Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$

Exercice 29 Donner la décomposition en éléments simples sur R(X) puis sur C(X) des fractions rationnelles suivantes

1. $F = \dfrac{1}{X(X-1)(X-2)}$

Le dénominateur est déjà factorisé en trois facteurs linéaires réels distincts

Donc, sur R(X) et aussi sur C(X), la forme générale de la décomposition en éléments simples est :

$$F = \frac{1}{X(X-1)(X-2)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{(X-1)} + \frac{C}{(X-2)}$$

Avec (A,B,C) des constantes réelles dans R(X), complexes dans C(X).

Décomposition sur R(X)

On met au même dénominateur

$$F = \frac{1}{X(X-1)(X-2)} = \frac{A(X-1)(X-2) + BX(X-2) + CX(X-1)}{X(X-1)(X-2)}$$

Donc $A(X-1)(X-2) + BX(X-2) + CX(X-1) = 1$

On profite des racines du dénominateur : X = 0, 1, 2.

- X = 0 donc $A(-1)(-2) = 1$ soit $2A = 1$ soit $A = \frac{1}{2}$
- X = 1 donc $B(1-2) = 1$ soit $B = -1$
- X = 2 donc $2C(2-1) = 1$ soit $C = \frac{1}{2}$

Les coefficients (A,B,C) sont réels, donc cette décomposition est bien une décomposition sur R(X).

$$F = \frac{1}{2X} - \frac{1}{(X-1)} + \frac{1}{2(X-2)}$$

La décomposition en éléments simples sur C(X) a la même forme car tous les pôles sont réels et simples.

2. $\mathbf{F = \dfrac{X^6 - 3X^4 - 3X^2 - 5}{X^2 - 4}}$

Première étape : rendre la fraction propre (division euclidienne)

Le numérateur est de degré 6, le dénominateur de degré 2

$\Rightarrow$ fraction impropre, on commence par une division euclidienne de polynômes.

On divise $(X^6 - 3X^4 - 3X^2 - 5)$ par $(X^2 - 4)$.

Premier terme : $\dfrac{X^6}{X^2} = X^4$

On multiplie : $X^4(X^2 - 4) = X^6 - 4X^4$

On soustrait :

$(X^6 - 3X^4 - 3X^2 - 5) - (X^6 - 4X^4) = X^6 - 3X^4 - 3X^2 - 5 - X^6 + 4X^4 = X^4 - 3X^2 - 5$

Deuxième terme : $\frac{X^4}{X^2} = X^2$

On multiplie : $X^2(X^2 - 4) = X^4 - 4X^2$

On soustrait : $(X^4 - 3X^2 - 5) - (X^4 - 4X^2) = X^4 - 3X^2 - 5 - X^4 + 4X^2 = X^2 - 5$

Troisième terme : $\frac{X^2}{X^2} = 1$

On multiplie : $1.(X^2 - 4) = X^2 - 4$

On soustrait : $(X^2 - 5) - (X^2 - 4) = X^2 - 5 - X^2 + 4 = -1$ à **un degré 0**

On ne peut plus continuer car le reste de degré 0 < degré 2.

Donc : $X^6 - 3X^4 - 3X^2 - 5 = (X^2 - 4)(X^4 + X^2 + 1) - 1$

En divisant par $(X^2 - 4)$: $F(X) = X^4 + X^2 + 1 + \frac{-1}{X^2 - 4}$

On a déjà un polynôme et une fraction propre. Il reste à décomposer : $G(X) = \frac{1}{X^2 - 4} = \frac{1}{(X - 2)(X + 2)}$

Tous les facteurs sont linéaires réels.

On cherche alors :

$$G(X) = \frac{1}{X^2 - 4} = \frac{1}{(X - 2)(X + 2)} = \frac{A}{(X - 2)} + \frac{B}{(X + 2)} = \frac{A(X + 2) + B(X - 2)}{(X - 2)(X + 2)} = \frac{AX + 2A + BX - 2B}{(X - 2)(X + 2)}$$

$AX + 2A + BX - 2B = 1$

$A + B = 0$ et $2A - 2B = 1$ soit $B = -\frac{1}{4}$ et $A = \frac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}$: $F(X) = X^4 + X^2 + 1 - \frac{1}{4(X - 2)} + \frac{1}{4(X + 2)}$ C'est la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$.

Donc la décomposition sur C(X)) est identique

8. $\mathbf{F = \frac{2X + 1}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2}}$

Factorisation du dénominateur

On regarde séparément les deux facteurs :

$(X^2 + X + 1)$: discriminant $(\Delta = 1 - 4 = -3 < 0)$: irréductible sur R, mais factorisable sur C.

