Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2012

Parte 1 – 04/10/2011

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx).**
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração da prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**

  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas serão desconsideradas.**
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

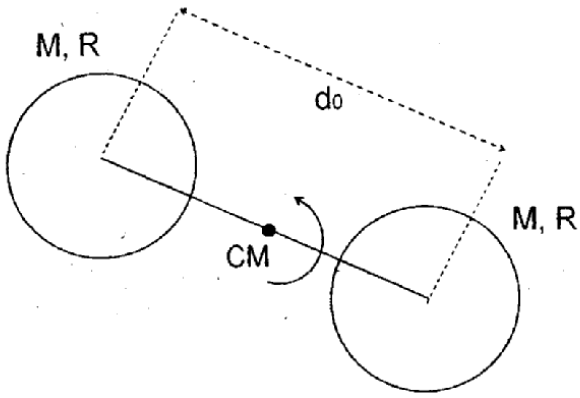
Q1. Duas esferas ocas, ambas de massa M e raio R, que estão girando em torno do centro de massa (CM) do sistema com um período inicial T_0, são mantidas distantes $d_0 = 8R$ uma da outra por um fio ideal que passa pelos respectivos centros, conforme ilustra a figura abaixo. Num dado instante um motor, colocado dentro de uma das esferas, começa a enrolar o fio lentamente, aproximando uma esfera da outra. Considere que o momento de inércia do motor seja desprezível quando comparado ao das esferas. Desconsidere efeitos da gravidade e expresse todos os seus resultados em termos de M, R e T_0. Dado: o momento de inércia da casca esférica em relação a um eixo que passa pelo seu centro é $\frac{2}{3}MR^2$.

(a) Determine o momento angular desse sistema em relação ao seu centro de massa, antes do motor ser ligado.

(b) Calcule a velocidade angular de rotação, ω_f, no instante em que uma esfera encosta-se à outra.

(c) Calcule a variação da energia cinética do sistema até esse instante.

(d) Qual foi o trabalho realizado pelo motor para fazer com que as esferas se encostem?



Q2. Um pêndulo simples consiste de uma massa m pendurada a partir de um ponto fixo por uma barra estreita de massa desprezível, inextensível, de comprimento l. Seja g a aceleração da gravidade local e θ o ângulo entre o pêndulo e a direção vertical. No que segue, faça sempre a aproximação de pequenos ângulos.

(a) Escreva a equação de movimento desprezando o atrito. Obtenha a frequência natural ω do pêndulo.

(b) Determine $\theta(t)$ para as seguintes condições iniciais: $\theta(0) = 0$ e $\frac{d\theta}{dt}(0) = \Omega$.

(c) Escreva a equação do movimento do pêndulo na presença de uma força de atrito viscoso dada por $F_R = 2m\sqrt{gl}\,\frac{d\theta}{dt}$.

(d) Na situação do item (c), determine $\theta(t)$ para as seguintes condições iniciais: $\theta(0) = \theta_0$ e $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$.

Q3. Parte I – Na tentativa de observar o efeito fotoelétrico, um cientista do final do século XIX realiza um experimento onde utiliza pulsos (1 ms de duração) de luz monocromática, com comprimento de onda 414 nm e três diferentes potências, dadas respectivamente por P_0, $3P_0$ e $5P_0$, onde $P_0 = 300\ \text{keV/s}$. Ele escolhe para seu experimento três superfícies metálicas cujas funções trabalho são conhecidas: Li (2,3 eV), Be (3,9 eV) e Hg (4,5 eV).

(a) Determine para quais superfícies metálicas e potências poderá ocorrer a emissão de fotoelétrons.

(b) Calcule o número máximo de fotoelétrons que poderia ser emitido pelo pulso de potência $3P_0$ em cada superfície.

Parte II – Para preencher com elétrons as subcamadas de um átomo usa-se a seguinte regra: as subcamadas que têm o menor valor de $n + l$ são preenchidas antes; se duas subcamadas têm o mesmo valor de $n + l$, preenche-se antes a subcamada com menor valor de n.

