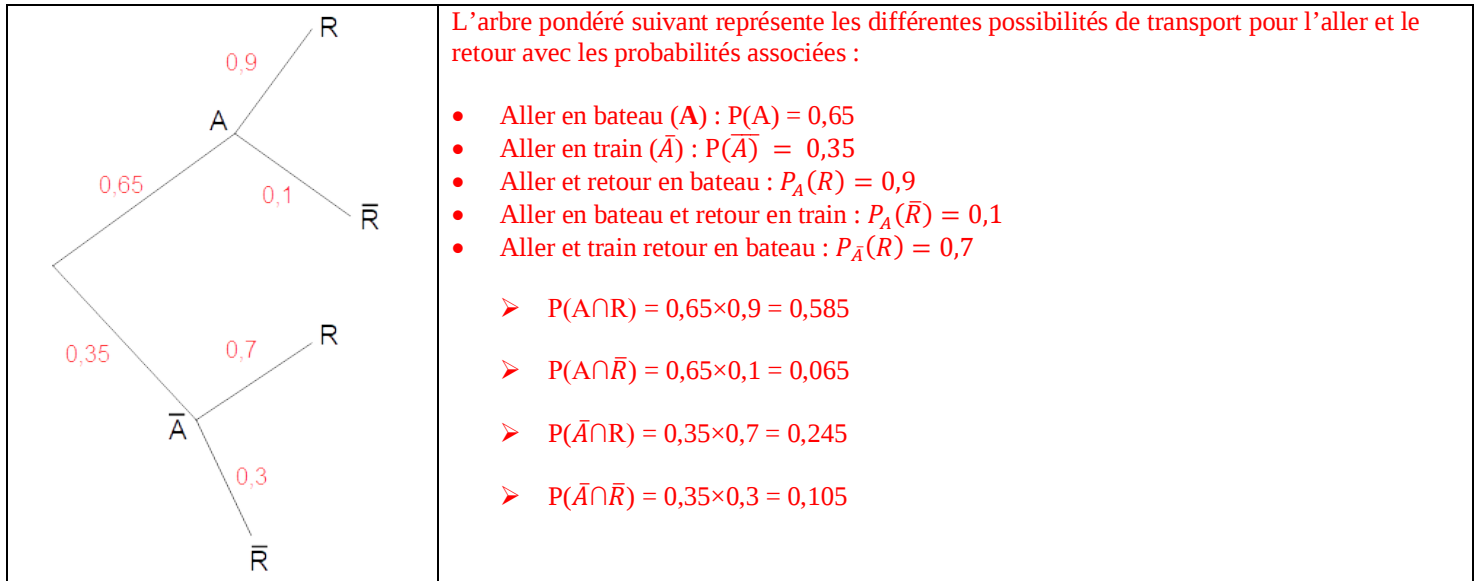
Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10,

Lorsque le train est choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un client. On considère les événements suivants :

- **A** : « le client choisit de faire l'aller en bateau » ;
- **R** : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.



2. On prend au hasard un client de l'agence.

a. Calculer la probabilité que le client fasse l'aller-retour en bateau.

$$P(A \cap R) = 0,65 \times 0,9 = 0,585$$

b. Montrer que la probabilité que le client utilise les deux moyens de transport est égale à 0,31.

$$P(A \cap \bar{R}) = 0,065 \text{ et } P(\bar{A} \cap R) = 0,245$$

L'événement "utiliser les deux moyens de transport" correspond aux cas $A \cap \bar{R}$ ou $\bar{A} \cap R$: $P(A \cap \bar{R}) + P(\bar{A} \cap R) = 0,065 + 0,245 = 0,31$

$$P(A \cap \bar{R}) + P(\bar{A} \cap R) = 0,31$$

3. Calculer la probabilité qu'un client ait pris le bateau à l'aller sachant qu'il a pris le bateau au retour.

On utilise la formule de probabilité conditionnelle :

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{P(A \cap R)}{P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap R)} = \frac{P(A \cap R)}{0,585 + 0,245}$$

$$P_R(A) \approx 0,705$$

4. On prend au hasard 20 clients de cette agence. On note **X** la variable aléatoire qui, pour un client, prend la valeur 1 s'il utilise les deux moyens de transport, et 0 sinon.

a. Donner la loi de probabilité de **X**.

