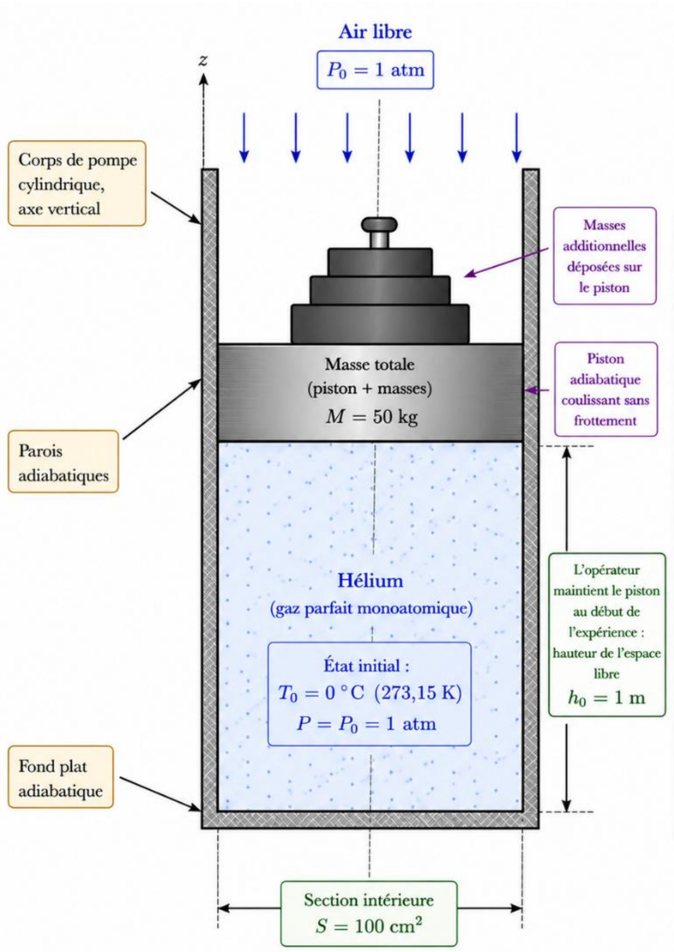
Compression d'un gaz parfait dans un cylindre

On considère un corps de pompe cylindrique, d'axe vertical à fond plat et à parois adiabatiques de section intérieure S = 100 cm². Dans ce corps de pompe peut coulisser sans frottement un piston également adiabatique sur lequel on a posé quelques masses additionnelles. La masse totale de l'ensemble mobile (piston et masses additionnelles) est M=50kg. Le tout est à l'air libre, la pression atmosphérique extérieure étant P_0=1atm.

Au début de l'expérience, un opérateur maintient le piston de telle sorte qu'il limite dans le corps de pompe un espace libre de hauteur h_0 = 1m ; cet espace libre est rempli d'hélium à la température T_0 = 0 °C et à une pression égale à la pression atmosphérique extérieure P_0. L'hélium sera considéré comme un gaz parfait monoatomique.



1) a. Dans une première expérience, l'opérateur, soutenant constamment le piston, le laisse descendre très lentement dans le corps de pompe, et l'abandonne enfin lorsqu'il se trouve à l'équilibre sur la colonne d'hélium.

Quelles sont à la fin de l'expérience, la hauteur de la colonne d'hélium h_1 et sa température T_1.

Descente très lente — parois adiabatiques

La transformation est lente ; adiabatique ; sans frottement.

Pour une compression adiabatique réversible d'un gaz parfait PV^γ = cte=K.

$V = S \times h$ *alors* $P \times h^\gamma$ = cte=K' $\Rightarrow P_0 \times h_0^\gamma = P_f \times h_1^\gamma \Rightarrow \boldsymbol{h_1 = h_0 \left(\frac{P_0}{P_f}\right)^{1/\gamma}}$

Pour la hauteur h_1 :

Pour un **gaz parfait monoatomique** $\gamma = \frac{5}{3}$

Calcul de $\frac{P_0}{P_f}$: $P_f = P_0 + \frac{Mg}{S}$ *avec* $P_0 = 1\ atm = 101325$ Pa ; $M = 50$ kg ; $g = 9{,}81$m.s^{-2} ; $S = 10^{-2}$ m²

- $Mg = 50 \times 9{,}81 = 490{,}5$ N $\Rightarrow \frac{Mg}{S} = \frac{490{,}5}{10^{-2}} = 49050$ Pa
- $P_f = 101325 + 49050 = 150375$ Pa
- $\frac{P_0}{P_f} = \frac{101325}{150375} \approx 0{,}674$