(c) Use esta regra para escrever a configuração eletrônica do Sc, que é o átomo com número atômico mais baixo que apresenta um elétron em uma subcamada d.

(d) Quais são os valores possíveis do momento angular orbital e de sua componente z para um elétron na subcamada d do Sc?

Q4. Considere um elétron que se encontra confinado dentro de um poço de potencial unidimensional $V(x)$ dado por

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , x < 0 \\ 0 & , 0 < x < d \\ +\infty & , x > d \end{cases} .$$

(a) Escreva a equação de Schrödinger para este elétron e as condições de contorno que devem ser satisfeitas pelas funções de onda.

(b) Obtenha as funções de onda normalizadas e determine os valores das energias permitidas para este elétron.

Admita agora que este elétron se encontre no estado quântico cuja função de onda dentro do poço é dada por

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{d}}\, sen\left(\frac{3\pi x}{d}\right) .$$

(c) Determine o número quântico n do estado ocupado por este elétron e seu comprimento de onda nesse estado.

(d) Determine a probabilidade de encontrar este elétron entre $x = 0$ e $x = d/6$.

Q5. Considere um sistema formado por duas partículas distinguíveis, 1 e 2. Cada uma delas deve estar em um de dois compartimentos, A e B. A energia de uma partícula é zero quando ela se encontra no compartimento A, e ε quando no compartimento B. Quando as duas partículas estão no mesmo compartimento, há um custo energético adicional Δ. O sistema está em equilíbrio com um banho térmico à temperatura T.

(a) Quais são as possíveis configurações do sistema? Determine a energia de cada uma delas.

(b) Calcule a função de partição Z.

(c) Qual é a probabilidade de cada configuração?

(d) Calcule a energia média do sistema.

(e) Obtenha a entropia do sistema em termos de Z.

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2012

Parte 2 – 05/10/2011

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx).**
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração da prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**

  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas serão desconsideradas.**
- **NÃO** é necessário devolver o Formulário.

Boa prova!

Q6. Um cabo coaxial é composto por um longo cilindro reto condutor de raio a e uma fina casca cilíndrica condutora de raio b e concêntrica ao cabo interno. Os dois condutores transportam correntes iguais e opostas de intensidade i.

(a) Determine o módulo do campo magnético na região entre os dois condutores ($a \leq r \leq b$).

(b) Determine o módulo do campo magnético na região externa ao cabo coaxial ($r \geq b$).

(c) Encontre o módulo do campo magnético no interior do cilindro interno ($r \leq a$) se a corrente está distribuída uniformemente na seção transversal do mesmo.

(d) Calcule a energia armazenada no campo magnético por unidade de comprimento do cabo.

Q7. Um capacitor esférico isolado possui carga $+Q$ sobre o condutor interno (raio r_a) e carga $-Q$ sobre o condutor externo (raio r_b). A seguir, a metade inferior do volume entre os dois condutores é preenchida por um líquido de constante dielétrica relativa K, conforme indicado na seção reta da figura abaixo.

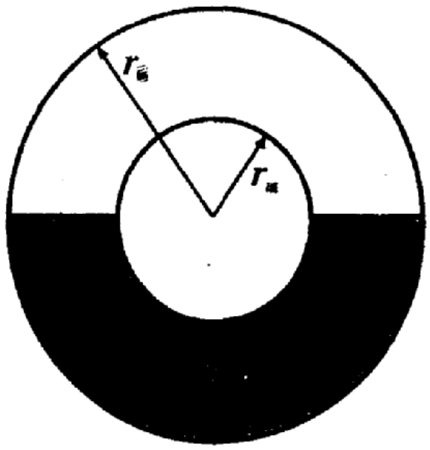
(a) Calcule o módulo do campo elétrico no volume entre os dois condutores em função da distância r ao centro do capacitor. Forneça respostas para a metade superior e para a metade inferior desse volume.

(b) Determine a densidade superficial de cargas livres sobre o condutor interno e sobre o condutor externo.

(c) Calcule a densidade superficial de cargas de polarização sobre as superfícies interna (r_a) e externa (r_b) do dielétrico.

(d) Qual é a densidade de carga de polarização sobre a superfície plana do dielétrico? Explique.

