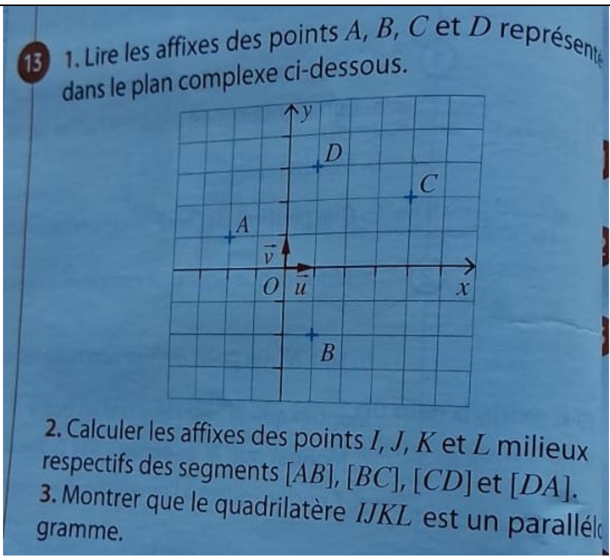
Les nombres complexes



13 1. Lire les affixes des points A, B, C et D représent[…] dans le plan complexe ci-dessous.

2. Calculer les affixes des points I, J, K et L milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
3. Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallél[…]gramme.

1. A(-2 ; i) ; B(-1 ; -2i) ; C(4 ; 2i) ; D(1 ; 3i)

$z_A = -2 + i \; ; \; z_B = 1 - 2i \; ; \; z_C = 4 + 2i \; ; \; z_D = 1 + 3i$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 + i + 1 - 2i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_J = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1 - 2i + 4 + 2i}{2} = \frac{5}{2}$$

$$z_K = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{4 + 2i + 1 + 3i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{5i}{2}$$

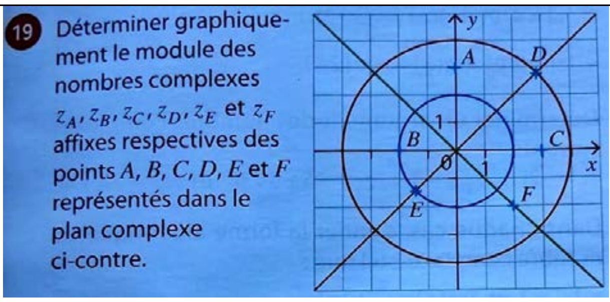
$$z_L = \frac{z_D + z_A}{2} = \frac{1 + 3i - 2 + i}{2} = -\frac{1}{2} + 2i$$

2. Montrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme

Les diagonales IK et JL ont le même milieu

Milieu de IK : $\dfrac{z_I + z_K}{2} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{5}{2} + \frac{5i}{2}\right)}{2} = 1 + i$

Milieu de JL : $\dfrac{z_J + z_L}{2} = \dfrac{\left(\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + 2i\right)}{2} = 1 + i$



19 Déterminer graphiquement le module des nombres complexes z_A, z_B, z_C, z_D, z_E et z_F affixes respectives des points A, B, C, D, E et F représentés dans le plan complexe ci-contre.

$$\boldsymbol{z_A = 3i \;\; donc \; |z_A| = 3}$$

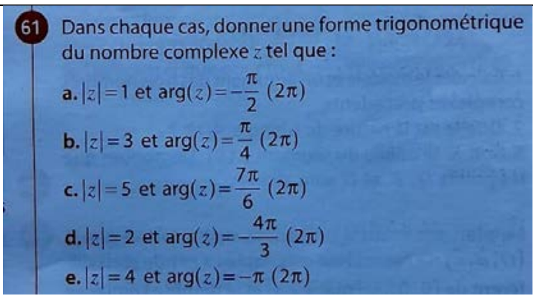
$$\boldsymbol{z_B = -2 \;\; donc \; |z_B| = 2}$$

$$\boldsymbol{z_C = 3 \;\; donc \; |z_C| = 3}$$

$$\boldsymbol{z_D = 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4i \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}(1 + i) \;\; donc \; |z_D| = 4}$$

$$\boldsymbol{z_E = 2 \times \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 2i \times \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}(1 + i) \;\; donc \; |z_E| = 2}$$

$$\boldsymbol{z_F = 2 - 2i \; donc \; |z_F| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$$



