

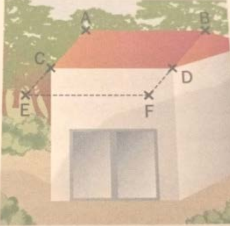
Géométrie dans l'espace

74 On modélise le toit d'une maison par un rectangle $ABDC$. On veut prolonger ce toit pour obtenir un auvent $CDFE$ sous forme de rectangle.

• Si l'on place le point E tel que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD},$$

l'auvent prolonge-t-il le toit avec la même pente ?



On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Soit $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} - \frac{1}{2} \times \overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \times (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \times (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

Or $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ car c'est un rectangle donc $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2} \times \overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. E est dans le prolongement de la droite (AC)

87 ABCDEFGH est un pavé droit. M et N sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

1. Faire une figure.

2. x est un nombre réel et P est le point tel que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BN} + x\overrightarrow{AB}$.
Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ et x .

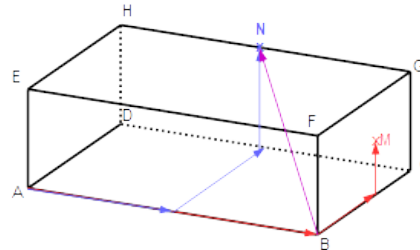
3. a. Déterminer x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AP}$ soient colinéaires.
b. Que dire alors des points A, M et P ? Justifier.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AE}$$

NP = x.AB

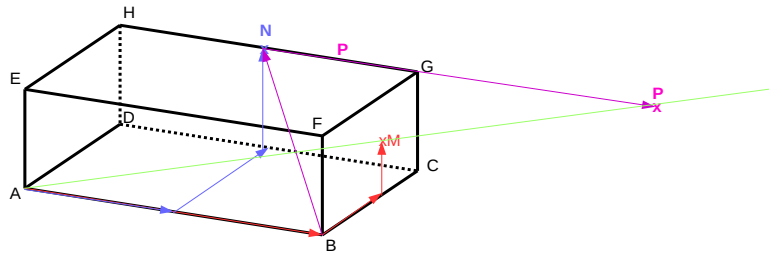
ABCDEFGH est un pavé droit.

Q1. Faire une figure



Q2. Exprimer AP en fonction de AB, AD, AE et x

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{BN} + x\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BP} &= \left(\frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) + x\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BP} &= \left(\frac{1}{2} + x\right)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$$

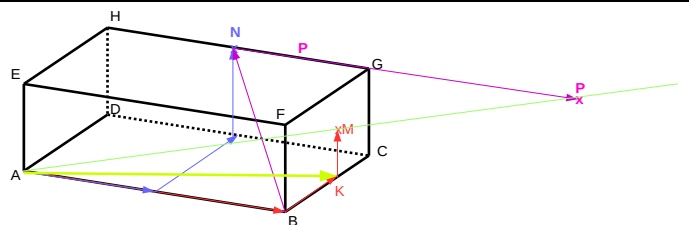
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2} + x\right)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

Q3. a) Déterminer x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AP}$ soient colinéaires

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2} + x\right)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AE} \quad NP = xAB$$

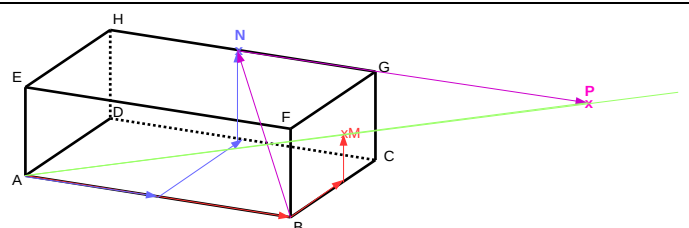
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} &= \left(\frac{3}{2} + x\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} &= \left(\frac{3}{2} + x\right)\overrightarrow{AB}^2\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$$

