Examen 1

1. Se considera la función
$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

a) Descomponer la función $f(x)$ en sus fracciones parciales.

Solución. Dado que el denominador tiene dos factores lineales, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma:
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

Usando el método de los límites,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x(x+1)} = 1, \\ b &= \lim_{x\to -1} (x+1) \cdot \frac{1}{x(x+1)} = -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la descomposición de f en sus fracciones parciales es:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

b) Deducir del literal anterior el valor de la integral $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$.

Solución. Usando la descomposición en fracciones parciales del literal anterior para el integrando, tenemos que:

$$J = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx.$$

Usando la linealidad de la integral,

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx \\ J &= \ln|x|\Big|_1^2 - \ln|x+1|\Big|_1^2 = \Big[\ln|x| - \ln|x+1|\Big]_1^2 = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|_1^2 \\ J &= \ln\left|\frac{2}{2+1}\right| - \ln\left|\frac{1}{1+1}\right|. \end{aligned}$$

Finalmente, el valor de J es
$$J = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

c) Calcular la integral $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}\,dx$.

Solución. Usando integración por partes, tomamos:

$$\begin{cases} u = \ln(x) & \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2} & \Rightarrow v = -\dfrac{1}{x+1}. \end{cases}$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$I = \left[\frac{-\ln(x)}{x+1}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx.$$

Notemos que el segundo término ya fue calculado en el literal anterior. Por lo tanto,

$$I = \frac{\ln(1)}{1+1} - \frac{\ln(2)}{2+1} + \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Finalmente,

$$I = \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{\ln(2)}{3}.$$

2. Para $n \in \mathbb{N}^*$, se define

$$I_n = \int_1^e (\ln t)^n\,dt.$$

a) Calcular I_1.

Solución. Para calcular $I_1 = \displaystyle\int_1^e \ln(t)\,dt$, aplicamos el método de integración por partes. Tomamos:

$$\begin{cases} u = \ln(t) & \Rightarrow du = \dfrac{dt}{t}, \\ dv = dt & \Rightarrow v = t. \end{cases}$$

Reemplazando en la fórmula:

$$\begin{aligned} I_1 &= [t\ln(t)]_1^e - \int_1^e t \cdot \frac{dt}{t} \\ I_1 &= [e\ln(e) - 1\cdot\ln(1)] - t|_1^e \\ I_1 &= [e\ln(e) - \ln(1)] - [e-1] \\ I_1 &= [e\cdot 1 - 0] - [e-1] \\ I_1 &= e - e + 1 = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de I_1 es

$$I_1 = 1.$$

$b)$ Si $n \in \mathbb{N}^*$, determinar el signo de I_n.

Solución. Sabemos que:

$$\begin{aligned} &0 \leq \ln(t) \leq 1, \quad \forall t \in [1, e] \\ &0 \leq (\ln(t))^n. \end{aligned}$$

Ahora, integrando en el intervalo $[1, e]$:

$$\begin{aligned} &0 \leq \int_1^e (\ln t)^n \, dt \\ &0 \leq I_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, I_n es positivo para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

$c)$ Mostrar que la sucesión $(I_n)_{n\geq 1}$ es decreciente. ¿Qué podemos decir de la convergencia de la sucesión I_n?

Solución. Tenemos que:

$$\begin{aligned} &0 \leq \ln(t) \leq 1, \quad \forall t \in [1, e] \\ &0 \leq \ln(t)(\ln t)^n \leq (\ln t)^n \\ &0 \leq (\ln t)^{n+1} \leq (\ln t)^n. \end{aligned}$$

Integrando en el intervalo $[1, e]$:

$$0 \leq \int_1^e (\ln t)^{n+1} \, dt \leq \int_1^e (\ln t)^n \, dt$$

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

Así, $(I_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente y acotada. En consecuencia, es convergente.

$d)$ Mostrar que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

Solución. Aplicando el método de integración por partes a $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^e (\ln(t))^{n+1} \, dt$. Sean:

$$\begin{cases} u = (\ln(t))^{n+1} & \Rightarrow du = (n+1)(\ln(t))^n \, \dfrac{dt}{t}, \\ dv = dt & \Rightarrow v = t. \end{cases}$$

Así,

$$I_{n+1} = \left[t(\ln(t))^{n+1}\right]_1^e - (n+1)\int_1^e t \cdot (\ln(t))^n \frac{dt}{t}$$
$$I_{n+1} = \left[e(\ln(e))^{n+1} - 1 \cdot (\ln(1))^{n+1}\right] - (n+1)I_n.$$

Por lo tanto,

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

e) Deducir, a partir de las cuestiones precedentes, el límite de la sucesión $(I_n)_{n\geq 1}$.