(e) Determine a capacitância do sistema.



Q8. A equação de Schrödinger independente do tempo para o problema unidimensional de uma partícula de massa m sujeita a um potencial de oscilador harmônico é

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

onde ω é a frequência angular do oscilador. Um método para se resolver essa equação consiste em expressá-la em termos do operador

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}\right)$$

e de seu conjugado hermitiano.

(a) A função de onda do estado fundamental do oscilador satisfaz a equação diferencial $a\,\psi_0(x) = 0$. Resolva esta última equação e determine $\psi_0(x)$ a menos de uma constante multiplicativa.

(b) Calcule essa constante normalizando $\psi_0(x)$.

(c) Obtenha o valor da energia do estado fundamental desse oscilador.

(d) Suponha, agora, que o oscilador seja perturbado pelo potencial

$$V(x) = V_0 \exp\left(-x^2/b^2\right) \quad ,$$

onde V_0 e b são constantes reais. Usando teoria de perturbações de primeira ordem, calcule o deslocamento de energia do estado fundamental.

Q9. Uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ tem momento de dipolo magnético $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$, onde γ é uma constante real e $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ é o operador de spin, sendo

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

as matrizes de Pauli. Se essa partícula está imersa num campo magnético uniforme $\vec{B}$, o hamiltoniano que governa a dinâmica do spin é $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$. No que segue, suponha que o campo magnético esteja na direção do eixo Oz.

(a) Dê a forma explícita do operador hamiltoniano como uma matriz 2 x 2, em termos de γ, $\hbar$ e B.

(b) Escreva as expressões para os estados estacionários como vetores-coluna normalizados e indique suas respectivas energias.

(c) No instante inicial, $t = 0$, a partícula é preparada no estado de spin

$$\chi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{(com } \alpha \text{ real).}$$

Qual será o estado de spin, $\chi(t)$, num instante t posterior?

(d) Nesse instante posterior é feita uma medida de S_x, a componente do spin segundo o eixo Ox. Qual a probabilidade $P_+(t)$ de se obter o valor $+\hbar/2$?

10. Considere um mol ($n = 1$) de um gás ideal monoatômico, inicialmente no estado de equilíbrio térmico especificado pela pressão P_0 e pelo volume V_0. Esse gás sofre uma compressão adiabática reversível que o leva a ocupar um volume $V_0/2$. Determine:

(a) a variação de energia interna desse gás devido a essa compressão;

(b) a variação de entropia do gás nessa compressão.

Após essa compressão adiabática, o gás, sempre isolado do resto do universo por paredes adiabáticas, sofre uma expansão completamente livre até o volume original V_0. Determine:

(c) a variação de temperatura do gás devido à expansão livre;

(d) a variação de entropia do gás nessa expansão livre.

ERRATA

Exame Unificado das Pós-Graduações em Físic

EUF

1º Semestre/2012

Parte 2 - 05/10/2011

Q6. **(a)** ...condutores ($a < r < b$).

(b) ...coaxial ($r > b$).

(c) ...interno ($r < a$) se ....

Q8. ... harmônico é

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

onde ω ...... do operador

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}\right)$$

(a) ... diferencial $a\,\psi_0(x) = 0$. .....determine $\psi_0(x)$ a menos ....

(b) ...normalizando $\psi_0(x)$.

(d) ...potencial

$$V(x) = V_0\,exp(-x^2/b^2)\,,$$

Q9. ...magnético $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$, onde γ é .... sendo

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

......dinânica do spin é $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$.

(a) ...termos de γ, $\hbar$ e B.

(c) ...de spin

$$\chi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{(com } \alpha \text{ real).}$$

..... spin, $\chi(t)$, num ....

(d) ....de S_x, a componente ....probabilidade $P_+(t)$ de se obter o valor $+\hbar/2$?

Q10. ... pressão P_0 e volume V_0. ..... ocupar um volume $V_0/2$.

Após a compressão...........original V_0.

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2012

FORMULÁRIO

Não escreva nada neste formulário. Devolva-o ao fim do primeiro dia de prova.

Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo	$c = 3{,}00\times10^{8}$ m/s
Constante de Planck	$h = 6{,}63\times10^{-34}$ J s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV s
	$hc = 1240$ eV nm
Constante de Wien	$W = 2{,}898\times10^{-3}$ m K
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ N/A^2 $= 12{,}6\times10^{-7}$ N/A^2
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}85\times10^{-12}$ F/m
	$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99\times10^{9}$ Nm^2/C^2
Constante gravitacional	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2/kg^2
Carga elementar	$e = 1{,}60\times10^{-19}$ C
Massa do elétron	$m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg $= 511$ keV/c^2
Comprimento de onda Compton do elétron	$\lambda_C = 2{,}43\times10^{-12}$ m
Massa do próton	$m_p = 1{,}673\times10^{-27}$ kg $= 938$ MeV/c^2
Massa do nêutron	$m_n = 1{,}675\times10^{-27}$ kg $= 940$ MeV/c^2
Massa do dêuteron	$m_d = 3{,}344\times10^{-27}$ kg $= 1.876$ MeV/c^2
Massa da partícula α	$m_\alpha = 6{,}645\times10^{-27}$ kg $= 3.727$ MeV/c^2
Constante de Rydberg	$R_H = 1{,}10\times10^{7}$ m^{-1} , $R_H hc = 13{,}6$ eV
Raio de Bohr	$a_0 = 5{,}29\times10^{-11}$ m
Constante de Avogadro	$N_A = 6{,}02\times10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J/K $= 8{,}62\times10^{-5}$ eV/K
Constante molar dos gases	$R = 8{,}31$ J mol^{-1} K^{-1}
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

Raio do Sol	=	$6{,}96\times10^{8}$ m	Massa do Sol	=	$1{,}99\times10^{30}$ kg
Raio da Terra	=	$6{,}37\times10^{6}$ m	Massa da Terra	=	$5{,}98\times10^{24}$ kg
Distância Sol-Terra	=	$1{,}50\times10^{11}$ m			

1 J = 10^7 erg   1 eV = $1{,}60\times10^{-19}$ J

Constantes numéricas

$\pi \cong 3{,}142$	$\ln 2 \cong 0{,}693$	$\cos(30°) = \sqrt{3}/2 \cong 0{,}866$
$e \cong 2{,}718$	$\ln 3 \cong 1{,}099$	$\mathrm{sen}(30°) = 1/2$
$1/e \cong 0{,}368$	$\ln 5 \cong 1{,}609$	
$\log_{10} e \cong 0{,}434$	$\ln 10 \cong 2{,}303$	

Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j \qquad T_R = \sum_{ij} \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j \qquad I_0 = I_{CM} + M\ell^2$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r \qquad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z \qquad \mathbf{v} = \dot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z}\hat{\mathbf{e}}_z \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_\rho + \left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z}\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r \qquad \begin{aligned}\mathbf{v} = {} & \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + r\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbf{a} = {} & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + \left(r\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \qquad V(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r')\mathrm{d}r' \qquad V_{\text{efetivo}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\int_{R_0}^{R} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,(t - t_0) \qquad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F(1/u), \quad u = \frac{1}{r}; \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2}\left[E - V(1/u)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k} \qquad Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{rotação}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{fixo}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^{f} p_k\dot{q}_k - L; \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Eletromagnetismo

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} + \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q = \int \rho dV \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$$

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\vec{\ell} - \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \qquad \nabla\times\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = -Q_P \qquad \nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho_P \qquad \oint \mathbf{M}\cdot d\vec{\ell} = I_M \qquad \nabla\times\mathbf{M} = \mathbf{J}_M$$

$$V = -\int \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad \mathbf{E} = -\nabla V \qquad d\mathbf{H} = \frac{I d\vec{\ell}\times\hat{e}_r}{4\pi r^2} \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\hat{e}_r \qquad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r} \qquad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad d\mathbf{F} = I d\vec{\ell}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}dV}{r}$$

$$(\rho = 0,\ \mathbf{J} = 0) \Rightarrow \nabla^2\mathbf{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad x' = \gamma(x - Vt) \qquad t' = \gamma\left(t - Vx/c^2\right)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)} \qquad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K \qquad E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} \qquad p = \gamma m_0 v$$

