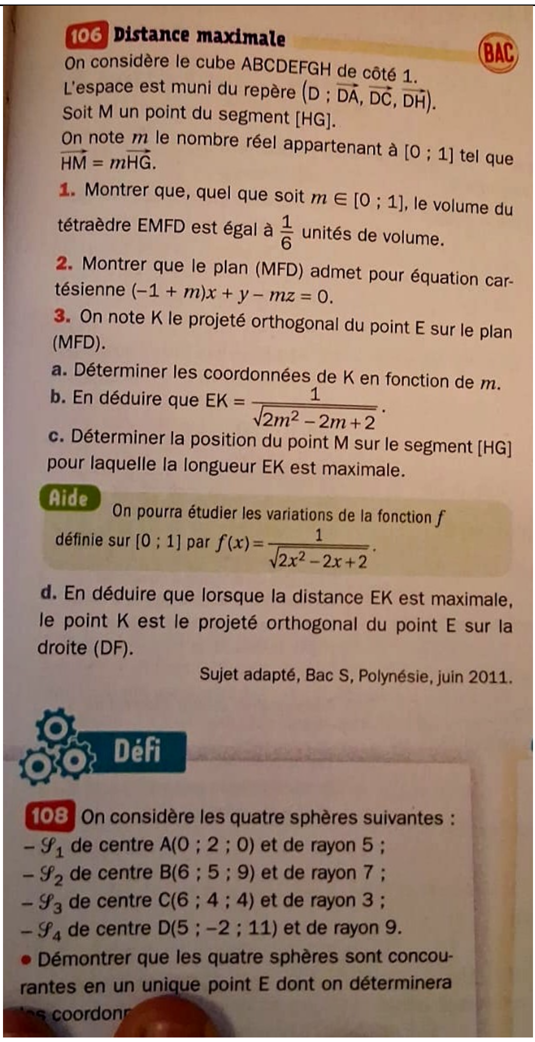
Distance maximale et vecteur orthogonal



106 Distance maximale BAC

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1.

L'espace est muni du repère $(D\,;\,\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

Soit M un point du segment [HG].

On note m le nombre réel appartenant à [0 ; 1] tel que $\overrightarrow{HM} = m\overrightarrow{HG}$.

1. Montrer que, quel que soit $m \in [0\,;\,1]$, le volume du tétraèdre EMFD est égal à $\frac{1}{6}$ unités de volume.

2. Montrer que le plan (MFD) admet pour équation cartésienne $(-1+m)x + y - mz = 0$.

3. On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (MFD).

a. Déterminer les coordonnées de K en fonction de m.

b. En déduire que $EK = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

c. Déterminer la position du point M sur le segment [HG] pour laquelle la longueur EK est maximale.

Aide On pourra étudier les variations de la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2-2x+2}}$.

d. En déduire que lorsque la distance EK est maximale, le point K est le projeté orthogonal du point E sur la droite (DF).

Sujet adapté, Bac S, Polynésie, juin 2011.

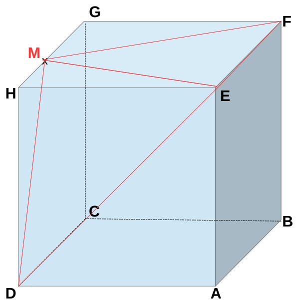
Défi

108 On considère les quatre sphères suivantes :
- $\mathcal{S}_1$ de centre A(0 ; 2 ; 0) et de rayon 5 ;
- $\mathcal{S}_2$ de centre B(6 ; 5 ; 9) et de rayon 7 ;
- $\mathcal{S}_3$ de centre C(6 ; 4 ; 4) et de rayon 3 ;
- $\mathcal{S}_4$ de centre D(5 ; −2 ; 11) et de rayon 9.

• Démontrer que les quatre sphères sont concourantes en un unique point E dont on déterminera les coordon…

1.

$$\overrightarrow{HM} = m \times \overrightarrow{HG}$$



$$A(EMF) = 1 - A(EHM) - A(FGM)$$

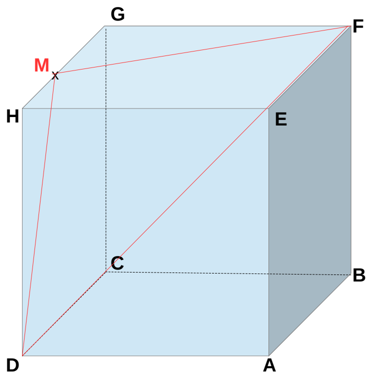
$$= 1 - \frac{1\times m}{2} - \frac{1\times(1-m)}{2}$$

$$A(EMF) = \frac{2-m-1+m}{2} = \frac{1}{2}$$

$$V(EMFD) = \frac{1}{3} \times A(EMF) \times DH$$

$$V(EMFD) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$

2.



$P(MFD) : (m-1)x + y - mz = 0$

Tout plan admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,,c)\neq(0,0,0)$. Cette équation est appelée équation cartésienne du plan.

