

## Étude asymptotique d'une suite définie par une équation logarithmique

1. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x + \ln(x) = n$  admet une unique solution sur  $]0, +\infty[$ , que l'on notera  $u_n$ .

### Théorème des valeurs intermédiaires

On pose  $f(x) = x + \ln(x)$ ,  $x > 0$ .

$f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$\Rightarrow f$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists ! n / x + \ln(x) = n$ .

On la note  $u_n \Rightarrow u_n + \ln(u_n) = n$ .

2. Supposer que  $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$ . Montrer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ .

Définition :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  si  $\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ . Cela signifie que  $u_n \ll v_n$ .

On suppose  $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$ .

On a  $u_n + \ln(u_n) = n \Rightarrow u_n = n - \ln(u_n) \Rightarrow \frac{u_n}{n} = 1 - \frac{\ln(u_n)}{n}$

Or  $\frac{\ln(u_n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \Rightarrow \frac{u_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$

3. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle définie par  $v_n = \frac{n - u_n}{\ln(n)}$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ .

$u_n + \ln(u_n) = n \Rightarrow n - u_n = \ln(u_n) \Rightarrow v_n = \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)}$

$\Rightarrow \ln(u_n) = \ln(n) + \ln\left(\frac{u_n}{n}\right)$  car  $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

On a  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \Rightarrow \frac{u_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \Rightarrow \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \Rightarrow v_n = \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$

4. Montrer que  $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

La question 3 donne  $v_n = \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \Rightarrow \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

5. Montrer que  $1 - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$v_n = \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} \Rightarrow 1 - v_n = 1 - \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) - \ln(u_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(\frac{n}{u_n}\right)}{\ln(n)}$

$$Q1 : \frac{\ln(u_n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$$Q2 : u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$$

$$Q4 : \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

$$\text{On a } u_n + \ln(u_n) = n \Rightarrow u_n = n - \ln(u_n) \Rightarrow \frac{u_n}{n} = 1 - \frac{\ln(u_n)}{n} \Rightarrow \frac{n}{u_n} = \frac{1}{1 - \frac{\ln(u_n)}{n}}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{n}{u_n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{\ln(u_n)}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(u_n)}{n} \text{ car d'après Q1 on a } \frac{\ln(u_n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$$

$$\text{Rappel : } \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\text{D'après Q4 : } \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \Rightarrow \ln\left(\frac{n}{u_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \Rightarrow 1 - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n} \Rightarrow \mathbf{1 - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

**6. Montrer que  $u_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ .**

$$Q1 : \frac{\ln(u_n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \quad Q2 : u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \quad Q3 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n - u_n}{\ln(n)}\right) = 1$$

$$Q4 : \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

$$Q5 : 1 - \frac{n - u_n}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n - u_n}{\ln(n)} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow n - u_n = \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \ln(n).$$

$$\Rightarrow n - u_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \Rightarrow u_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} - o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

$$\text{car } -o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \text{ devient } +o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{u_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$$