Analyse énergétique d’un système piston–gaz

On utilise deux méthodes différentes pour soulever un poids, la première thermo-mécanique (fig.1) et la seconde purement mécanique (fig.2).
L’exercice consiste à comparer les énergies mises en jeu durant les deux opérations.

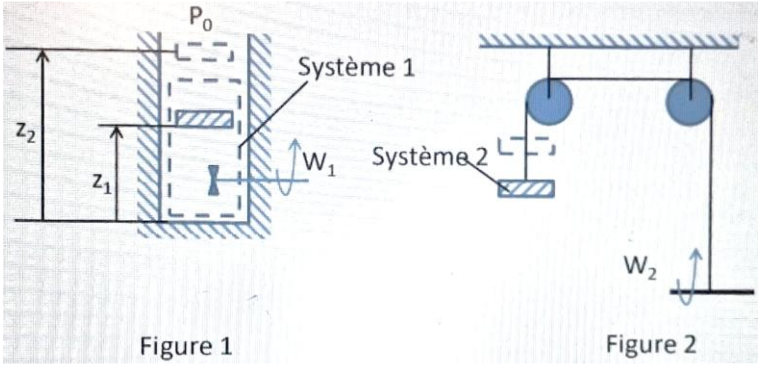


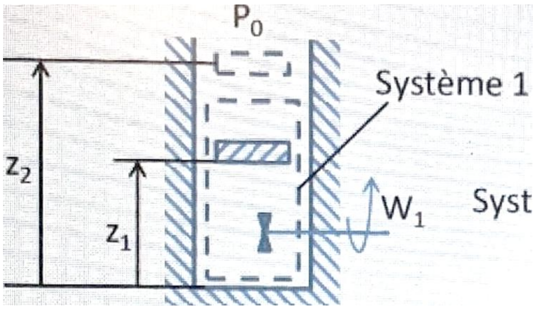
Figure 1 Figure 2

Considérant le système 1 constitué du poids (devenu le piston) et du gaz placé dans l’ensemble adiabatique et le système 2 constitué du seul poids, supposant les frottements négligeables dans les deux cas, calculer en admettant que le gaz est un gaz calorifiquement parfait et que la pression extérieure est constante et uniforme (P_0).

- S: section du piston ;
- z_1 et z_2: positions initiale et finale du piston ;
- $\Delta z = z_2 - z_1$;
- $\Delta V = S(z_2 - z_1)$;
- P_0 : pression extérieure constante et uniforme ;
- m : masse du poids-piston ;
- P : pression du gaz sous le piston.

À l’équilibre mécanique du piston, $P = P_0 + \frac{mg}{S} \Rightarrow \boldsymbol{mg = (P - P_0)S} \Rightarrow mg(z_2 - z_1) = (P - P_0)\Delta V$

- W_1 apporté au système 1 pour élever le poids de z_1 à z_2. On suppose le piston isolé thermiquement du gaz.



Système étudié : système 1 $=$ gaz $+$ piston (poids)

L’extérieur du système est

- L’atmosphère à pression constante P_0;
- Le dispositif qui apporte le travail W_1.

Convention : $\Delta E_{\text{système}} = Q + W_{\text{reçu}}$

avec $W_{\text{reçu}} > 0$ si le système reçoit du travail

Le dispositif apporte le travail : compression du gaz $W_{\text{reçu}} = W_1 > 0$

Bilan énergétique du système 1

Le système reçoit W_1. Il est adiabatique, donc $Q = 0$

Premier principe : $\Delta E_{\text{système 1}} = W_1 + W_{P_0} + 0$

W_{P_0} : travail reçu par le système de la part de l’atmosphère extérieure.

Quand le piston monte, le volume du gaz augmente : $\Delta V = V_2 - V_1 > 0$

L’atmosphère s’oppose à cette augmentation de volume. Le travail reçu par le système de la part de l’atmosphère vaut donc $W_{P_0} = -P_0\Delta V\ en\ joule \Rightarrow \Delta E_{\text{système 1}} = W_1 - P_0\Delta V \Rightarrow \boldsymbol{W_1 = \Delta E_{\text{système 1}} + P_0\Delta V}$

$\boldsymbol{\Delta E_{\text{système 1}}}$: Le système contient le gaz et le piston : $\Delta E_{\text{système 1}} = \Delta U_{\text{gaz}} + \Delta E_p$

Le piston s’élève de z_1 à $z_2 \Rightarrow \Delta E_p = mg(z_2 - z_1) \ \Rightarrow \Delta E_{\text{système 1}} = \Delta U_{\text{gaz}} + mg(z_2 - z_1)$

$\Rightarrow \boldsymbol{W_1 = \Delta U_{\text{gaz}} + mg(z_2 - z_1) + P_0\Delta V}$

avec :