$M(0\,;\,m\,;\,1) \in P(MFD)$

$D(0\,;0\,;\,0) \in P(MFD)$

$F(1\,;\,1\,;\,1) \in P(MFD)$

$$\overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \vec{n} \text{ le vecteur perpendiculaire } \overrightarrow{DM} \text{ et à } \overrightarrow{DF} : \vec{n} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

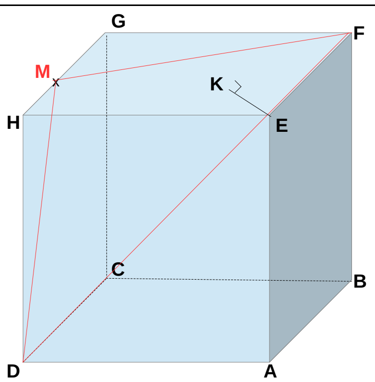
$$\vec{n}.\overrightarrow{DM} = 0 \text{ alors } m \times e + f = 0 \ : f = -m \times e. \text{ On prend } e = 1 \text{ donc } f = -m$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{DF} = 0 \text{ alors } d + e + f = 0 : d + 1 - m = 0 \ \text{ soit } d = m - 1$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} m-1 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal au plan } P(MFD) \text{ donc } (m-1)x + y - mz + d = 0$$

$$D(0\,;0\,;\,0) \in P(MFD) \text{ donc } d = 0 \text{ d'où } (m-1)x + y - mz = 0$$

3.a.



$$\overrightarrow{EK} = \lambda \times \vec{n} \ (\vec{n} \text{ normal à } P(MFD)) \text{ donc } \begin{cases} x_K - 1 = \lambda(m-1) \\ y_K = \lambda \\ z_K - 1 = -\lambda m \end{cases} = \begin{cases} x_K = \lambda(m-1) + 1 \\ y_K = \lambda \\ z_K = 1 - \lambda m \end{cases}$$

$$K \in P(MFD) : (m-1)x_K + y_K - mz_K = 0$$

$$(m-1)(\lambda(m-1)+1) + \lambda - m(1-\lambda m) = 0$$

$$\text{Après simplification on trouve : } \lambda = \frac{1}{2m^2 - 2m + 2}$$

$$\text{Coordonnées de K :}\begin{cases} x_K = \dfrac{(m-1)}{2m^2-2m+2}+1 \\ y_K = \dfrac{1}{2m^2-2m+2} \\ z_K = 1-\dfrac{m}{2m^2-2m+2} \end{cases} \quad \text{K :}\begin{cases} x_K = \dfrac{2m^2-m+1}{2m^2-2m+2} \\ y_K = \dfrac{1}{2m^2-2m+2} \\ z_K = \dfrac{2m^2-3m+2}{2m^2-2m+2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix} x_K - 1 \\ y_K \\ z_K - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(m-1)}{2m^2-2m+2} \\ \dfrac{1}{2m^2-2m+2} \\ -\dfrac{m}{2m^2-2m+2} \end{pmatrix}$$

$$EK = \sqrt{\left(\frac{(m-1)}{2m^2-2m+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2m^2-2m+2}\right)^2 + \left(-\frac{m}{2m^2-2m+2}\right)^2} \Leftrightarrow EK = \frac{\sqrt{(m-1)^2+1+m^2}}{2m^2-2m+2}$$

$$EK = \frac{\sqrt{2m^2-2m+2}}{2m^2-2m+2} = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$$

$$EK \text{ est maxi si } \left(\frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}\right)' = 0$$

$$\text{Je pose } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2-2x+2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} \text{ avec } u(x) = 2x^2-2x+2 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)\sqrt{u(x)}} \text{ avec } u'(x) = 4m-2 = 2(2m-1)$$

$$f'(x) = \frac{1-2x}{u(x)\sqrt{u(x)}} = 0 \text{ si } x = \frac{1}{2}. \text{Ici } m = \frac{1}{2}$$

3.d.

$$\text{Coordonnées de K :}\begin{cases} x_K = \dfrac{2}{3} \\ y_K = \dfrac{2}{3} \text{ avec } m = \dfrac{1}{2} \\ z_K = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Droite } (DF) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

avec t ∈ ℝ est une représentation paramétrique de la droite (DF) passant par le point D(0; 0; 0) et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ car (1; 1; 1) ≠ (0; 0; 0).

$$\text{Pour } t = \frac{2}{3}, \text{ on constate que } K \text{ est sur la droite } (DF)$$

99 Vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires Approfondissement

1. On considère trois points de l'espace :

A(1 ; 0 ; 3), B(3 ; 2 ; 4) et C(2 ; 3 ; 5).

a. Vérifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

b. Écrire le système d'équations (S) vérifié par les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $\vec{n}$ soit orthogonal à la fois aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Calculer | À partir du système (S), exprimer les variables b et c en fonction de a.

d. En déduire les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC) et une équation de ce plan.

2. En vous aidant de la question 1, déterminer dans chaque cas, une équation du plan (ABC).

a. A(3 ; −2 ; 1), B(2 ; 0 ; 2) et C(4 ; 1 ; −1).

b. A(−1 ; −1 ; 2), B(1 ; 1 ; 4) et C(0 ; 0 ; 4).

1.a.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles

1.b.

$$\vec{n} \text{ est respectivement orthogonal à } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ ssi } \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \text{ et } \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2a + 2b + c = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = a + 3b + 2c = 0$$

$$S : \begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ a + 3b + 2c = 0 \end{cases}$$

1.c.

$$S : \begin{cases} 2b + c = -2a \\ 3b + 2c = -1 \end{cases}$$

1.d.

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2b + c = -2 \\ 3b + 2c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ 4b + 2c = -4 \\ 3b + 2c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases} \iff \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Une équation du plan (ABC)} : x - 3y + 4z + d = 0$$

$$A \in (ABC) \text{ donc } d = -13$$

$$\text{Une équation du plan (ABC)} : x - 3y + 4z - 13 = 0$$

2.