$(X - 1)^2$: facteur linéaire réel double.

Donc sur R(X), le dénominateur est $(X^2 + X + 1)(X - 1)^2$

Forme générale de la décomposition sur R(X)

$$F = \frac{2X + 1}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2} = \frac{AX + B}{(X^2 + X + 1)} + \frac{C}{(X - 1)} + \frac{D}{(X - 1)^2}$$ avec (A, B, C, D) dans R.

Mise au même dénominateur

$(AX + B)(X - 1)^2 + C(X^2 + X + 1)(X - 1) + D(X^2 + X + 1) = 2X + 1$

- $(AX + B)(X^2 - 2X + 1) = AX^3 - 2AX^2 + AX + BX^2 - 2BX + B$
- $C(X^2 + X + 1)(X - 1) = CX^3 - CX^2 + CX^2 - CX + CX - C$
- $D(X^2 + X + 1) = DX^2 + DX + D$

$$\begin{pmatrix} A + C = 0 \\ -2A + B + D = 0 \\ A - 2B + D = 2 \\ B - C + D = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C = -\frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ A = \frac{1}{3} \\ D = 1 \end{pmatrix}$$

C'est la décomposition en éléments simples sur R(X) : $F = \frac{X - 1}{3(X^2 + X + 1)} - \frac{1}{3(X - 1)} + \frac{1}{(X - 1)^2}$

Décomposition sur C(X)

Sur C, on factorise le polynôme $(X^2 + X + 1)$: $\Delta = -3$ donc $X_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $X_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

$(X^2 + X + 1) = (X - X_1)(X - X_2)$

$$\frac{X - 1}{3(X^2 + X + 1)} = \frac{X - 1}{3(X - X_1)(X - X_2)} = \frac{E}{3(X - X_1)} + \frac{F}{3(X - X_2)} = \frac{3E(X - X_2) + 3F(X - X_1)}{3(X - X_1)(X - X_2)}$$

$3E(X - X_2) + 3F(X - X_1) = X - 1 \Leftrightarrow 3(E + F)X - 3(EX_2 + FX_1) = X - 1$

$$\begin{cases} 3(E+F)=1 \\ 3(EX_2+FX_1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F=\dfrac{1-X_2}{3(X_1-X_2)} \\ E=\dfrac{X_1-1}{3(X_1-X_2)} \end{cases}$$ Or sachant que $X_1=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $X_2=e^{\frac{4i\pi}{3}}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} F=\dfrac{1}{3}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}+2e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-i}{6i} \\ E=-\dfrac{1}{3}\left(2e^{\frac{2i\pi}{3}}+e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) \end{cases}$

$$F=\frac{E}{3(X-X_1)}+\frac{F}{3(X-X_2)}-\frac{1}{3(X-1)}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

3. $[F=\dfrac{2X+1}{(X^2-1)^2}$	**6.** $F=\dfrac{X^2+X+1}{(X^2+1)(X^2-1)}$	**10.** $F=\dfrac{1}{X^4+3X^2+1}$
4. $F=\dfrac{X^5+3X}{X^4-5X^2+4}$	**7.** $F=\dfrac{1}{(X+1)(X^2+X+1)^2}$	**11.** $F=\dfrac{X}{(X^2-5X+6)(X-1)^2}$
5. $F=\dfrac{1}{X^3+1}$	**9.** $F=\dfrac{1}{X^4+X^2+1}$	12. $F=\dfrac{(X^2+4)^2}{(X^2+1)(X^2-2)^2}$

Exercice 31. Decompose into simple elements (partial fractions) over C(X) the following fractions :

1. $\dfrac{1}{X^2-2X\cos(\theta)+1}$ **avec** $\theta \in R$

On va décomposer F(X) avec $\theta \in R$ en éléments simples dans C(X).

