

Calculs de différents travaux reçus par un gaz parfait

Une masse m de gaz parfait est enfermée dans une enceinte étanche, dont on peut faire varier le volume en déplaçant un piston de masse M selon une direction horizontale (on négligera les forces de frottement entre le piston et la paroi). Les parois de l'enceinte sont supposées diathermes (*Qui laisse passer la chaleur sous sa forme rayonnante*). La pression et la température du milieu extérieur sont respectivement P_a et T_a . Le gaz est initialement à l'équilibre thermodynamique avec le milieu extérieur.

- Soit A la section du piston, et F l'effort extérieur appliqué au piston dans le sens de la compression.
- On rappelle la loi des gaz parfaits : $PV = nRT$
- Le travail reçu par le gaz est compté positivement en compression : $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$

1) Calculer la pression P_0 du gaz, sa température T_0 ainsi que le volume V_0 de la chambre à l'instant initial, en fonction de P_a et T_a .

Le gaz est initialement à l'équilibre thermodynamique avec le milieu extérieur :

- L'équilibre mécanique impose : $P_0 = P_a$
- L'équilibre thermique impose : $T_0 = T_a$
- Comme le gaz est parfait : $P_0 V_0 = nRT_0 \Rightarrow P_a V_0 = nRT_a \Rightarrow V_0 = \frac{nRT_a}{P_a}$: $P_0 = P_a$; $T_0 = T_a$; $V_0 = \frac{nRT_a}{P_a}$

2) Le gaz est comprimé en appliquant un effort ponctuel constant au piston, dirigé selon la direction de déplacement de celui-ci. La pression P_a et la température T_a sont maintenues constantes tout au long de l'opération. Au terme d'une évolution **irréversible**, le gaz atteint un nouvel état d'équilibre thermodynamique.

2a) En quoi l'évolution est-elle irréversible ?

- Etat initial : gaz est à l'équilibre avec le milieu extérieur : $P_0 = P_a$
- On applique F , on a $P_{\text{ext}} = P_a + \frac{F}{A} > P_0$
- Le gaz ne passe pas par une succession d'états d'équilibre.
- Une transformation réversible imposerait à chaque instant $P_{\text{ext}} \simeq P_{\text{gaz}}$
- Ici, cette condition n'est pas respectée.

Conclusion : L'évolution est irréversible car elle est provoquée par un déséquilibre mécanique fini.

2b) Calculer la pression P_1 , la température T_1 et le volume V_1 du gaz correspondant au nouvel état d'équilibre atteint à la fin de la transformation.

Etat final :

- le gaz retrouve un équilibre mécanique avec la pression extérieure totale : $P_1 = P_{\text{ext}} = P_a + \frac{F}{A}$
- Les parois sont diathermes : À l'équilibre thermique final : $T_1 = T_a$
- $P_1 V_1 = nRT_1 = nRT_a$ soit $V_1 = \frac{nRT_a}{P_1}$ Or, d'après l'état initial $P_a V_0 = nRT_a \Rightarrow V_1 = \frac{P_a V_0}{P_1}$

Conclusion : $P_1 = P_a + \frac{F}{A}$; $T_1 = T_a$; $V_1 = \frac{P_a}{P_1} \times V_0$

2c) Calculer le travail reçu par le gaz.

$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV :$$

$$\text{Le travail reçu par le gaz est } W_{2c} = - \int_{V_0}^{V_1} P_1 dV = -P_1 \int_{V_0}^{V_1} dV = -P_1(V_1 - V_0) \quad W_{2c} = P_1(V_0 - V_1)$$

$$\text{On a } V_1 = \frac{P_a}{P_1} \times V_0$$

$$W_{2c} = P_1 \left(V_0 - \frac{P_a}{P_1} \times V_0 \right) = P_1 V_0 - P_a V_0 = (P_1 - P_a) V_0 \text{ et on a } P_1 - P_a = \frac{F}{A}$$

$$W_{2c} = P_1(V_0 - V_1) = (P_1 - P_a)V_0 = \frac{F \times V_0}{A}$$

3) On souhaite à présent atteindre le même état d'équilibre final que précédemment, mais cette fois-ci par une **transformation réversible**.

