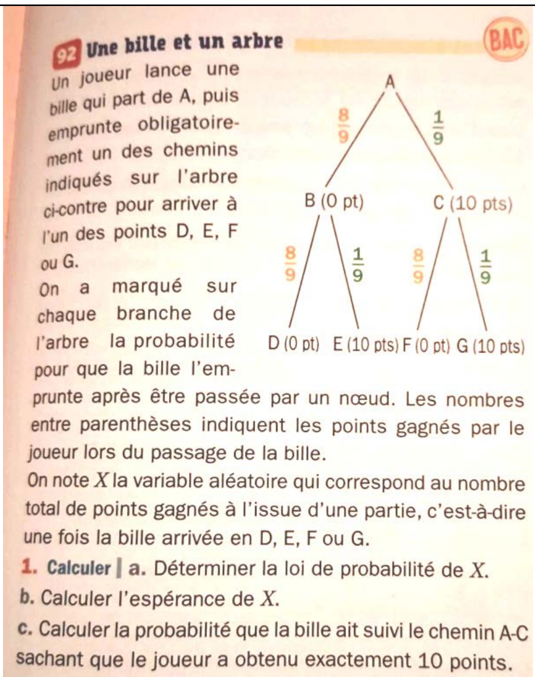
Dénombrements, probabilités et lois de probabilité



92 Une bille et un arbre BAC

Un joueur lance une bille qui part de A, puis emprunte obligatoirement un des chemins indiqués sur l'arbre ci-contre pour arriver à l'un des points D, E, F ou G.

On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passée par un nœud. Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille.

On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie, c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Calculer | a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X.

c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi le chemin A-C sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

a. L'**univers image** des évènements E par la variable X est l'ensemble : X(E) = {0 ; 10 ; 20}

La **loi de probabilité** de la variable X est la fonction qui à chaque xi de X associe sa probabilité : p(X = xi) ou pi.

$p(X=0)=p(B)\times p_B(D)=\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}=\frac{64}{81}$

$p(X=10)=p(B)\times p_B(E)+p(C)\times p_C(F)=\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{81}$

$p(X=20)=p(C)\times p_C(G)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{81}$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau:

$\boldsymbol{x_i}$	**0**	**10**	**20**	$\sum$
$p(X=\boldsymbol{x_i})$	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{1}{81}$	**1**

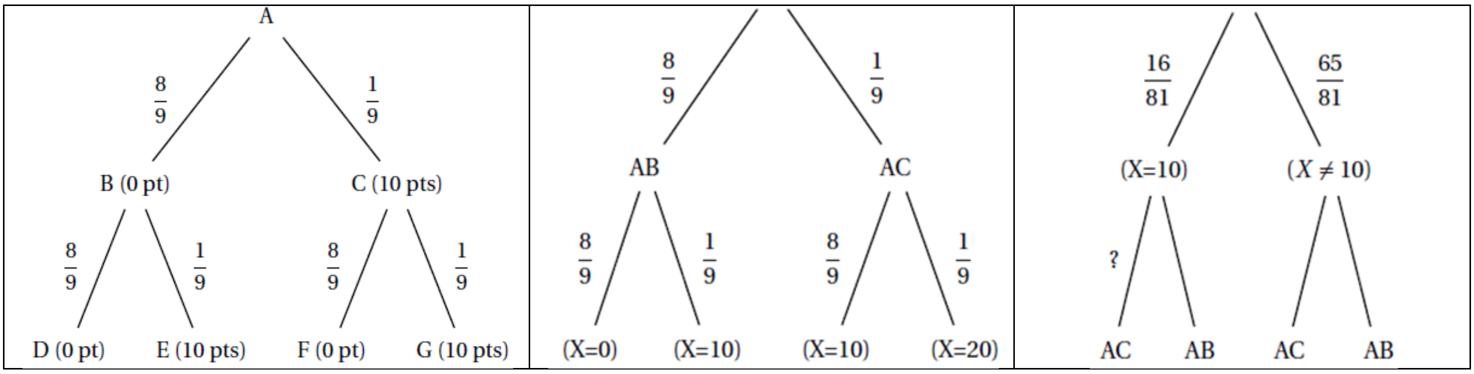
b. L'**espérance mathématique** de X est le réel E(X) tel que :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\times p_i=x_1\times p_1+x_2\times p_2+x_3\times p_3$$

$$E(X)=\frac{180}{81}=\frac{20}{9}$$

$\boldsymbol{x_i}$	**0**	**10**	**20**	$\sum$
$p_i=p(X=\boldsymbol{x_i})$	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{1}{81}$	**1**
$x_i\times p_i$	0	$\frac{160}{81}$	$\frac{20}{81}$	$E(X)$

c. On inverse l'arbre :