1. Factorisation du dénominateur

On utilise $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

Alors $X^2-2X\cos(\theta)+1 = X^2-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})X+1=(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$

Les racines sont donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

2. Décomposition en éléments simples (cas général (\sin\θ\neq0))

Sur C(X), $\dfrac{1}{(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})}=\dfrac{A}{(X-e^{i\theta})}+\dfrac{B}{(X-e^{-i\theta})}=\dfrac{A(X-e^{-i\theta})+B(X-e^{i\theta})}{(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})}$

$A(X-e^{-i\theta})+B(X-e^{i\theta})=1 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -Ae^{-i\theta}-Be^{i\theta}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ B=\dfrac{1}{(e^{-i\theta}-e^{i\theta})} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{i}{2\sin(\theta)} \\ B=\dfrac{i}{2\sin(\theta)} \end{cases}$

Sur C(X), $\dfrac{1}{(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})}=\left(\dfrac{i}{2\sin(\theta)}\right)\left(\dfrac{1}{X-e^{i\theta}}-\dfrac{1}{X-e^{-i\theta}}\right)$

Pour $\theta = 0$: $\dfrac{1}{x^2-2x+1}=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Pour $\theta = \pi$: $\dfrac{1}{x^2-2x+1}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

2. $\mathbf{\frac{X^2+1}{X^4+1}}$

2. $\mathbf{\frac{X^2+1}{X^4+1}}$

1. Factorisation du dénominateur

$\mathbf{X^4+2X^2+1=(X^2+1)^2}$ **donc** $\mathbf{X^4+1=(X^2+1)^2-2X^2}=\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)$

Donc $F(X)=\frac{X^2+1}{X^4+1}=\frac{X^2+1}{\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)}$

2. Décomposition sur R(X) et C(X)

Comme on a deux facteurs quadratiques distincts, on pose

$$F(X)=\frac{X^2+1}{X^4+1}=\frac{AX+B}{\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)}+\frac{CX+D}{\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)}=\frac{(AX+B)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)+(CX+D)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)}{\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)}$$

$$(AX+B)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)+(CX+D)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)=X^2+1$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=1 \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\frac{1}{2} \\ C=0 \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\mathbf{F(X)=\frac{X^2+1}{X^4+1}=\frac{1}{2\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)}+\frac{1}{2\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)}}$ C'est la décomposition en éléments simples sur R(X).

2. Factorisation complexe de chaque quadratique

$$X^2+\sqrt{2}X+1=0 \implies \Delta=2-4=-2 \implies X=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

On pose : $\alpha_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\mathbf{X^2+\sqrt{2}X+1=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)}$

$$X^2-\sqrt{2}X+1=0 \implies \Delta=-2 \implies X=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$$ On pose $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}, \beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\mathbf{X^2-\sqrt{2}X+1=(X-\beta_1)(X-\beta_2)}$$

3. Décomposition de chaque quadratique en simples pôles complexes

Formule standard : pour deux racines simples $\alpha \neq \beta$,

$$\mathbf{\frac{1}{(X-\alpha)(X-\beta)}=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{X-\alpha}-\frac{1}{X-\beta}\right)}$$

a) Pour $X^2 + \sqrt{2}X + 1$

$$\frac{1}{X^2 + \sqrt{2}X + 1} = \frac{1}{(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{1}{X - \alpha_1} - \frac{1}{X - \alpha_2}\right)$$

Calculons $\alpha_2 - \alpha_1$:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2i\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\,i$$

Donc :

$$\mathbf{\frac{1}{X^2 + \sqrt{2}X + 1} = \frac{1}{-\sqrt{2}i}\left(\frac{1}{X - \alpha_1} - \frac{1}{X - \alpha_2}\right) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{X - \alpha_1} - \frac{1}{X - \alpha_2}\right)}$$

b) Pour $X^2 - \sqrt{2}X + 1$

$$\frac{1}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} = \frac{1}{(X - \beta_1)(X - \beta_2)} = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1}\left(\frac{1}{X - \beta_1} - \frac{1}{X - \beta_2}\right)$$

$$\beta_2 - \beta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2i\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}i$$

Donc encore :

$$\mathbf{\frac{1}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{X - \beta_1} - \frac{1}{X - \beta_2}\right)}$$

4. Décomposition complète de F sur C(X)

$$F(X) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{X^2 + \sqrt{2}X + 1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{X^2 - \sqrt{2}X + 1}$$

En remplaçant les expressions :

$$F(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{X - \alpha_1} - \frac{1}{X - \alpha_2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{X - \beta_1} - \frac{1}{X - \beta_2}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{F(X) = \frac{i}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{X - \alpha_1} - \frac{1}{X - \alpha_2} + \frac{1}{X - \beta_1} - \frac{1}{X - \beta_2}\right)}}$$

avec

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}, \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Comme les coefficients sont réels (donc complexes), c'est aussi une décomposition valable dans C(X)

3. $\frac{1}{X^n - 1}$ avec $n \in N*$

4. $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$ avec $n \in N*$