3a) Rappeler l'expression générale du travail reçu par un fluide lors d'une transformation réversible. Est-ce une différentielle totale exacte ?

- Expression générale du travail reçu
 - Pour une transformation réversible à chaque instant $P_{\text{ext}} \approx P$
 - Travail élémentaire reçu par le gaz : $\delta W_{\text{rev}} = -P dV$
 - Travail total reçu entre un état initial et un état final f : $W_{\text{rev}} = - \int_{V_0}^{V_1} P dV$
- Différentielle exacte ou non ?

Rappel :

➤ Les grandeurs d'état

Grandeur	Dépend du chemin ?	Expression différentielle	Relations utiles
P	Non	dP	Équation d'état
V	Non	dV	Variable géométrique
T	Non	dT	$PV = nRT$
n	Non	dn	Conservée (système fermé)

➤ Les fonctions d'état

Grandeur	Dépend du chemin ?	Expression différentielle	Relations utiles
U (énergie interne)	Non	dU	$dU = \delta Q + \delta W$
$H = U + PV$ (enthalpie)		dH	$dH = \delta Q$ (isobare)
S (entropie)		dS	$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$
$F = U - TS$ (Helmholtz)		dF	Utile en isotherme
$G = H - TS$ (Gibbs)		dG	Équilibre chimique

➤ Grandeur de transfert

Grandeur	Dépend du chemin ?	Expression différentielle	Relations utiles
Travail W	Oui	$\delta W = -P_{\text{ext}} dV$	Dépend du processus
Chaleur Q		δQ	$dU = \delta Q + \delta W$

Le travail n'est pas une fonction d'état.

Il dépend du chemin suivi entre l'état initial et l'état final.

δW n'est pas une différentielle totale exacte. On écrit δW et non dW

$$\delta W_{\text{rev}} = -P dV \text{ et } W_{\text{rev}} = - \int_{V_0}^{V_1} P dV : \delta W \text{ n'est pas une différentielle totale exacte.}$$

3b) Comme dans la question précédente, la pression P_a et la température T_a sont maintenues constantes tout au long de l'opération. Quel type de transformation obtient-on ? Calculer le travail à fournir au gaz pour l'amener de l'état initial à l'état final, en fonction des variables d'état. Quel effort faut-il appliquer au piston ?

- Type de transformation

Parois diathermes : échanges thermiques avec le milieu extérieur.

Le milieu extérieur est maintenu à la température constante : T_a

La transformation est réversible, le gaz est à chaque instant en équilibre thermique avec l'extérieur : $T = T_a = \text{cst}$

La transformation est donc une compression isotherme réversible.

- Calcul du travail

Pour une transformation réversible $\delta W_{\text{rev}} = -P dV \Rightarrow W_{3b} = - \int_{V_0}^{V_1} P dV$

La transformation est isotherme à la température T_a : $PV = nRT_a \Rightarrow P = \frac{nRT_a}{V}$

$$W_{3b} = - \int_{V_0}^{V_1} \frac{nRT_a}{V} dV = -nRT_a \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = -nRT_a [\ln(V)]_{V_0}^{V_1} = nRT_a \ln \left(\frac{V_0}{V_1} \right)$$

Pour une transformation isotherme d'un gaz parfait $P_0V_0 = P_1V_1 = nRT_a$ et $P_0 = P_a$

$$W_{3b} = nRT_a \ln \left(\frac{V_0}{V_1} \right) = nRT_a \ln \left(\frac{P_1}{P_a} \right) = P_a V_0 \ln \left(\frac{P_1}{P_a} \right)$$

- Effort à appliquer au piston

La pression extérieure totale exercée sur le gaz est $P_{\text{ext}} = P_a + \frac{F}{A}$

Pour une transformation **réversible**, il faut $P_{\text{ext}} = P$ donc $P_a + \frac{F}{A} = P \Rightarrow \frac{F}{A} = P - P_a \Rightarrow F = A(P_{\text{ext}} - P_a) = AdP$

Pendant la compression **isotherme**, la pression du gaz augmente **progressivement** de P_a à P_1 .

