

Prueba 1

1. Encuentre el valor de:

$$\int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^2} dx.$$

Solución. Sea $I = \int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^2} dx$. Ahora, usando el método de sustitución trigonométrica; consideremos el cambio de variable $x = 2 \tan \theta \Rightarrow dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$.

No olvidemos que, cuando realizamos un cambio de variable, los límites de integración también cambian: cuando $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ y cuando $x = 2 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

Así,

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4 \tan^2 \theta + 4}}{4 \tan^2 \theta} \cdot 2 \sec^2 \theta d\theta$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4(\tan^2 \theta + 1)}}{2 \tan^2 \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta.$$

Recordemos la siguiente identidad pitagórica $\sec^2 \theta = \tan^2 \theta + 1$. Así,

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4} \sqrt{\sec^2 \theta}}{2 \tan^2 \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec \theta}{\tan^2 \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 \theta \cos \theta} d\theta$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \csc^2 \theta \sec \theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cot^2 \theta + 1) \sec \theta d\theta$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot^2 \theta \sec \theta + \sec \theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta d\theta$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}. \quad (1)$$

Para $\int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta$, consideremos el cambio de variable $b = \sin \theta \Rightarrow db = \cos \theta d\theta$. Así,

$$\int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \int \frac{db}{b^2} = -\frac{1}{b} + C.$$

Regresando a la variable θ ,

$$\int \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta = -\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} + C. \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$I = -\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \left[-\operatorname{csc} \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}.$$

Evaluando:

$$I = -\operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{4} \right) + \ln \left| \sec \left(\frac{\pi}{4} \right) + \tan \left(\frac{\pi}{4} \right) \right| + \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{6} \right) - \ln \left| \sec \left(\frac{\pi}{6} \right) + \tan \left(\frac{\pi}{6} \right) \right|$$

$$I = 0,9178538803.$$

Por lo tanto,

$$I = \int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^2} dx = 0,9178538803.$$

2. Encuentre el valor de I sin calcular su primitiva

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} dx.$$

Puede utilizar el cambio de variable $b = 1 - x$.

Solución. Derivando $b = 1 - x$, tenemos que $db = -dx$; $-db = dx$ y dado que realizamos un cambio de variable, los límites de integración también cambian. Por lo tanto, cuando $x = 0 \Rightarrow b = 1$ y cuando $x = 1 \Rightarrow b = 0$.

Reemplazando en la integral,

$$I = \int_1^0 \frac{\sqrt{1-b}}{\sqrt{1-b} + \sqrt{b}} \cdot -db = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-b}}{\sqrt{1-b} + \sqrt{b}} db. \quad (3)$$

Sumando (3) y la integral original,

$$2I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-b}}{\sqrt{1-b} + \sqrt{b}} db + \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} dx. \quad (4)$$

Notemos que (4) se puede agrupar en una sola integral, ya que, aunque una usa la variable x y la otra la variable b , ambas son variables mudas; es decir, su nombre no afecta al valor de la integral.

Trabajando con la variable b . Entonces:

$$2I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-b}}{\sqrt{1-b} + \sqrt{b}} db + \int_0^1 \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{1-b}} db$$

$$2I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-b}}{\sqrt{1-b} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{1-b}} db$$

$$2I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-b} + \sqrt{b}}{\sqrt{1-b} + \sqrt{b}} db$$

$$2I = \int_0^1 1 db = b \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

Finalmente, el valor de la integral es $\frac{1}{2}$.

3. Calcular el valor de:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x e^{|x|} \cos(x^3) - e^{|x|} \operatorname{sen}(x^3) dx.$$

