Control 1

Problema 1 Cálculo de primitivas

Calcule las primitivas de las siguientes funciones. (Justifique cada paso)

1. $\sin(\ln(x))$.

Solución. Sea $I = \displaystyle\int \sin(\ln(x))\,dx$. Para calcular esta integral aplicamos el método de integración por partes. Tomamos:

$$\begin{cases} u = \sin(\ln(x)) & \Rightarrow du = \dfrac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx, \\ dv = dx & \Rightarrow v = x. \end{cases}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$I = x\sin(\ln(x)) - \int x \cdot \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx. \tag{1}$$

Consideremos ahora la integral $J = \displaystyle\int \cos(\ln(x))\,dx$. Aplicando nuevamente el método de integración por partes, sean:

$$\begin{cases} u = \cos(\ln(x)) & \Rightarrow du = \dfrac{-\sin(\ln(x))}{x}\,dx, \\ dv = dx & \Rightarrow v = x. \end{cases}$$

Así,

$$J = x\cos(\ln(x)) - \int x \cdot \frac{-\sin(\ln(x))}{x}\,dx = x\cos(\ln(x)) + \int \sin(\ln(x))\,dx. \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$\begin{aligned} I &= x\sin(\ln(x)) - \left(x\cos(\ln(x)) + \int \sin(\ln(x))\,dx\right) \\ I &= x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - I. \end{aligned}$$

Sumando I en ambos lados de la igualdad:

$$2I = x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)).$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{1}{2}\big(x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x))\big) + C.$$

2. $x(\arctan(x))^2$.

Solución. Sea $I = \displaystyle\int x \arctan^2(x)\, dx$. Para calcular esta integral aplicamos el método de integración por partes. Tomamos:

$$\begin{cases} u = \arctan^2(x) & \Rightarrow du = \dfrac{2\arctan(x)}{x^2+1}\, dx, \\ dv = x\, dx & \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$I = \frac{x^2 \arctan^2(x)}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2\arctan(x)}{x^2+1}\, dx.$$

En el segundo miembro, sumamos un cero inteligente de la forma $0 = 1 - 1$. Así,

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2 \arctan^2(x)}{2} - \int (x^2+1-1)\frac{\arctan(x)}{x^2+1}\, dx \\ I &= \frac{x^2 \arctan^2(x)}{2} - \int ((x^2+1)-1)\frac{\arctan(x)}{x^2+1}\, dx \\ I &= \frac{x^2 \arctan^2(x)}{2} - \int \left(\frac{(x^2+1)\arctan(x)}{x^2+1} - \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\right) dx. \end{aligned}$$

Simplificando términos y usando linealidad de la integral,

$$I = \frac{x^2 \arctan^2(x)}{2} - \int \arctan(x)\, dx + \int \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\, dx. \tag{3}$$

Para calcular $J = \displaystyle\int \arctan(x)\, dx$, aplicamos el método de integración por partes. Tomamos:

$$\begin{cases} u = \arctan(x) & \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x^2+1}, \\ dv = dx & \Rightarrow v = x. \end{cases}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$J = x\arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx. \tag{4}$$

Para el segundo miembro, consideremos el cambio de variable $b = x^2 + 1$, y su diferencial es $db = 2x\, dx$; $\frac{db}{2} = x\, dx$. Sustituyendo en (4), se tiene:

$$\begin{aligned} J &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{db}{b} \\ J &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|b| + C_1. \end{aligned}$$

Regresando a la variable original,

$$J = x \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1. \tag{5}$$

Por otro lado, para calcular

$$K = \int \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\,dx,$$

consideremos el cambio de variable $b = \arctan(x)$, donde su diferencial es $db = \dfrac{dx}{x^2+1}$.
Por lo tanto:

$$\begin{aligned} K &= \int b\,db \\ K &= \frac{b^2}{2} + C_2 \\ K &= \frac{\arctan^2(x)}{2} + C_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Finalmente, sustituyendo (6) y (5) en (3)

$$I = \frac{x^2\arctan^2(x)}{2} - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{\arctan^2(x)}{2} + C.$$

3. $\dfrac{\sin^3(x)}{1+\cos^2 x}$

Solución. Sea $I = \displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2 x}\,dx$. Reescribiendo la integral en la forma:

$$I = \int \frac{\sin^2(x)\sin(x)}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2(x))\sin(x)}{1+\cos^2 x}\,dx. \tag{7}$$