$\Rightarrow \boldsymbol{h_1 = 1 \times \left(\frac{1}{1{,}484}\right)^{3/5} \approx 0{,}789}$ **m**

Pour la température T_1 :

Premier principe ; gaz parfait et transformation adiabatique réversible $\Leftrightarrow \boldsymbol{TV^{\gamma-1}} = \textbf{cte}$

$$T(Sh)^{\gamma-1} = \text{cte} \Rightarrow Th^{\gamma-1} = \text{cte} \Rightarrow T_0 h_0^{\gamma-1} = T_1 h_1^{\gamma-1} \Rightarrow \boldsymbol{T_1 = T_0 \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^{\gamma-1}}$$

$$On\ a\ T_0 = 273{,}15\ K\ ;\ h_0 = 1{,}00\ m\ ;\ h_1 \approx 0{,}789\ m\ ;\ \gamma = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow T_1 = 273{,}15\left(\frac{1{,}00}{0{,}789}\right)^{2/3} \Rightarrow \boldsymbol{T_1 \approx 319{,}8\ K \approx 46{,}7°C}$$

b. Dans une seconde expérience, les conditions initiales étant les mêmes que précédemment, l'opérateur lâche brusquement le piston qui tombe en comprimant la colonne d'hélium, subit quelques oscillations et s'immobilise au bout d'un certain temps. Quelles sont en fin d'expérience, la hauteur d'hélium **h'₁** et **T'₁** ?

Piston lâché brusquement — parois adiabatiques

La transformation est rapide ; adiabatique ; **irréversible** ($PV^{\gamma}\neq$cte) ; avec oscillations amorties.

Pression finale d'équilibre : $P_f = P_0 + \frac{Mg}{S} = 101325 + \frac{50 \times 9{,}81}{10^{-2}} = 150375$ Pa

On applique le premier principe au gaz :

- Parois sont adiabatiques : $Q = 0$
- *Travail reçu par le gaz* : $W = P_f(V_0 - V_1') = P_f S(h_0 - h_1')$
- $\Delta U = nC_v(T_1' - T_0)$ *avec* $C_v = \frac{3}{2}R$
- *Bilan énergie* : $\Delta U = W$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}nR(T_1' - T_0) = P_f S(h_0 - h_1')$$

$$Or\ nRT_0 = P_0 S h_0\ et\ nRT_1' = P_f S h_1'$$

$$\frac{3}{2}(P_f \boldsymbol{S} h_1' - P_0 \boldsymbol{S} h_0) = P_f \boldsymbol{S}(h_0 - h_1') \Rightarrow \frac{3}{2}(P_f h_1' - P_0 h_0) = P_f(h_0 - h_1')$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}P_f h_1' - \frac{3}{2}P_0 h_0 = P_f h_0 - P_f h_1' \Rightarrow \frac{5}{2}P_f h_1' = P_f h_0 + \frac{3}{2}P_0 h_0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{h_1' = h_0 \frac{2P_f + 3P_0}{5P_f}} = \frac{2 \times 150375 + 3 \times 101325}{5 \times 150375} = \frac{604725}{751875} \Rightarrow \boldsymbol{h_1' \approx 0{,}804\ \mathrm{m}}$$

Température finale

$$nRT_0 = P_0 S h_0\ et\ nRT_1' = P_f S h_1'$$

$$\frac{T_1'}{T_0} = \frac{P_f h_1'}{P_0 h_0} \Rightarrow \boldsymbol{T_1' = T_0 \frac{P_f h_1'}{P_0 h_0}} = 273{,}15 \times \frac{150375 \times 0{,}804}{101325} \approx 326{,}0\ \mathrm{K} \Rightarrow \boldsymbol{T_1' \approx 52{,}9°\mathrm{C}}$$

2) Les mêmes expériences sont reprises après que la partie inférieure du corps de pompe ait été remplacée par une cloison diatherme (conductrice de la chaleur) qui fait communiquer thermiquement le corps avec un thermostat de température $T'_0 = 0$ °C.

a. Le piston est très lentement abaissé par l'opérateur jusqu'à ce qu'il soit en équilibre sur la colonne d'hélium. Calculer la hauteur finale h_2 de la colonne d'hélium. Quelle est la quantité de chaleur Q qui a traversé la cloison diatherme entre le début et la fin de l'expérience ?

Cloison diatherme — descente très lente

La cloison est diatherme et en contact avec un thermostat à $T_0' = 0°C = 273{,}15$ K

Transformation lente à température constante $T = T_0 \Rightarrow$ **compression isotherme réversible**.