Solución. Dado que el intervalo de integración es simétrico, analizamos primero la paridad del integrando. Sea:

$$f(x) = x e^{|x|} \cos(x^3) - e^{|x|} \operatorname{sen}(x^3).$$

Evaluando $f(-x)$:

$$f(-x) = -x e^{|-x|} \cos((-x)^3) - e^{|-x|} \operatorname{sen}((-x)^3)$$

$$f(-x) = -x e^{|x|} \cos(-x^3) - e^{|x|} \operatorname{sen}(-x^3).$$

Recordemos que $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$. Así,

$$f(-x) = -x e^{|x|} \cos(x^3) + e^{|x|} \operatorname{sen}(x^3)$$

$$f(-x) = -(x e^{|x|} \cos(x^3) - e^{|x|} \operatorname{sen}(x^3))$$

$$f(-x) = -f(x).$$

Por lo tanto, f es una función impar y, dado que se está integrando en un intervalo simétrico, concluimos que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x e^{|x|} \cos(x^3) - e^{|x|} \operatorname{sen}(x^3) dx = 0.$$

4. Sea la función definida a trozos:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 1, & \text{si } t < -1 \\ 2t, & \text{si } -1 \leq t < 3 \\ 3 - t, & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Para $x \in [-2, 4]$ definimos la función $G(x)$ como $G(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$. Calcular $G(2)$.

Solución. Queremos determinar $G(2) = \int_{-1}^2 f(t) dt$.

En el intervalo $[-1, 2]$ la función f se define como $f(t) = 2t$, por lo tanto,

$$G(2) = \int_{-1}^2 f(t) dt = \int_{-1}^2 2t dt = t^2 \Big|_{-1}^2 = 2^2 - (-1)^2 = 3.$$

Así,

$$G(2) = 3.$$

5. Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $W_n = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(t) dt$.

a) Calcule los primeros términos W_0, W_1 .

Solución.

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^0(t) dt = \int_0^{\pi/2} 1 dt = t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^1(t) dt = -\cos(t) \Big|_0^{\pi/2} = \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, y para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ definimos $f_n(t) = \text{sen}^n(t)$. Estudie la convergencia puntual de esta sucesión.

Solución. Sea $A = [0, \frac{\pi}{2}]$. Para estudiar la convergencia puntual de la sucesión $f_n(t) = \text{sen}^n(t)$, fijamos $t \in A$ y analizamos el comportamiento de la sucesión numérica $(f_n(t))$.

i) Si $t = 0$:

$$f_n(0) = \text{sen}^n(0) = 0, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0.$$

ii) Si $0 < t < \frac{\pi}{2}$:

$$\text{Tenemos que } \text{sen}(t) \in (0, 1), \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen}^n(t) = 0.$$

iii) Si $t = \frac{\pi}{2}$:

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}^n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Con (i), (ii) y (iii), se tiene:

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{si } t = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Como para todo $t \in A$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$, y por tanto la sucesión (f_n) converge puntualmente a f en A .

c) Pruebe que W_n es una sucesión positiva y monótona. ¿Qué podemos decir de la convergencia de W_n ?

Solución. Sabemos que $0 \leq \text{sen}(t) \leq 1$ para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, entonces:

$$0 \leq \text{sen}^n(t) \text{sen}(t) \leq \text{sen}^n(t),$$

$$0 \leq \text{sen}^{n+1}(t) \leq \text{sen}^n(t).$$

Integrando en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n+1}(t) dt \leq \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(t) dt$$

$$0 \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Así, verificamos que (W_n) es una sucesión positiva y decreciente. En consecuencia, es convergente. Además, al ser decreciente y estar acotada inferiormente por 0, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \inf\{W_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Probemos que este ínfimo es 0. Sea $\varepsilon > 0$ y $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\frac{\pi}{2} - a < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces,

$$W_n = \int_0^a \text{sen}^n(t) dt + \int_a^{\pi/2} \text{sen}^n(t) dt.$$

Como $\text{sen}(t) \leq \text{sen}(a) < 1$ para todo $t \in [0, a]$, se tiene

$$\int_0^a \text{sen}^n(t) dt \leq a \text{sen}^n(a),$$

y además

$$\int_a^{\pi/2} \text{sen}^n(t) dt \leq \int_a^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2} - a < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto,

$$W_n \leq a \text{sen}^n(a) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $0 < \text{sen}(a) < 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$a \text{sen}^n(a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, para $n \geq N$, se cumple que $W_n < \varepsilon$, lo que prueba que el ínfimo es 0. En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0.$$

d) Usando integración por partes muestre que

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Solución. Comenzamos reescribiendo la integral,