61 Dans chaque cas, donner une forme trigonométrique du nombre complexe z tel que :

a. $|z| = 1$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ (2π)

b. $|z| = 3$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (2π)

c. $|z| = 5$ et $\arg(z) = \frac{7\pi}{6}$ (2π)

d. $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\frac{4\pi}{3}$ (2π)

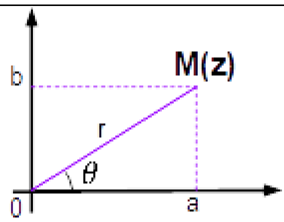
e. $|z| = 4$ et $\arg(z) = -\pi$ (2π)

Forme algébrique : $z = a + ib$

avec

$$\boldsymbol{a = |z| \times \cos(\arg(z))}$$

$$\boldsymbol{et \;\; b = |z| \times \sin(\arg(z))}$$



a. $a = 1 \times \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \; et \;\; b = 1 \times \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \; donc \; z = -i$

b. $a = 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \; et \;\; b = 3 \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \; donc \; z = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1 + i)$

c. $a = 5 \times \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{-5\sqrt{3}}{2} \; et \;\; b = 5 \times \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{-5}{2} \; donc \; z = -\frac{5}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$

d. $a = 2 \times \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -1 \; et \;\; b = 2 \times \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \; donc \; z = -1 + i\sqrt{3}$

e. $a = 4 \times \cos(-\pi) = -4 \; et \;\; b = 4 \times \sin(-\pi) = 0 \; donc \; z = -4$

54 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère l'ensemble $\mathscr{E}=\{M(z)/\arg(z)=\pi\ (2\pi)\}$.
$M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\pi\ (2\pi)$, donc l'ensemble $\mathscr{E}$ est la demi-droite $]OA)$ avec A d'affixe -1.
Tracer les ensembles suivants.

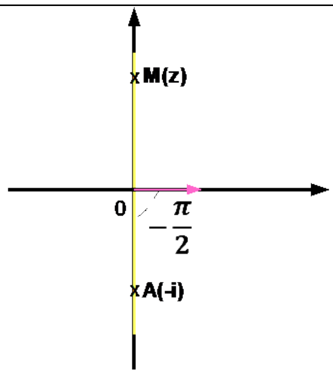
a. $\left\{M(z)/\arg(z)=\frac{-\pi}{2}\ (\pi)\right\}$

b. $\left\{M(z)/\arg(z-1)=-\frac{\pi}{4}\ (2\pi)\right\}$

c. $\left\{M(z)/\arg(z-2+i)=\frac{5\pi}{6}\ (\pi)\right\}$

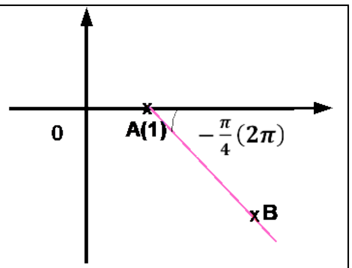
a. $\left\{M(z)\middle|arg(z)=-\frac{\pi}{2}(\pi)\right\}\Leftrightarrow(\vec{u};\overrightarrow{OM})=-\frac{\pi}{2}(\pi)$

L'ensemble cherché est la droite $(OA)-\{0\}$ où A est la point d'affixe -i



b. $\left\{M(z)\middle|arg(z-1)=-\frac{\pi}{4}(2\pi)\right\}\Leftrightarrow\left\{M(z)\middle|arg(z-z_A)=-\frac{\pi}{4}(2\pi)\right\}\Leftrightarrow(\vec{u};\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{4}(2\pi)$

L'ensemble cherché est la demi-droite $]AB]$ où A(1) et où B est un point tel que $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=-\frac{\pi}{4}(2\pi)$



c. $\left\{M(z)\middle|arg(z-(2-i))=\frac{5\pi}{6}(\pi)\right\}\Leftrightarrow\left\{M(z)\middle|arg(z-z_A)=\frac{5\pi}{6}(\pi)\right\}\Leftrightarrow(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{5\pi}{6}(\pi)$

L'ensemble des point M cherché sont sur la droite $]AB]$ où A(2-i) et où B est un point tel que $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=\frac{5\pi}{6}(\pi)$