L'effort augmente progressivement de $F_i = A(P_a - P_a) = 0$ à $F_f = A(P_1 - P_a)$

3c) On étudie à présent la transformation suivante, qui comporte deux étapes :

- Étape 1 : compression isobare à la pression P_0 , jusqu'à atteindre le volume V_1
- Étape 2 : évolution isochore, jusqu'à atteindre la pression P_1 et la température T_1

Cette transformation est-elle possible si l'on maintient constante la température T_a ? On suppose que la pression P_a est quant à elle maintenue constante tout au long de la transformation. Quel effort faut-il appliquer au piston lors des étapes 1 et 2 ? Calculer le travail reçu par le fluide une fois la transformation terminée.

Cette transformation est-elle possible si l'on maintient constante la température T_a ?

Pendant l'étape 1, on impose une compression isobare $P_0 = P_a = \text{cte}$

Pour un gaz parfait $PV = nRT$

À pression constante $T = \frac{PV}{nR} = k.V$ comme V diminue alors T diminue

À l'état initial $P_0V_0 = nRT_a$

Pendant l'étape 1, la transformation est isobare $P = P_0$

À la fin de cette étape, le volume vaut V_1 et la température vaut $T' \Rightarrow P_0V_1 = nRT'$

$$\frac{P_0V_1}{P_0V_0} = \frac{nRT'}{nRT_a} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{T'}{T_a} \text{ donc } T' = T_a \times \frac{V_1}{V_0} \text{ or } V_1 < V_0 \text{ donc } T' < T_a$$

Cela montre que la température baisse pendant cette compression isobare.

Donc cette étape ne peut pas se faire en maintenant le gaz à la température constante T_a .

Quel effort faut-il appliquer au piston lors des étapes 1 et 2 ?

La pression extérieure exercée sur le gaz vaut $P_{\text{ext}} = P_a + \frac{F}{A}$

Étape 1 : On veut une compression **isobare** à P_0 : $P = P_0 = P_a$

Pour une évolution réversible $P_{\text{ext}} = P$ donc $P_a + \frac{F}{A} = P_a$ soit **$F_1 = 0$**

La diminution du volume ne vient pas d'un effort mécanique, mais d'un refroidissement du gaz. Le gaz qui "se contracte" parce qu'il refroidit

Étape 2 : évolution isochore : $V = V_1 = \text{constante}$. Le piston ne doit pas bouger.

P_0 augmente à P_1 et Piston immobile. Il faut appliquer un effort qui équilibre la pression du gaz : $P_{\text{ext}} = P$

$$\Rightarrow P_a + \frac{F}{A} = P \Rightarrow F = A(P - P_a)$$

Comme P passe de P_a à P_1 , l'effort passe de $F_i = 0$ à $F_f = A(P_1 - P_a)$

$$\mathbf{F_2 = A(P - P_a) \text{ avec } P_a \leq P \leq P_1}$$

Calculer le travail reçu par le fluide une fois la transformation terminée.

Le travail total est la somme des travaux des deux étapes $W = W_1 + W_2$

Étape 1 : compression isobare

Pendant l'étape 1 : $P = P_0 = P_a$

$$\text{Le travail reçu vaut } W_1 = - \int_{V_0}^{V_1} P_a dV$$

$$\text{Comme } P_a \text{ est constant : } W_1 = -P_a \int_{V_0}^{V_1} dV = -P_a(V_1 - V_0) \quad \mathbf{W_1 = P_a(V_0 - V_1)}$$

Étape 2 : évolution isochore

Pendant l'étape 2 : $V = V_1 = \text{constante}$: $dV = 0$

$$\text{Le travail vaut : } W_2 = - \int P dV = 0$$

$$\text{Travail total : } W = W_1 + W_2 = P_a(V_0 - V_1) + 0 \quad \mathbf{W = P_a(V_0 - V_1)}$$

$$\text{Comme } V_1 = \frac{P_a V_0}{P_1}$$

$$\text{on peut aussi écrire : } W = P_a \left(V_0 - \frac{P_a V_0}{P_1} \right) \quad \mathbf{W_{3c} = P_a V_0 \left(1 - \frac{P_a}{P_1} \right)}$$

3d) Comparer les travaux obtenus aux questions 2c, 3b et 3c. Commenter.