Solución. Usando la relación obtenida en el literal anterior, tenemos que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
Además, por el literal c), sabemos que $I_{n+1} \geq 0$.
Por lo tanto,

$$e - (n+1)I_n \geq 0,$$

$$(n+1)I_n \leq e.$$

Como $n + 1 > 0$,

$$I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

Por otra parte, por el literal b), sabemos que

$$I_n \geq 0.$$

Por lo tanto, al juntar ambas desigualdades, se obtiene:

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

Por otro lado,

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0.$$

Finalmente, por el teorema del sándwich, se concluye que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

f) Determinar el límite de la sucesión $(nI_n)_{n\geq 1}$. Se podrá deducir de las cuestiones anteriores realizando un encuadre adecuado de I_n.

Solución. De manera similar al literal anterior, usando la relación

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n,$$

y como $I_{n+1} \geq 0$, se tiene que

$$e - (n+1)I_n \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$(n+1)I_n \leq e.$$

Multiplicando por $n \in \mathbb{N}^*$, obtenemos

$$n(n+1)I_n \leq ne.$$

Luego, dividiendo entre $n+1>0$, se obtiene

$$nI_n \leq \frac{ne}{n+1}. \tag{1}$$

Por otro lado, como la sucesión (I_n) es decreciente, se cumple que

$$I_{n+1} \leq I_n.$$

Usando nuevamente la relación

$$e = I_{n+1} + (n+1)I_n,$$

tenemos

$$e = I_{n+1} + (n+1)I_n \leq I_n + (n+1)I_n.$$

Así,

$$e \leq (n+2)I_n.$$

Como $n+2>0$, se obtiene

$$\frac{e}{n+2} \leq I_n.$$

Multiplicando por $n \in \mathbb{N}^*$, se obtiene

$$\frac{ne}{n+2} \leq nI_n. \tag{2}$$

Juntando las desigualdades (1) y (2), se tiene

$$\frac{ne}{n+2} \leq nI_n \leq \frac{ne}{n+1}.$$

Ahora, cuando $n \to +\infty$, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ne}{n+2} = e \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{ne}{n+1} = e.$$

Por el teorema del sándwich, concluimos que

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = e.$$

3. Para $x>0$, se define

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt.$$

a) Encuentre $\frac{df}{dx}$ y estudie la monotonía de f.

Solución. Para derivar f, usamos la regla de Leibniz. Así

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{2x} \cdot 2 - \frac{e^x}{x} \cdot 1 = \frac{e^x(e^x - 1)}{x}.$$

Dado que conocemos la derivada de f, usamos el criterio de la primera derivada para estudiar su monotonía. Notemos que $e^x > 0, e^x - 1 > 0$ y, por hipótesis, $x > 0$. Por lo tanto, $f'(x) > 0$ y se concluye que f es estrictamente creciente.

b) Sea $x > 0$. Minorando la función $\dfrac{e^t}{t}$ en el intervalo $[x, 2x]$, mostrar que

$$f(x) \geq \frac{e^x}{2}.$$

Deducir el límite de f cuando $x \longrightarrow +\infty$.

Solución. Sea $t \in [x, 2x]$. Entonces $t \leq 2x$ y $e^t \geq e^x$, de donde:

$$\frac{e^t}{t} \geq \frac{e^x}{2x}.$$

Integrando en el intervalo $[x, 2x]$:

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt \geq \int_x^{2x} \frac{e^x}{2x}\, dt = \frac{e^x}{2x}(2x - x) = \frac{e^x}{2}.$$

Por lo tanto,

$$f(x) \geq \frac{e^x}{2}.$$

Como

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty,$$

se concluye que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

4. Una empresa de publicidad necesita pintar un dibujo de un caramelo envuelto en una valla publicitaria. La figura del caramelo envuelto ocupa toda la valla que ocupa 4 metros de ancho. Determinaron que las mejores curvas para dibujar el caramelo son $y = -x^2 + 4x$ y $y = x^2 - 4x + 6$. Calcule el área que se debe pintar.