Mecânica Quântica

$$i\hbar \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = H\Psi(x,t) \qquad H = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \qquad [x, p_x] = i\hbar$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \qquad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle\,, \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \qquad L_\pm Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\; Y_{\ell m\pm 1}(\theta,\varphi)$$

$$L_z = x\,p_y - y\,p_x \qquad L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,, \qquad [L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$L_z Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = m\hbar\, Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) \qquad L^2\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar^2\, l(l+1) Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

$$E_n^{(1)} = \langle n|\delta H|n\rangle \qquad E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|\delta H|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}\,, \qquad \phi_n^{(1)} = \sum_{m\neq n}\frac{\langle m|\delta H|n\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}\phi_m^{(0)}$$

$$\hat{\mathrm{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Física Moderna

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad E_n = -Z^2\,\frac{hcR_H}{n^2}$$

$$R_T = \sigma T^4 \qquad \lambda_{\max} T = b \qquad L = mvr = n\hbar$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) \qquad n\lambda = 2d\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$$

Termodinâmica e Mecânica Estatística

$$U = TS - PV + \mu N \qquad \mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$$

$$F = U - TS \qquad G = F + PV$$

$$H = U + PV \qquad \Phi = U - TS - \mu N = -pV$$

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T \qquad S\mathrm{d}T - V\mathrm{d}P + N\mathrm{d}\mu = 0$$

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j} \qquad U\mathrm{d}\left(\frac{1}{T}\right) + V\mathrm{d}\left(\frac{P}{T}\right) + N\mathrm{d}\left(\frac{\mu}{T}\right) = 0$$

$$Z(T,V,N) = \int \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{e}^{-\beta E(\Omega)} \qquad F(T,V,N) = -k_{\mathrm{B}}T \ln Z(T,V,N)$$

$$\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T} \qquad U(T,V,N) = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

$$\Xi(T,V,\mu) = \sum_N \int \mathrm{d}\Omega_N\, \mathrm{e}^{-\beta[E(\Omega_N) - \mu N]} \qquad \Phi(T,V,\mu) = -k_{\mathrm{B}}T \ln \Xi(T,V,\mu)$$

$$S = k_B \ln \Omega \qquad \tilde{f}(p) = f(x(p)) - x(p)p \text{ (transf. de Legendre)}$$

$$PV = nRT, \quad U = C_V T \qquad PV^\gamma = \text{constante}, \quad \gamma = C_P/C_V = 1 + R/C_V$$

$$f_{\mathrm{FD}}(\epsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \qquad f_{\mathrm{BE}}(\epsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} \qquad C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N}$$

Resultados matemáticos úteis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1.3.5...(2n+1)}{(2n+1)2^n\alpha^n}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1-q), \quad (q<1)$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)} = \ln(1-1/u)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\int \frac{dz}{(a^2+z^2)^{1/2}} = \ln\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right)$$

$$\ln N! \approx N\ln N - N$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (\text{para } a>0)$$

$$\int \mathrm{sen}^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}(2ax)}{4a}$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2ax)}{4a}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(mx)\ \mathrm{sen}(nx)\,dx = \pi\delta_{m,n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\ \cos(nx)\,dx = \pi\delta_{m,n}$$

$$dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \qquad dV = r^2 dr\, \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \qquad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \qquad Y_{2,\pm2} = \mp\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\mathrm{sen}^2\,\theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = (3x^2-1)/2$$

Solução geral para a Eq. de Laplace em coordenadas esféricas, com simetria azimutal:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

Coordenadas cartesianas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathrm{e}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathrm{e}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathrm{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathrm{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{\mathrm{e}}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\mathrm{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(\mathrm{sen}\,\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(\mathrm{sen}\,\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathrm{e}}_r$$

$$+ \left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{\mathrm{e}}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\mathrm{e}}_\varphi$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathrm{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Teoremas do Cálculo Vetorial

$$\oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int (\nabla\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V \qquad\qquad \oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$