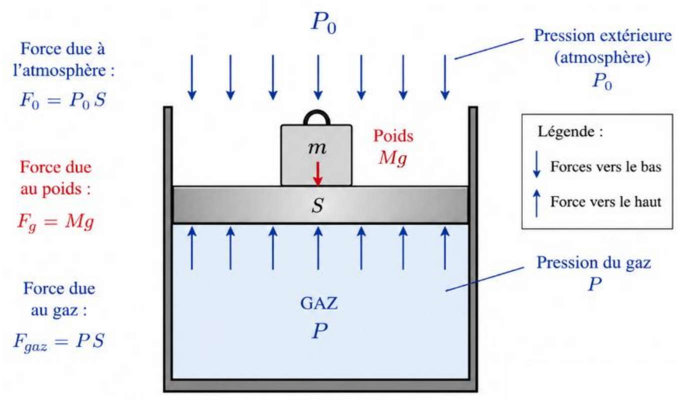
- ΔU_{gaz} : augmentation de l'énergie interne du gaz
- $mg(z_2 - z_1)$: énergie pour élever le poids
- $P_0 \Delta V$: travail nécessaire pour repousser l'atmosphère

Donc le travail fourni ne sert pas uniquement à monter le poids. Une partie sert aussi à augmenter l'énergie interne du gaz et à repousser l'air extérieur.

Expression avec le volume : Le piston a une section S : $V = S \times z \Rightarrow \Delta V = S \times (z_2 - z_1)$

$\Rightarrow W_1 = \Delta U_{\text{gaz}} + mg(z_2 - z_1) + P_0 S(z_2 - z_1) \Rightarrow \boldsymbol{W_1 = \Delta U_{\text{gaz}} + (mg + P_0 S)(z_2 - z_1)}$

Lien avec la pression du gaz



À l'équilibre mécanique du piston :

$PS = P_0 S + mg \Rightarrow (mg + P_0 S)(z_2 - z_1) = PS(z_2 - z_1)$

Or $S(z_2 - z_1) = \Delta V \Rightarrow \boldsymbol{W_1 = \Delta U_{\text{gaz}} + P\Delta V}$

$\Delta U_{\text{gaz}} = nC_v(T_2 - T_1)$

P reste constante pendant l'élévation :

$P\Delta V = nR(T_2 - T_1)$

$\Rightarrow W_1 = nC_v(T_2 - T_1) + nR(T_2 - T_1) = n(C_v + R)(T_2 - T_1)$

Or $C_p = C_v + R \Rightarrow \boldsymbol{W_1 = nC_p(T_2 - T_1)}$

Or, à pression constante $P\Delta V = nR(T_2 - T_1) \Rightarrow T_2 - T_1 = \dfrac{P\Delta V}{nR} \Rightarrow W_1 = nC_p \times \dfrac{P\Delta V}{nR} \Rightarrow \boldsymbol{W_1 = \dfrac{C_p}{R} P\Delta V}$

• Le travail W_2 apporté au système 2 pour effectuer la même opération.

On élève le poids de z_1 à z_2, sans frottement.

Le travail minimal à fournir est l'augmentation d'énergie potentielle de pesanteur : $W_2 = mg(z_2 - z_1) = mg\Delta z = (P - P_0)\Delta V$

Comparaison des deux méthodes

$$W_2 = (P - P_0)\Delta V \text{ et } W_1 = \frac{C_p}{R} P\Delta V$$

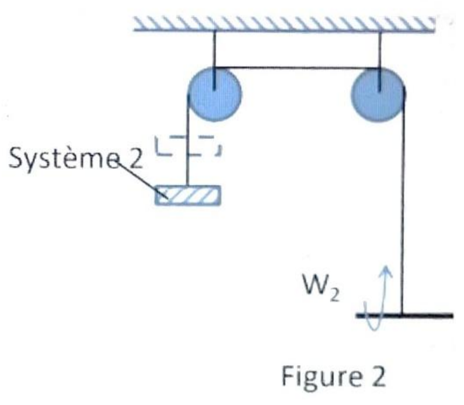


Figure 2

$\Rightarrow \dfrac{W_1}{W_2} = \dfrac{\frac{C_p}{R} P\Delta V}{(P - P_0)\Delta V} = \dfrac{C_p}{R} \times \dfrac{P}{P - P_0} \; P > P_0$ et $\dfrac{C_p}{R} > 1 \Rightarrow \boldsymbol{W_1 > W_2}$

La méthode thermo-mécanique est plus énergivore, car l'énergie fournie ne sert pas qu'à élever le poids. Elle sert aussi à :

- Augmenter l'énergie interne du gaz ;
- Repousser l'atmosphère extérieure ;
- Produire l'élévation mécanique du piston-poids.