Hauteur finale h_2

Gaz parfait isotherme : $PV = \text{cte} \Rightarrow P_0V_0 = P_fV_2$

$$V = Sh \Rightarrow h_2 = h_0\frac{P_0}{P_f}$$

$$A\ l'équilibre :\ P_f = P_0 + \frac{Mg}{S} \Rightarrow P_f = 101325 + \frac{50 \times 9{,}81}{10^{-2}} = 150375 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow h_2 = 1 \times \frac{101325}{150375} \Rightarrow \boldsymbol{h_2 \approx 0{,}674\ \mathrm{m}}$$

Quantité de chaleur Q

Pour un gaz parfait en transformation **isotherme** : $\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta U = Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W$

$$Compressionisothermeréversible: W = nRT_0 ln\left(\frac{V_0}{V_2}\right) or \frac{V_0}{V_2} = \frac{Sh_0}{Sh_2} = \frac{h_0}{h_2} \Rightarrow W = nRT_0 ln\left(\frac{h_0}{h_2}\right)$$

$$Gaz\ parfait :\ nRT_0 = P_0V_0 = P_0Sh_0$$

$$W = P_0Sh_0\ln\left(\frac{h_0}{h_2}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Q = -P_0Sh_0\ln\left(\frac{h_0}{h_2}\right)} = -101325 \times 10^{-2} \times 1 \times \ln\left(\frac{1}{0{,}674}\right) \Rightarrow \boldsymbol{Q \approx -400\ J}$$

Le signe négatif signifie que **l'hélium cède de la chaleur au thermostat**.

b. Mêmes questions lorsque le piston est lâché brusquement par l'opérateur à la hauteur h_0 ? Préciser l'état final dans ce cas et calculer la quantité de chaleur Q' qui a traversé la cloison lorsque l'équilibre total (mécanique et thermique) est établi.

Cloison diatherme, piston lâché brusquement

La cloison est **diatherme** : à l'équilibre $T_f = T_0 = 273{,}15$ K

$$A\ l'équilibre :\ P_f = P_0 + \frac{Mg}{S} \Rightarrow P_f = 150375 \text{ Pa}$$

Hauteur finale

$Gaz\ parfait\ dans\ les\ deux\ états:\ P_0V_0 = nRT_0\ et\ P_fV_f = nRT_0 \Rightarrow P_0V_0 = P_fV_f$

$Or\ V_0 = Sh_0\ et\ V_f = Sh_f \Rightarrow h_f = h_0\dfrac{P_0}{P_f} \Rightarrow \boldsymbol{h_f \approx 0,674\ \mathrm{m}}$

Quantité de chaleur Q'

Entre l'état initial et l'état final : $T_f = T_0 \Rightarrow \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0$

Premier principe : $\Delta U = Q' + W' \Rightarrow 0 = Q' + W' \Rightarrow Q' = -W'$

Travail reçu par le gaz

Le piston est lâché brusquement : la transformation est **irréversible**.

La pression extérieure appliquée au gaz est constante : $P_{\text{ext}} = P_f \Rightarrow W' = P_f(V_0 - V_f)$

$On\ a\ V_0 = Sh_0\ et\ V_f = Sh_f \Rightarrow W' = P_fS(h_0 - h_f)$

Or $h_f = h_0\dfrac{P_0}{P_f} \Rightarrow W' = P_fS\left(h_0 - h_0\dfrac{P_0}{P_f}\right) = P_fSh_0\left(1 - \dfrac{P_0}{P_f}\right) = Sh_0(P_f - P_0)$

$Or\ P_f - P_0 = \dfrac{Mg}{S} \Rightarrow W' = Sh_0\dfrac{Mg}{S} = Mgh_0 \Rightarrow W' = 50 \times 9{,}81 \times 1 = 490{,}5\ \mathrm{J} \Rightarrow \boldsymbol{Q' = -490,5\ \mathrm{J}}$

Synthèse numérique

	Transformation	**Hauteur**	**Température finale**	**Chaleur échangée**
1.a	adiabatique réversible	$h_1 \approx 0{,}789$ m	$T_1 \approx 319{,}9$ K	$Q = 0$
1.b	adiabatique irréversible	$h_1' \approx 0{,}804$ m	$T_1' \approx 326{,}0$ K	$Q = 0$
2.a	isotherme réversible	$h_2 \approx 0{,}674$ m	$T_0 = 273{,}15$ K	$Q \approx -400$ J
2.b	isotherme finale après évolution irréversible	$h_2' \approx 0{,}674$ m	$T_0 = 273{,}15$ K	$Q' \approx -490{,}5$ J