Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

2. $\dfrac{\mathbf{X^2+1}}{\mathbf{X^4+1}}$

1. Factorisation du dénominateur

$\mathbf{X^4+2X^2+1=(X^2+1)^2}$ **donc** $\mathbf{X^4+1=(X^2+1)^2-2X^2}=\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)$

Donc $F(X)=\dfrac{X^2+1}{X^4+1}=\dfrac{X^2+1}{\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)}$

2. Décomposition sur $\mathbf{R(X)}$ et $\mathbf{C(X)}$

Comme on a deux facteurs quadratiques distincts, on pose

$$F(X)=\frac{X^2+1}{X^4+1}=\frac{AX+B}{\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)}+\frac{CX+D}{\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)}=\frac{(AX+B)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)+(CX+D)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)}{\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)}$$

$(AX+B)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)+(CX+D)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)=X^2+1$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=1 \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\dfrac{1}{2} \\ C=0 \\ D=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\mathbf{F(X)}=\dfrac{\mathbf{X^2+1}}{\mathbf{X^4+1}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)}}$ C'est la décomposition en éléments simples sur $R(X)$.

2. Factorisation complexe de chaque quadratique

$X^2+\sqrt{2}X+1=0 \implies \Delta=2-4=-2 \implies X=\dfrac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

On pose : $\alpha_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\mathbf{X^2+\sqrt{2}X+1=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)}$

$$X^2-\sqrt{2}X+1=0 \implies \Delta=-2 \implies X=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\pm i\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ On pose } \beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}, \beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{X^2-\sqrt{2}X+1=(X-\beta_1)(X-\beta_2)}$$

3. Décomposition de chaque quadratique en simples pôles complexes

Formule standard : pour deux racines simples $\alpha \neq \beta$,

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(X-\alpha)(X-\beta)}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\beta-\alpha}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{X-\alpha}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{X-\beta}}\right)$$

a) Pour $\mathbf{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$

$$\frac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1} = \frac{1}{(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)} = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\left(\frac{1}{X-\alpha_1} - \frac{1}{X-\alpha_2}\right)$$

Calculons $\alpha_2 - \alpha_1$:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2i\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\,i$$

Donc :

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{X^2+\sqrt{2}X+1}} = \frac{1}{-\sqrt{2}i}\left(\frac{1}{X-\alpha_1} - \frac{1}{X-\alpha_2}\right) = \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{\sqrt{2}}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{X-\alpha_1}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{X-\alpha_2}}\right)$$

b) Pour $\mathbf{X^2 - \sqrt{2}X + 1}$

$$\frac{1}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{1}{(X-\beta_1)(X-\beta_2)} = \frac{1}{\beta_2-\beta_1}\left(\frac{1}{X-\beta_1} - \frac{1}{X-\beta_2}\right)$$

$$\beta_2 - \beta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2i\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}i$$

Donc encore :

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{X^2-\sqrt{2}X+1}} = \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{\sqrt{2}}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{X-\beta_1}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{X-\beta_2}}\right)$$

4. Décomposition complète de F sur C(X)

$$F(X) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{X^2-\sqrt{2}X+1}$$

En remplaçant les expressions :

$$F(X) = \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{X-\alpha_1} - \frac{1}{X-\alpha_2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{X-\beta_1} - \frac{1}{X-\beta_2}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{F(X) = \frac{i}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{X-\alpha_1} - \frac{1}{X-\alpha_2} + \frac{1}{X-\beta_1} - \frac{1}{X-\beta_2}\right)}}$$

avec

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}, \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Comme les coefficients sont réels (donc complexes), c'est aussi une décomposition valable dans C(X)