Le gaz est comprimé en appliquant un effort ponctuel constant. P_a et T_a sont constantes tout au long de l'opération. Au terme d'une évolution irréversible, le gaz atteint un nouvel état d'équilibre thermodynamique.	$\mathbf{W_{2c} = (P_1 - P_a)V_0}$
On souhaite atteindre le même état d'équilibre final que précédemment par une transformation réversible. P_a et T_a sont constantes tout au long de l'opération.	$\mathbf{W_{3b} = P_a V_0 \ln \left(\frac{P_1}{P_a} \right)}$
Transformation comporte deux étapes : i. Étape 1 : compression isobare à P_0 , jusqu'à atteindre V_1	$\mathbf{W_{3c} = P_a V_0 \left(1 - \frac{P_a}{P_1} \right)}$

ii. Étape 2 : évolution isochore, jusqu'à atteindre P_1 et T_1

On pose le rapport de compression : $r = \frac{P_1}{P_a}$. Compression $P_1 > P_a \Rightarrow r > 1$

Travail de la transformation irréversible 2c : $W_{2c} = (P_1 - P_a)V_0 = P_a V_0 \left(\frac{P_1}{P_a} - 1 \right) = P_a V_0 (r - 1)$

Travail de la compression isotherme réversible 3b : $W_{3b} = P_a V_0 \ln \left(\frac{P_1}{P_a} \right) = P_a V_0 \ln (r)$

Travail de la transformation en deux étapes 3c : $W_{3c} = P_a V_0 \left(1 - \frac{P_a}{P_1} \right) = P_a V_0 \left(1 - \frac{1}{r} \right)$

$$r > 1 \Rightarrow r - 1 > \ln(r) > 1 - \frac{1}{r} \Rightarrow W_{2c} > W_{3b} > W_{3c}$$

Commentaire physique

- La transformation irréversible 2c demande plus de travail, car l'effort est appliqué brutalement avec un déséquilibre mécanique fini.
- La transformation isotherme réversible 3b demande moins de travail, car elle est quasi statique.
- La transformation 3c donne un travail plus faible, mais elle n'est pas réalisable en maintenant simplement le gaz à la température constante T_a . Elle impose en effet une étape de refroidissement sous T_a , puis un chauffage isochore.
- Donc la comparaison mathématique est correcte, mais la transformation 3c n'est pas physiquement réalisable dans les mêmes conditions thermiques que la transformation isotherme à T_a .

4) On suppose maintenant que la masse m de gaz parfait est initialement à l'équilibre thermodynamique avec le milieu extérieur toujours à la pression P_a et la température T_a . Son volume initial est V_0 . Comparer le travail nécessaire pour l'amener à la pression P_1 , à la température T_a , pour les deux transformations suivantes :

- Compression isotherme
- Compression adiabatique réversible, suivie d'un refroidissement isochore

Déterminer la quantité de chaleur échangée dans chaque cas. Représenter schématiquement ces trois transformations sur le diagramme de Clapeyron. Est-il avantageux de refroidir un compresseur ?

On part de l'état initial : $P_0 = P_a ; T_0 = T_a \Rightarrow V_0 = \frac{nRT_a}{P_a}$

On veut atteindre l'état final : $P_1 ; T_1 = T_a \Rightarrow V_1 = \frac{nRT_a}{P_1}$ or $nRT_a = P_a V_0 \Rightarrow V_1 = \frac{P_a V_0}{P_1}$

On pose : $r = \frac{P_1}{P_a} = \frac{V_0}{V_1}$

Comparer le travail nécessaire pour l'amener à la pression P_1 , à la température T_a , pour une compression isotherme

Pour une compression isotherme : $T = T_a = \text{constante}$ or $PV = nRT_a \Rightarrow P = \frac{nRT_a}{V}$