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(t) dt = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-1}(t) \text{sen}(t) dt.$$

Usando integración por partes, sean:

$$\begin{cases} u = \text{sen}^{n-1}(t) & \Rightarrow du = (n-1) \text{sen}^{n-2}(t) \cos(t) dt, \\ dv = \text{sen}(t) dt & \Rightarrow v = -\cos(t). \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} W_n &= \left[-\cos(t) \text{sen}^{n-1}(t) \right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2}(t) \cos^2(t) dt \\ W_n &= \underbrace{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{sen}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) \text{sen}^{n-1}(0)}_{=0} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2}(t) (1 - \text{sen}^2(t)) dt \\ W_n &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2}(t) - \text{sen}^{n-2}(t) \text{sen}^2(t) dt \\ W_n &= (n-1) \left[\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2}(t) dt - \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(t) dt \right] \\ W_n &= (n-1) [W_{n-2} - W_n] \\ W_n &= (n-1) W_{n-2} - (n-1) W_n \\ W_n + (n-1) W_n &= (n-1) W_{n-2} \\ (1+n-1) W_n &= (n-1) W_{n-2}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

e) Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, deduzca que $W_{n+1}^2 \leq W_n W_{n+2}$. Piense en reescribir $\text{sen}^{n+1}(t) = \text{sen}^{\frac{n}{2}}(t) \text{sen}^{\frac{n+2}{2}}(t)$.

Solución. Tenemos que:

$$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n+1}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{\frac{n}{2}}(t) \text{sen}^{\frac{n+2}{2}}(t) dt.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, con $f(t) = \text{sen}^{\frac{n}{2}}(t)$ y $g(t) = \text{sen}^{\frac{n+2}{2}}(t)$, dos funciones integrables en $[0, \frac{\pi}{2}]$. Se cumple que:

$$\left(\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{\frac{n}{2}}(t) \text{sen}^{\frac{n+2}{2}}(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{\pi/2} (\text{sen}^{\frac{n}{2}}(t))^2 dt \right) \left(\int_0^{\pi/2} (\text{sen}^{\frac{n+2}{2}}(t))^2 dt \right)$$

$$\left(\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n+1}(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(t) dt \right) \left(\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n+2}(t) dt \right).$$

Por lo tanto,

$$W_{n+1}^2 \leq W_n W_{n+2}.$$

6. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Usando la definición de la integral de Riemann, pruebe que f es Riemann integrable en $[0, 3]$.

Solución. Sea $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_k, t_k)\}$ una partición etiquetada de $[0, 3]$ con norma $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$. Consideramos los subintervalos cuyos puntos etiquetados pertenecen a $[0, 1]$ y los que pertenecen a $(1, 3]$, y escribimos

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = S(f, \dot{\mathcal{P}}_1) + S(f, \dot{\mathcal{P}}_2).$$

En los subintervalos cuyos tags están en $[0, 1]$, la función vale 0, por lo que su contribución a la suma es nula. Si U_1 es la unión de estos subintervalos, se verifica que

$$[0, 1 - \delta] \subseteq U_1 \subseteq [0, 1 + \delta],$$

lo cual muestra que estos subintervalos cubren casi todo $[0, 1]$, salvo un pequeño error controlado por δ .

Por otra parte, en los subintervalos cuyos tags están en $(1, 3]$, la función vale 2. Si U_2 es la unión de dichos subintervalos, entonces

$$[1 + \delta, 3] \subseteq U_2 \subseteq [1 - \delta, 3],$$

y por tanto la suma correspondiente satisface

$$2(2 - \delta) \leq S(f, \dot{\mathcal{P}}_2) \leq 2(2 + \delta).$$

Sumando ambas contribuciones, se obtiene

$$4 - 2\delta \leq S(f, \dot{\mathcal{P}}) \leq 4 + 2\delta,$$

lo que implica que las sumas de Riemann pueden hacerse tan cercanas como se quiera al número 4 tomando particiones suficientemente finas. Por lo tanto, f es integrable en $[0, 3]$.