

Évolution d'un capital

On place un capital de 2000 € dans une banque au taux d'intérêt annuel composé de 1,5%.

1. Modèle discret :

On note C_n la valeur du capital acquis au bout de n années de placement.

a. Donner une expression de C_n en fonction de n .

Suite géométrique de raison $q=1,015$ et de premier terme $C_0 = 2000$. Ainsi, on a la relation de récurrence :

$$C_{n+1} = 1,015 \times C_n$$

D'où, par récurrence :

$$C_n = 2000 \times (1,015)^n$$

b. En supposant que ce capital évolue de manière journalière et en notant S_n sa valeur acquise au bout de n jours, justifier que, pour tout nombre entier positif n , on a :

$$S_n = 2000 \times \left(e^{\frac{1}{365} \times \ln(1,015)} \right)^n$$

b. Justification de l'expression de S_n en modèle discret journalier

On suppose que les intérêts sont appliqués quotidiennement. Le taux journalier correspondant est obtenu en prenant la racine 365e du facteur annuel :

$$q_j = (1,015)^{\frac{1}{365}}$$

On en déduit l'évolution journalière du capital :

$$S_n = 2000 \times \left((1,015)^{\frac{1}{365}} \right)^n$$

Or, on peut réécrire $(1,015)^{\frac{1}{365}}$ sous forme exponentielle en utilisant le logarithme :

$$(1,015)^{\frac{1}{365}} = e^{\frac{1}{365} \times \ln(1,015)}$$

Donc :

$$S_n = 2000 \times e^{\frac{n}{365} \times \ln(1,015)}$$

2. Modèle continu : On suppose que le capital évolue à chaque instant et on note $f(t)$, en euros, sa valeur acquise après t années. On considère alors que f est dérivable et que, pour tout nombre réel strictement positif t , on a :

$$f'(t) = 0,015 \times f(t)$$

Résoudre cette équation différentielle sur $[0 ; +\infty[$.

Cette équation différentielle est une équation du type $y' = a.y$, dont la solution générale est : $f(t) = A \times e^{0,015 \times t}$

En utilisant la condition initiale $f(t) = 2000$, on trouve : $A = 2000$

Donc, la solution est :

$$f(t) = 2000 \times e^{0,015 \times t}$$

3. Communiquer : Comparer les valeurs acquises au bout de 3 jours, 125 jours, 1 an et 2 ans avec chacun des deux modèles proposés. Que constate-t-on ?

Durée	Modèle discret annuel C_n	Modèle discret journalier S_n	Modèle continu $f(t)$
3 jours	$2000 \times (1,015)^{\frac{3}{365}} \approx 2000$	$2000 \times e^{\frac{3}{365} \times \ln(1,015)} \approx 2000$	$f(t) = 2000 \times e^{0,015 \times \frac{3}{365}} \approx 2000$
125 jours	$2000 \times (1,015)^{\frac{125}{365}} \approx 2010$	$2000 \times e^{\frac{125}{365} \times \ln(1,015)} \approx 2010$	$f(t) = 2000 \times e^{0,015 \times \frac{125}{365}} \approx 2010$
1 an (365 jours)	$2000 \times (1,015)^1 \approx 2030$	$2000 \times e^{\ln(1,015)} \approx 2030$	$f(t) = 2000 \times e^{0,015} \approx 2030$
2 ans (730 jours)	$2000 \times (1,015)^2 \approx 2060$	$2000 \times e^{2 \times \ln(1,015)} \approx 2060$	$f(t) = 2000 \times e^{0,015 \times 2} \approx 2061$

Résultats plus précis :

2000,24	2000,24	2000,25
2010,22	2010,22	2010,30
2030,00	2030,00	2030,23
2060,45	2060,45	2060,91

Conclusion

Les différences entre les modèles sont minimales. Cependant, on observe que :

- **Le modèle continu donne des valeurs légèrement plus élevées** que les modèles discrets.
- **Le modèle discret journalier est presque identique au modèle discret annuel**, car l'évolution journalière s'aligne avec l'évolution annuelle composée.
- **L'écart entre le modèle continu et les modèles discrets augmente légèrement avec le temps**, car la croissance continue accumule un peu plus d'intérêts.