Le travail reçu par le gaz est : $W_{\text{iso}} = - \int_{V_0}^{V_1} P dV = - \int_{V_0}^{V_1} \frac{nRT_a}{V} dV = nRT_a \ln \left(\frac{V_0}{V_1} \right)$

Or $\frac{V_0}{V_1} = \frac{P_1}{P_a} \Rightarrow W_{\text{iso}} = nRT_a \ln \left(\frac{P_1}{P_a} \right) = P_a V_0 \ln \left(\frac{P_1}{P_a} \right)$

$\Rightarrow W_{\text{iso}} = nRT_a \ln (r) = P_a V_0 \ln (r)$

Comparer le travail nécessaire pour l'amener à la pression P_1 , à la température T_a , pour une compression adiabatique réversible, suivie d'un refroidissement isochore

La transformation se fait en deux étapes :

1. Compression adiabatique réversible de l'état initial (P_a, V_0, T_a) jusqu'à un état intermédiaire (P_2, V_1, T_2) ;
2. Refroidissement isochore de (P_2, V_1, T_2) vers (P_1, V_1, T_a) .

Pour une compression adiabatique réversible : $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{cte} \Rightarrow T_a V_0^{\gamma-1} = T_2 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_a \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1}$

$$\text{Or } \frac{P_1}{P_a} = \frac{V_0}{V_1} \Rightarrow T_2 = T_a \left(\frac{P_1}{P_a}\right)^{\gamma-1}$$

Comme $P_1 > P_a \Rightarrow T_2 > T_a$

$Q_{\text{ad}} = 0$ donc le travail de la compression adiabatique réversible vaut $W_{\text{ad}} = \Delta U$

$$\text{Or } W_{\text{ad}} = \Delta U = nC_v(T_2 - T_a)$$

$$\text{En remplaçant } T_2 : W_{\text{ad}} = nC_v T_a \left[\left(\frac{P_1}{P_a}\right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

$$\text{Avec } C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$\text{on obtient } W_{\text{ad}} = \frac{nRT_a}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_1}{P_a}\right)^{\gamma-1} - 1 \right] \quad \text{Comme } nRT_a = P_a V_0 \quad \Rightarrow W_{\text{ad}} = \frac{P_a V_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_1}{P_a}\right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

Le refroidissement isochore ne produit aucun travail, car : $dV = 0 \Rightarrow W_{\text{isochore}} = 0$

Ainsi, le travail total est $W_{\text{total}} = W_{\text{ad}}$

Comparaison des deux travaux

$$\text{Pour la compression isotherme } W_{\text{iso}} = P_a V_0 \ln \left(\frac{P_1}{P_a}\right)$$

$$\text{Pour la compression adiabatique réversible suivie d'un refroidissement isochore : } W_{\text{ad}} = \frac{P_a V_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_1}{P_a}\right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

Pour $P_1 > P_a$ et $\gamma > 1 \Rightarrow W_{\text{ad}} > W_{\text{iso}}$.

La compression isotherme demande moins de travail que la compression adiabatique.

Déterminer la quantité de chaleur échangée pour une compression isotherme

$$\text{Pour un gaz parfait } \Delta U = nC_v \Delta T$$

$$\text{Dans une compression isotherme } T = T_a = \text{constante} \Rightarrow \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U_{\text{iso}} = 0$$

$$\text{Le premier principe s'écrit } \Delta U = Q + W \Rightarrow 0 = Q_{\text{iso}} + W_{\text{iso}} \Rightarrow Q_{\text{iso}} = -W_{\text{iso}}$$

$$\text{Comme } W_{\text{iso}} = nRT_a \ln \left(\frac{P_1}{P_a}\right)$$

$$\Rightarrow Q_{\text{iso}} = -nRT_a \ln \left(\frac{P_1}{P_a}\right) = -P_a V_0 \ln \left(\frac{P_1}{P_a}\right)$$

Le signe négatif signifie que le gaz cède de la chaleur au milieu extérieur.