Solución. Primero buscamos las intersecciones entre las dos curvas, para ello igualamos ambas funciones:

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x &= x^2 - 4x + 6 \\ 0 &= 2x^2 - 8x + 6 \end{aligned}$$

$$0 = x^2 - 4x + 3$$
$$0 = (x-1)(x-3).$$

Así, los puntos de intersección se dan en $x = 1$ y $x = 3$. Analizamos ahora qué función es mayor en cada subintervalo de $[0, 4]$.

$$\text{Consideremos:} \quad f_1(x) = -x^2 + 4x \quad \text{y} \quad f_2(x) = x^2 - 4x + 6.$$

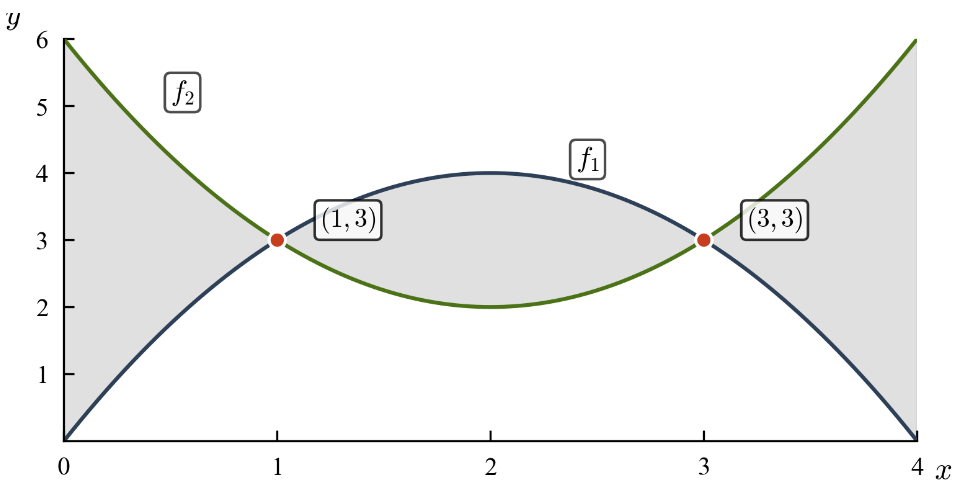

Figura 1: Gráfica del caramelo

Evaluamos las funciones en puntos pertenecientes a cada subintervalo de $[0, 4]$, es decir, en $[0, 1]$, $[1, 3]$ y $[3, 4]$.

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{1}{2}\right) &= -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{4} \quad &\text{y} \quad f_2\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 6 = \frac{17}{4}, \\ f_1(2) &= -(2)^2 + 4\cdot 2 = 4 \quad &\text{y} \quad f_2(2) &= (2)^2 - 4\cdot 2 + 6 = 2, \\ f_1\left(\frac{7}{2}\right) &= -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 4\cdot\frac{7}{2} = \frac{7}{4} \quad &\text{y} \quad f_2\left(\frac{7}{2}\right) &= \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{7}{2} + 6 = \frac{17}{4}. \end{aligned}$$

De aquí concluimos que:

i) f_2 es mayor en el intervalo $[0, 1]$,

ii) f_1 es mayor en el intervalo $[1, 3]$,

iii) f_2 es mayor en el intervalo $[3, 4]$.

Entonces, el área a pintar viene dada por:

$$A = \int_0^1 f_2(x) - f_1(x)\,dx + \int_1^3 f_1(x) - f_2(x)\,dx + \int_3^4 f_2(x) - f_1(x)\,dx$$
$$A = \int_0^1 x^2 - 4x + 6 - (-x^2 + 4x)\,dx + \int_1^3 -x^2 + 4x - (x^2 - 4x + 6)\,dx + \int_3^4 x^2 - 4x + 6 - (-x^2 + 4x)\,dx$$

$$A = \int_0^1 2x^2 - 8x + 6\,dx + \int_1^3 -2x^2 + 8x - 6\,dx + \int_3^4 2x^2 - 8x + 6\,dx$$

$$A = \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2 + 6x\right]_0^1 + \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right]_1^3 + \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2 + 6x\right]_3^4$$

$$A = \left[\frac{2(1)^3}{3} - 4(1)^2 + 6(1) - 0\right] + \left[-\frac{2(3)^3}{3} + 4(3)^2 - 6(3) + \frac{2(1)^3}{3} - 4(1)^2 + 6(1)\right]$$
$$+ \left[\frac{2(4)^3}{3} - 4(4)^2 + 6(4) - \frac{2(3)^3}{3} + 4(3)^2 - 6(3)\right] = 8.$$

Por lo tanto, el área que se debe pintar es de 8 $[m^2]$.