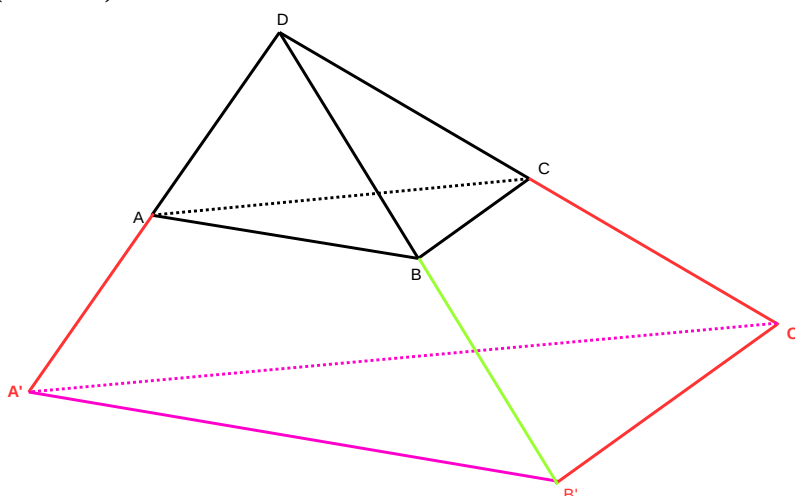
$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{2} + x\right)\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2} + x\right)\overrightarrow{AM} \text{ et } NP = xAB$$



Q3. b) Que dire alors des points A, M et P ? Justifier

Ils sont alignés car $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2} + x\right)\overrightarrow{AM}$...

104 A, B, C et D sont quatre points de l'espace non coplanaires. a. Faire une figure à main levée et construire les points A', B' et C' tels que A' est le symétrique de D par rapport à A, $\overrightarrow{DC'} = 2\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{C'B'} = 2\overrightarrow{CB}$. b. Montrer que les plans (ABC) et (A'B'C') sont parallèles. A est le milieu de $[A'D]$ B est le milieu de $[B'D]$ C est le milieu de $[C'D]$ Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires : $\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'D} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB'} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{DB'}) \\ \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} \text{ Donc } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{A'B'} \text{ sont colinéaires.}\end{aligned}$ Démontrer que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont colinéaires :	A, B, C et D sont quatre points de l'espace non coplanaires (tétraèdre) 
--	---

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'D} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B'D} + \overrightarrow{DC'})$$

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} \text{ Donc } \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{B'C'} \text{ sont colinéaires.}$$

Deux vecteurs non colinéaires de (ABC), $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de (A'B'C') $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$, donc (ABC) // (A'B'C')

125 $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?	Deux vecteurs sont toujours coplanaires. Donc si deux de ces vecteurs sont colinéaires, alors les trois vecteurs sont coplanaires, car ils ne forment plus qu'au maximum deux directions indépendantes.
--	---

On vérifie visuellement que $\vec{w}$ n'est colinéaire ni à $\vec{u}$ ni à $\vec{v}$, mais c'est mieux de la faire avant.

Par le calcul : Vérifions que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires en montrant que $\vec{u} = k.\vec{v}$; $\vec{u} = k.\vec{w}$ et $\vec{v} = k.\vec{w}$ sont impossibles.

Montrons maintenant que $\vec{w}$ peut s'exprimer en fonction des vecteurs $\vec{u}$ à $\vec{v}$ sous la forme d'une combinaison linéaire $\vec{u} = \alpha.\vec{v} + \beta.\vec{w}$, qui donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ -3\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\alpha - \beta = 1 \\ -3\alpha + 0\beta = -2 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha - \beta = 1 \\ -3\alpha = -2 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha - \beta = 1 \\ \alpha = \frac{2}{3} \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha - 1 \\ \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = -2\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

On montre que ce système possède bien une solution :

$$\vec{u} = \frac{2}{3}.\vec{v} - \frac{7}{3}.\vec{w}$$