Consideremos el cambio de variable $b = \cos(x)$, donde su diferencial es $db = -\sin(x)\,dx$. Sustituyendo en (7):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-b^2}{1+b^2}\cdot - db \\ I &= \int \frac{b^2-1}{1+b^2}\,db. \end{aligned}$$

Sumando un cero inteligente de la forma $0 = 1 - 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{b^2+1-1-1}{1+b^2}\,db \\ I &= \int \frac{b^2+1}{1+b^2} - \frac{2}{1+b^2}\,db \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{b^2+1}{1+b^2}\,db - \int \frac{2}{1+b^2}\,db \\
I &= \int 1\,db - 2\int \frac{db}{1+b^2} \\
I &= b + C_1 - 2\arctan(b) + C_2.
\end{aligned}
$$

Finalmente, regresando a la variable original x

$$I = \cos(x) - 2\arctan(\cos(x)) + C.$$

Problema 2 Fracciones parciales

Sea

$$f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}, \quad x \in]1, +\infty[.$$

1. Descomponer f en la suma de sus fracciones parciales.

Solución. Como el denominador posee dos factores lineales, uno de ellos repetido, la descomposición en fracciones parciales se escribe como:

$$\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

Para determinar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ utilizamos el método de los límites.
Así,

$$
\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} = 3, \\
b &= \frac{1}{1!}\lim_{x\to -3}\frac{d^1}{dx^1}\left((x+3)^2\cdot\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}\right) = 2, \\
c &= \frac{1}{0!}\lim_{x\to -3}\frac{d^0}{dx^0}\left((x+3)^2\cdot\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}\right) = -1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}.$$

2. Deducir la primitiva de f.

Solución. Sea $I = \displaystyle\int \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$. Para calcular esta integral utilizamos la descomposición obtenida en el numeral anterior. Entonces:

$$I = \int \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$$

$$I = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2} \right) dx.$$

Usando linealidad de la integral, se tiene:

$$I = \int \frac{3}{x-1}\, dx + \int \frac{2}{x+3}\, dx - \int \frac{1}{(x+3)^2}\, dx.$$

Notemos que las dos primeras integrales se obtienen directamente de tabla, mientras que la tercera se resuelve mediante el cambio de variable $b = x + 3$; donde su diferencial es $db = dx$. Así,

$$I = 3\ln|x-1| + C_1 + 2\ln|x+3| + C_2 - \int \frac{db}{b^2}$$

$$I = 3\ln|x-1| + C_1 + 2\ln|x+3| + C_2 - \int b^{-2}\, db$$

$$I = 3\ln|x-1| + C_1 + 2\ln|x+3| + C_2 - \frac{b^{-1}}{-1} - C_3$$

Finalmente, regresando a la variable original

$$I = 3\ln|x-1| + 2\ln|x+3| + \frac{1}{x+3} + C.$$

Problema 3 Desigualdad de Wirtinger

Sea $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 que verifica $f(0) = f(\pi) = 0$.

1. Determinar el valor del límite en 0 de

$$x \mapsto \left(f^2(x) + f^2(\pi - x)\right) \cot(x).$$

Solución. Notemos que:

$$\lim_{x\to 0} \left(f^2(x) + f^2(\pi - x)\right) \cot(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(f^2(x) + f^2(\pi - x)) \cos(x)}{\sin(x)}$$

Cuando $x \to 0$ se tiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.
Entonces, usando la Primera Regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2f(x)f'(x) + 2f(\pi - x)(-f'(\pi - x))) \cos(x) + (f^2(x) + f^2(\pi - x)) \cdot -\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Evaluando el límite anterior y usando la hipótesis $f(0) = f(\pi) = 0$, se concluye que

$$\lim_{x\to 0} \left(f^2(x) + f^2(\pi - x)\right) \cot(x) = 0.$$

2. Mostrar que, para todo $x \in (0, \pi)$,

$$\int_x^{\pi-x} (f'(t) - f(t)\cot(t))^2\, dt = \left(f^2(x) + f^2(\pi - x)\right)\cot(x) + \int_x^{\pi-x} (f'(t)^2 - f^2(t))\, dt.$$

Solución. Partimos del lado izquierdo de la igualdad. Desarrollando el binomio al cuadrado,

$$I = \int_x^{\pi-x} (f'(t) - f(t)\cot(t))^2\, dt = \int_x^{\pi-x} (f'(t))^2 - 2f'(t)f(t)\cot(t) + (f(t)\cot(t))^2\, dt.$$

