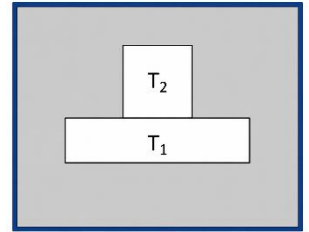


Contact de deux solides de températures différentes

On met en contact deux solides, de capacités calorifiques différentes C_1 et C_2 , le premier étant initialement à la température T_1 , et le second à la température $T_2 > T_1$.

On suppose les variations de volume négligeables, les capacités calorifiques constantes (indépendantes de la température) et la **transformation adiabatique et irréversible**.



1. Calculer la température finale d'équilibre T_f du système constitué des deux solides.

Rappel de cours — Entropie

Définition : Pour une transformation réversible : $dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$

où $S =$ entropie ; $\delta Q_{rev} =$ chaleur échangée réversiblement ; $T =$ température absolue.

Solide à capacité calorifique constante : $\delta Q = C dT \Rightarrow \Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C dT}{T}$

Pour un système isolé $Q_{tot} = 0$ et $\Delta U_{tot} = 0$

L'entropie totale d'un système : $\Delta S_{tot} = \sum_i \Delta S_i$

2nd principe : Pour un système isolé $\Delta S_{tot} \geq 0$ avec $\Delta S_{tot} = 0$ si transformation réversible et $\Delta S_{tot} > 0$ si transformation irréversible.

L'entropie est une fonction d'état : elle dépend uniquement de l'état initial et de l'état final.

Hypothèse : système isolé constitué des deux solides : pas d'échange thermique avec l'extérieur, mais échange interne irréversible entre solides.

Le système est **adiabatique** avec l'extérieur \Rightarrow pas d'échanges de chaleur avec l'extérieur $Q_{tot} = 0$.

L'énergie totale se conserve : $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0 \Rightarrow C_1(T_f - T_1) + C_2(T_f - T_2) = 0 \Rightarrow (C_1 + C_2)T_f = C_1T_1 + C_2T_2$

$$\Rightarrow T_f = \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2}$$

2. Calculer la variation d'entropie ΔS du système en fonction des données du problème.

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \text{ et } \delta Q_{rev} = C dT \Rightarrow dS = C \frac{dT}{T}$$

$$\text{Solide 1 : } \Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_f} C_1 \frac{dT}{T} = C_1 \ln \left(\frac{T_f}{T_1} \right) \text{ et Solide 2 : } \Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_f} C_2 \frac{dT}{T} = C_2 \ln \left(\frac{T_f}{T_2} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta S = C_1 \ln \left(\frac{T_f}{T_1} \right) + C_2 \ln \left(\frac{T_f}{T_2} \right) \text{ avec } T_f = \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2}$$

$$\Rightarrow \Delta S = C_1 \ln \left(\frac{C_1T_1 + C_2T_2}{(C_1 + C_2)T_1} \right) + C_2 \ln \left(\frac{C_1T_1 + C_2T_2}{(C_1 + C_2)T_2} \right)$$

3. On pose $x = \frac{T}{T_1}$.

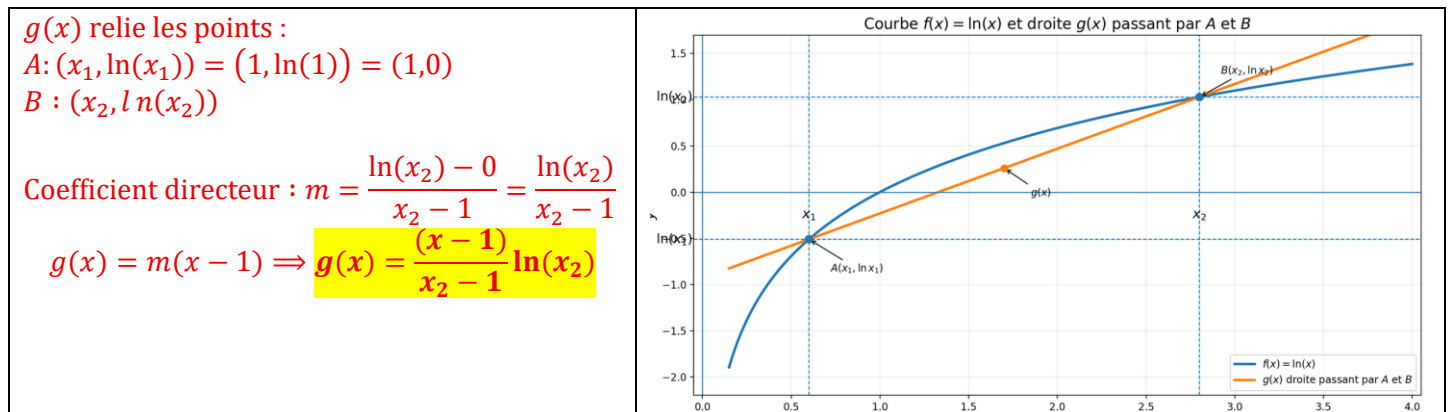
a) Écrire l'expression de ΔS en fonction de x_f et x_2 où $x_f = \frac{T_f}{T_1}$ et $x_2 = \frac{T_2}{T_1}$.

$$\frac{T_f}{T_2} = \frac{T_f/T_1}{T_2/T_1} = \frac{x_f}{x_2} \Rightarrow \Delta S = C_1 \ln(x_f) + C_2 \ln \left(\frac{x_f}{x_2} \right) \text{ ou } \Delta S = (C_1 + C_2) \cdot \ln(x_f) - C_2 \cdot \ln(x_2)$$

b) Tracer sur le même graphique la courbe $f(x) = \ln(x)$ en fonction de $x = \frac{T}{T_1}$ et la droite $g(x)$ reliant les

points d'abscisses x_1 et x_2 correspondant aux températures T_1 et T_2 .