On veut $p_{X=10}(AC)$: $\boldsymbol{p_{X=10}(AC)=\frac{p(AC\cap(X=10))}{p(X=10)}}$

Or, $p(AC\cap(X=10))=p(AC)\times p_{AC}(X=10)=\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}=\frac{8}{81}$

$p(X=10)=p(B)\times p_B(E)+p(C)\times p_C(F)=\frac{16}{81}$

$$p_{X=10}(AC)=\frac{p(AC\cap(X=10))}{p(X=10)}=\frac{\frac{8}{81}}{\frac{16}{81}}=\frac{1}{2}$$

Probabilités conditionnelles

Définition : Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire avec $p(B)\neq 0$. On définit la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B est réalisé, notée $p_B(A)$, par la relation :

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{p(A)\times p_A(B)}{p(B)}$$

Pour les questions 28 à 30, on utilisera cet extrait de la table de valeurs de la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$ (les valeurs sont arrondies à 10^{-3}) :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	0,005	0,029	0,078	0,139	0,181	0,185	0,154	0,108	0,064	0,033	0,015	0,006	0,002
$P(X \leqslant k)$	0,005	0,034	0,112	0,250	0,431	0,616	0,770	0,878	0,942	0,975	0,991	0,997	0,999

28 $P(X = k) \geqslant 0,1$ pour :	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$	$k = 8$
29 $P(X \leqslant k) \geqslant 0,75$ pour :	$k = 3$	$k \leqslant 5$	$k \geqslant 6$	$k \geqslant 12$
30 $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0,95$ pour :	$a = 3$ et $b = 9$.	$a = 2$ et $b = 10$.	$a = 1$ et $b = 8$.	$a = 1$ et $b = 9$.

$P(X=1) = 0,029 < 0,1$ $P(X=3) = 0,139 > 0,1$ $P(X=5) = 0,185$ ….

Extrait de la table de valeurs de la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n = 50 et p=0,1 les valeurs sont arrondies à 10-3 :

- Pour $a = 3$, $b = 9$, $P(3 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 3) = 0,975 - 0,250 = 0,725 < 0,95$
- Pour $a = 2$, $b = 10$, $P(2 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 2) = 0,991 - 0,112 = 0,879 < 0,95$

- Pour $a=3$, $b=10$, $P(3 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 2) = 0,997 - 0,112 = 0,885 < 0,95$
- Pour $a=1$, $b=8$, $P(1 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X=0) = 0,942 - 0,005 = 0,937 < 0,95$
- Pour $a=1$, $b=9$, $P(1 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X=0) = 0,975 - 0,005 = 0,97 > 0,95$.

loi binomiale de paramètres Pour $a=3$, $b=9$, $P(3 \leq X \leq 9)$

148 Un appartement à Paris SES

Une agence immobilière souhaite faire un compte rendu sur l'occupation des logements dans le 12e arrondissement de Paris. Suite à un micro-trottoir, les données recueillies permettent d'obtenir les listes A, B, C et D ci-dessous.

Liste	A	B	C	D
Nombre de pièces x	1	2	3	4
Nombre moyen d'occupants y	1,2	1,6	2,2	4
Superficie moyenne z (en m^2)	14	30	52	70
Nombres de foyers interrogés	200	150	100	50

Ces listes sont représentées par des points de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ dans l'espace muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; par exemple, les coordonnées du point A, associé à la liste A, sont (1 ; 1,2 ; 14).

1. Justifier que ABCD est un tétraèdre.

2. Calculer les coordonnées du point $G(\bar{x}\,;\bar{y}\,;\bar{z})$ où $\bar{x}$ est le nombre moyen de pièces, $\bar{y}$ le nombre moyen d'occupants et $\bar{z}$ la superficie moyenne par foyer.

Si A, B, C et D sont non coplanaires alors ils sont les sommets d'un tétraèdre

A, B, C et D sont non coplanaires si

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *sont non coplanaires*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0{,}4\\16\end{pmatrix}\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\38\end{pmatrix}\ et\ \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}8\\2{,}8\\56\end{pmatrix}$$

On constate que ces vecteurs sont non coplanaires donc ABCD est un tétraèdre

$$\bar{x} = \frac{200\times 1 + 150\times 2 + 100\times 3 + 50\times 4}{500} = 2$$

$$\bar{y} = \frac{200\times 1,2 + 150\times 1,6 + 100\times 2,2 + 50\times 4}{500} = 1,8$$

$$\bar{z} = \frac{200\times 14 + 150\times 30 + 100\times 52 + 50\times 70}{500} = 32$$

G est le barycentre des sommets pondérés. Ses coordonnées sont les moyennes pondérés des coordonnées des sommets.