Usando linealidad de la integral,

$$I = \int_x^{\pi-x} (f'(t))^2\, dt - \int_x^{\pi-x} 2f'(t)f(t)\cot(t)\, dt + \int_x^{\pi-x} (f(t)\cot(t))^2\, dt. \tag{8}$$

Ahora, estudiamos:

$$J = \int_x^{\pi-x} 2f'(t)f(t)\cot(t)\, dt = \int_x^{\pi-x} \frac{d}{dt}\left(f^2(t)\right)\cot(t)\, dt. \tag{9}$$

En (9), utilizando el método de integración por partes. Tomamos:

$$\begin{cases} u = \cot(t) & \Rightarrow du = -(1 + \cot^2(t))\, dt, \\ dv = \dfrac{d}{dt}\left(f^2(t)\right)\, dt & \Rightarrow v = f^2(t). \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} J &= \left[f^2(t)\cot(t)\right]_x^{\pi-x} - \int_x^{\pi-x} -f^2(t)(1 + \cot^2(t))\, dt \\ J &= \left(f^2(\pi - x)\cot(\pi - x) - f^2(x)\cot(x)\right) + \int_x^{\pi-x} f^2(t) + f^2(t)\cot^2(t)\, dt. \end{aligned}$$

Recordemos que $\cot(\pi - x) = -\cot(x)$. Así,

$$\begin{aligned} J &= \left(f^2(\pi - x)\cdot -\cot(x) - f^2(x)\cot(x)\right) + \int_x^{\pi-x} f^2(t) + f^2(t)\cot^2(t)\, dt \\ J &= -\left(f^2(\pi - x) + f^2(x)\right)\cot(x) + \int_x^{\pi-x} f^2(t) + f^2(t)\cot^2(t)\, dt. \end{aligned} \tag{10}$$

Reemplazando (10) en (8):

$$\begin{aligned} I = &\int_x^{\pi-x} (f'(t))^2\, dt + \left(f^2(\pi - x) + f^2(x)\right)\cot(x) - \int_x^{\pi-x} f^2(t) + f^2(t)\cot^2(t)\, dt \\ &+ \int_x^{\pi-x} (f(t)\cot(t))^2\, dt \end{aligned}$$

$$I = \int_x^{\pi-x} (f'(t))^2\,dt + \left(f^2(\pi-x) + f^2(x)\right)\cot(x) - \int_x^{\pi-x} f^2(t)\,dt - \int_x^{\pi-x} f^2(t)\cot^2(t)\,dt$$
$$+ \int_x^{\pi-x} (f(t)\cot(t))^2\,dt.$$

Finalmente, agrupando el primer y el tercer término en una sola integral

$$I = \left(f^2(\pi-x) + f^2(x)\right)\cot(x) + \int_x^{\pi-x} (f'(t))^2 - f^2(t)\,dt.$$

3. Deducir de ello la siguiente desigualdad llamada **desigualdad de Wirtinger**:

$$\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt \leq \int_0^{\pi} f'(t)^2\,dt.$$

Puede usar el siguiente resultado: si f es una función integrable en $[0, \pi]$,
$\lim_{x\to 0} \int_x^{\pi-x} f(t)dt = \int_0^{\pi} f(t)dt.$
Solución. Consideremos la función $g(t) = (f'(t) - f(t)\cot(t))^2 \geq 0$, integrable en $[x, \pi - x]$.
Si $g(t) \geq 0$ para todo $t \in [x, \pi - x]$, entonces

$$0 \leq \int_x^{\pi-x} g(t)\,dt$$
$$0 \leq \int_x^{\pi-x} (f'(t) - f(t)\cot(t))^2\,dt.$$

Usando el resultado del númeral anterior,

$$0 \leq \left(f^2(\pi-x) + f^2(x)\right)\cot(x) + \int_x^{\pi-x} (f'(t))^2 - f^2(t)\,dt.$$

Ahora, aplicando el resultado proporcionado en el ejercicio,

$$\lim_{x\to 0} 0 \leq \underbrace{\lim_{x\to 0}\left(f^2(\pi-x) + f^2(x)\right)\cot(x)}_{=\ 0,\text{ resultado del númeral 1}} + \lim_{x\to 0}\int_x^{\pi-x} (f'(t))^2 - f^2(t)\,dt$$
$$0 \leq \int_0^{\pi} (f'(t))^2 - f^2(t)\,dt.$$

Por linealidad de la integral,

$$0 \leq \int_0^{\pi} (f'(t))^2\,dt - \int_0^{\pi} f^2(t)\,dt.$$

Finalmente,

$$\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt \leq \int_0^{\pi} (f'(t))^2\,dt.$$