Donner l'équation de cette droite.



c) En exprimant ΔS en fonction de $f(x_f)$ et $g(x_f)$, montrer que le résultat est compatible avec le second principe.

On a $\Delta S = C_1 \ln(x_f) + C_2 \ln\left(\frac{x_f}{x_2}\right)$

$\ln\left(\frac{x_f}{x_2}\right) = \ln(x_f) - \ln(x_2) \Rightarrow \Delta S = C_1 \ln(x_f) + C_2 \ln(x_f) - C_2 \ln(x_2) = (C_1 + C_2) \ln(x_f) - C_2 \ln(x_2)$

$\Rightarrow \Delta S = (C_1 + C_2) f(x_f) - C_2 \ln(x_2)$

$g(x_f) = \frac{(x_f - 1)}{x_2 - 1} \ln(x_2)$

$T_f = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$ or $x_f = \frac{T_f}{T_1}$ et $x_2 = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow x_f = \frac{T_f}{T_1} = \frac{\frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}}{T_1} = \frac{C_1 + C_2 x_2}{C_1 + C_2}$

$x_f - 1 = \frac{C_1 + C_2 x_2}{C_1 + C_2} - 1 = \frac{C_2(x_2 - 1)}{C_1 + C_2}$

$g(x_f) = \frac{C_2(x_2 - 1)}{C_1 + C_2} \times \ln(x_2) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \ln(x_2) \Rightarrow C_2 \ln(x_2) = (C_1 + C_2) g(x_f)$

$\Delta S = (C_1 + C_2) f(x_f) - C_2 \ln(x_2) \Rightarrow \Delta S = (C_1 + C_2) [f(x_f) - g(x_f)]$

On voit sur la courbe : $\forall x \in [1, x_2], f(x) \geq g(x) \Rightarrow \Delta S \geq 0$

Résultat compatible avec le 2nd principe, car pour un système isolé $\Delta S_{\text{tot}} \geq 0$

$T_2 > T_1$, la transformation est irréversible, donc en réalité $\Delta S > 0$

4. Discuter les cas suivants :

On déterminera pour chaque cas la température d'équilibre T_f et la variation d'entropie ΔS .

a) $C_1 = C_2$

$T_f = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_2 T_1 + C_2 T_2}{2C_2} \Rightarrow T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$

$$\Delta S = C_2 \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) + C_2 \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right) = C_2 \ln\left(\frac{T_f^2}{T_1 \times T_2}\right) = C_2 \ln\left(\frac{\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2}{T_1 \times T_2}\right) \Rightarrow \Delta S = C_2 \ln\left(\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}\right) > 0$$

b) $C_1 \gg C_2$

$$T_f = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} \text{ et soit } \varepsilon = \frac{C_2}{C_1} \ll 1 \Rightarrow T_f = \frac{T_1 + \varepsilon T_2}{1 + \varepsilon}$$

Au voisinage de $\varepsilon = 0$ on a $\frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots \Rightarrow T_f = (T_1 + \varepsilon T_2)(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots)$

1er ordre $T_f \simeq (T_1 + \varepsilon T_2)(1 + 0) \simeq T_1 + \varepsilon T_2$ donc $T_f \simeq T_1$

$\Delta S = C_1 \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) + C_2 \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right)$ donc $\Delta S \simeq C_2 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) < 0$ car $T_2 > T_1$ donc mauvaise approximation

2ème ordre $T_f \simeq (T_1 + \varepsilon T_2)(1 - \varepsilon) \simeq (T_1 + \varepsilon T_2)(1 - \varepsilon) = T_1 + \varepsilon T_2 - \varepsilon T_1 - \varepsilon^2 T_2 = T_1 + \varepsilon T_2 - \varepsilon T_1$

$$T_f \simeq T_1 + \varepsilon(T_2 - T_1) \Rightarrow T_f \simeq T_1 + \frac{C_2}{C_1}(T_2 - T_1)$$

$$\Delta S = C_1 \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) + C_2 \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right)$$

$$\frac{T_f}{T_1} = 1 + \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) = 1 + \varepsilon \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) \text{ et } \ln\left(1 + \varepsilon \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)\right) \simeq \varepsilon \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) \Rightarrow \Delta S_1 = C_1 \varepsilon \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta S_1 = C_2 \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = C_2 \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right) \Rightarrow \Delta S_2 \simeq C_2 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 \simeq C_2 \left[\frac{T_2 - T_1}{T_1} + \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) \right]$$

$$\text{Soit } a = \frac{T_2}{T_1} > 1 \Rightarrow \frac{T_2 - T_1}{T_1} = a - 1 \text{ et } \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = -\ln(a)$$

$$\Rightarrow \Delta S \simeq C_2 [a - 1 - \ln(a)] a > 1 \text{ et } [a - 1 - \ln(a)] > 0 \Rightarrow \Delta S > 0$$

Compatible avec le second principe.