Une variable aléatoire **X** suit une **loi de Bernoulli** de paramètre **p** si elle ne peut prendre que deux valeurs, ici :

$$P(X=1) = p = 0,31 \text{ et } P(X=0) = 1 - p = 0,69$$

b. On admet que le nombre de clients est assez grand pour que l'on puisse considérer que l'on peut modéliser 20 clients par un échantillon de taille 20 de la loi de X, et on note S la somme des variables aléatoires de cet échantillon.

Préciser la loi de probabilité de S.

Chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.31$, correspondant à un client qui utilise les deux moyens de transport.

On a 20 clients indépendants, chacun suit la même loi de Bernoulli, la variable S suit une loi binomiale :

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{20} \sim B(20 \quad 0.31)$$

La loi binomiale $B(n,p)$ modélise le nombre de succès dans une suite de n essais indépendants, où chaque essai a une probabilité p de succès.

Ici, $n = 20$ représente les 20 clients interrogés.

Chaque client a une probabilité $p = 0.31$ d'utiliser les deux moyens de transport.

S représente donc le nombre de clients sur les 20 qui utilisent les deux moyens de transport.

La probabilité d'obtenir exactement k clients utilisant les deux moyens de transport est donnée par la formule de la loi binomiale :

$$P(S = k) = \binom{20}{k} \times (0,31)^k \times (1 - 0,31)^{20-k} \text{ avec où } \binom{20}{k} = \frac{20!}{k!(20-k)!}$$

c. Déterminer la probabilité qu'exactly 12 clients utilisent les deux moyens de transport différents.

$$P(S = 12) = \frac{20!}{12!(20 - 12)!} \times (0,31)^{12} \times (1 - 0,31)^{20-12}$$

$$P(S = 12) = 0,0051 = 0,51\%$$

d. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 2 clients qui utilisent les deux moyens de transport différents.

Nous cherchons à déterminer : $P(S \geq 2)$ où S suit une **loi binomiale** $S \sim B(20 \quad 0.31)$.

Il est plus simple de calculer la probabilité complémentaire : $P(S \geq 2) = 1 - P(S=0) - P(S=1)$

$$P(S \geq 2) = P(S = 0) + P(S = 1) = \frac{20!}{0!(20 - 0)!} \times (0,31)^0 \times (1 - 0,31)^{20-0} = \frac{20!}{1!(20 - 1)!} \times (0,31)^1 \times (1 - 0,31)^{20-1}$$

$$P(S \geq 2) = 1 - 0,00035 - 0,00562 \approx 0.9940$$

5. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de **1560 €** en bateau ; il est de **1200 €** en train. On note Y la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euros de son trajet aller-retour. Calculer l'espérance mathématique de Y et interpréter le résultat.

On définit Y, le coût du trajet. On considère les cas possibles :

- Aller-retour en bateau : $1560 \times 2 = 3120$ € avec $P(A \cap R) = 0,585$.
- Aller-retour en train : coût $1200 \times 2 = 2400$ € avec $P(\bar{A} \cap \bar{R}) = 0,105$.
- Aller en bateau, retour en train : coût $1560 + 1200 = 2760$ € avec $P(A \cap \bar{R}) = 0,065$.
- Aller en train, retour en bateau : coût 2760 € avec $P(\bar{A} \cap R) = 0,245$.

L'espérance se calcule ainsi :

$$E(Y) = 3120 \times 0,585 + 2400 \times 0,105 + 2760 \times 0,065 + 2760 \times 0,245$$

$$E(Y) = 2932.8 \text{ €}$$

En moyenne, un client dépense **2932,80 €** pour son trajet aller-retour.