Déterminer la quantité de chaleur échangée pour une compression adiabatique réversible, suivie d'un refroidissement isochore

Étape 1 : compression adiabatique réversible $\Rightarrow Q_{\text{ad}} = 0$

Étape 2 : refroidissement isochore

$$V = V_1 = \text{cte} \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow W_{\text{isochore}} = 0$$

Premier principe $\Delta U = Q + W$

Donc, pour l'étape isochore $\Delta U_{\text{isochore}} = Q_{\text{isochore}}$

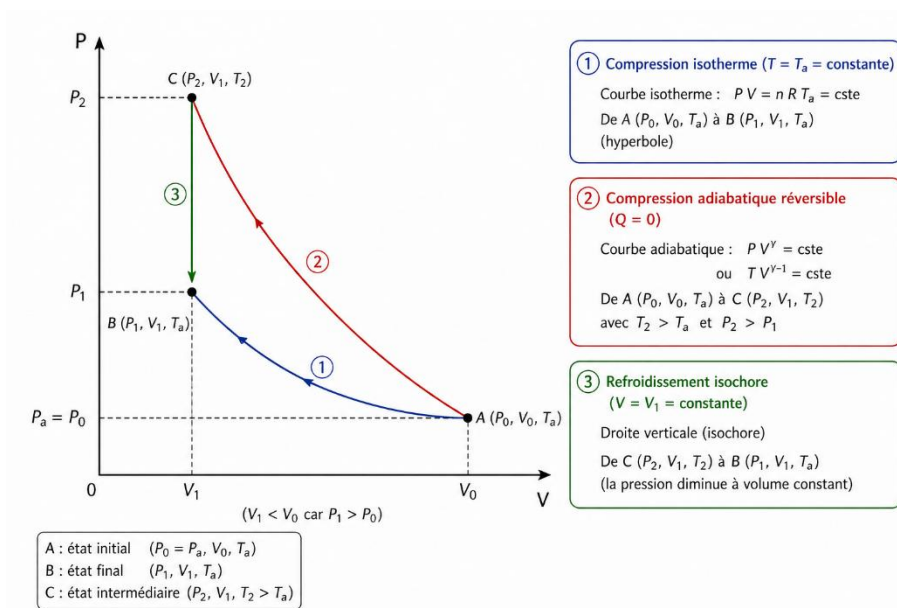
La température passe de T_2 à T_a : $\Rightarrow Q_{\text{isochore}} = nC_v(T_a - T_2)$

$$\text{Or } T_2 = T_a \left(\frac{P_1}{P_a}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow Q_{\text{isochore}} = nC_v T_a \left[1 - \left(\frac{P_1}{P_a}\right)^{\gamma-1}\right]$$

$$Q_{\text{total}} = nC_v T_a \left[1 - \left(\frac{P_1}{P_a}\right)^{\gamma-1}\right]$$

$\left(\frac{P_1}{P_a}\right)^{\gamma-1} > 1 \Rightarrow Q_{\text{total}} < 0$. Le gaz cède de la chaleur au milieu extérieur pendant le refroidissement isochore.

Représenter schématiquement ces trois transformations sur le diagramme de Clapeyron



Est-il avantageux de refroidir un compresseur ?

Refroidir un compresseur permet de limiter l'augmentation de température du gaz pendant la compression.

$$\text{Or, pour un gaz parfait } P = \frac{nRT}{V}$$

À volume donné, plus la température est élevée, plus la pression est élevée.

Donc, si le gaz chauffe beaucoup pendant la compression, la pression devient plus grande et le travail augmente.

$$\text{Le travail reçu par le gaz est } W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

Sur le diagramme de Clapeyron, le travail correspond à l'aire sous la courbe de compression.

Une compression adiabatique chauffe le gaz et donne une courbe plus haute que l'isotherme $\Rightarrow W_{\text{ad}} > W_{\text{iso}}$

Ainsi, refroidir le compresseur rapproche la compression réelle d'une compression isotherme, qui est la transformation demandant le moins de travail.

Il est avantageux de refroidir un compresseur. Le refroidissement diminue le travail mécanique fourni.