Étude d'une asymptote et position relative d'une courbe

Soit g une fonction qui, à tout $x \in]1, +\infty[$, associe :

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) - \arctan(x)$$

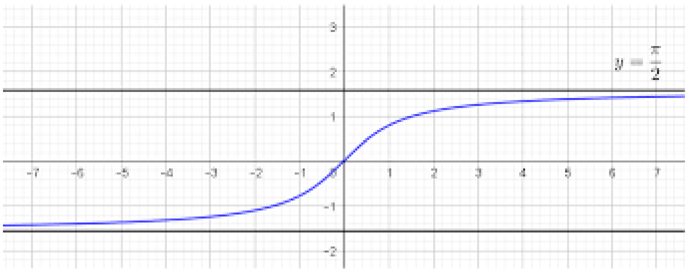
Montrer que la courbe C_g de g admet une courbe asymptotique $C_{g,\infty}$ lorsque x tend vers l'infini.

Étudier la position relative de C_g et de $C_{g,\infty}$.

On chercher une fonction $y = \varphi(x)$ telle que $g(x) - \varphi(x) \longrightarrow 0$ quand $x \to +\infty$.

Ici, il faut examiner séparément les deux termes de $g(x)$: $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \arctan(x)$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \longrightarrow 0^+$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} arctan(x) \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-$



donc $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2}$ la courbe C_g se rapproche, à $+\infty$, de la droite horizontale d'équation $y = -\frac{\pi}{2}$.

On peut donc dire que la courbe asymptotique $C_{g,\infty}$ est la droite $C_{g,\infty} : y = -\frac{\pi}{2}$

Étude de la position relative de C_g et de $C_{g,\infty}$

Etude du signe de : $g(x) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = g(x) + \frac{\pi}{2}$

Or $\boldsymbol{g(x) + \frac{\pi}{2} = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}}$

On va donc étudier le signe de cette expression pour $x > 1$.

Pour $x > 1$, on a $\frac{x+1}{x-1} > 1$ donc $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$

Pour tout $x > 1$, on sait que

$\arctan(x) < \frac{\pi}{2}$

$-arctan(x) > -\frac{\pi}{2}$

$-arctan(x) + \frac{\pi}{2} > -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$

donc $\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) > 0.$

$\boldsymbol{g(x) + \frac{\pi}{2} > 0 \text{ ou } g(x) > -\frac{\pi}{2}}$

Donc, pour tout $x \in]1, +\infty[$, la courbe C_g est située **au-dessus** de son asymptote $C_{g,\infty}$.