CUADERNO DE MATEMÁTICA
DEL REPOSITORIO MATH SNOOR

MATH SNOOR

RESULTADOS ÚTILES PARA CÁLCULO INTEGRAL

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS · EPN

mathsnoor.com
Quito, Ecuador

Para mi sobrina Keily, siempre animosa ante cualquier situación.

Cuadernillo de Math Snoor No. 1
Resultados útiles para Cálculo Integral
Math Snoor

Publicado en Math Snoor por Math Snoor,
Quito, Ecuador.

Tabla de contenidos

Prefacio

El presente cuadernillo fue elaborado por Math Snoor, estudiante de la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional.
El objetivo de este material es proporcionar una recopilación de resultados útiles para el estudio del Cálculo Integral, con el fin de servir como apoyo académico y herramienta de consulta para los estudiantes.
Este cuadernillo reúne una síntesis de temas relevantes, así como teoremas, proposiciones y resultados fundamentales, los cuales serán de utilidad al momento de resolver los ejercicios del curso.

Math Snoor
Quito, enero de 2026

Apéndice

Apéndice A - Derivadas inmediatas

i) $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{R}).$

ii) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$

iii) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \cos(x).$

iv) $\dfrac{d}{dx}\cos(x) = -\operatorname{sen}(x).$

v) $\dfrac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x).$

vi) $\dfrac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x).$

vii) $\dfrac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x).$

viii) $\dfrac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x).$

ix) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$

x) $\dfrac{d}{dx}\arccos(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$

xi) $\dfrac{d}{dx}\arctan(x) = \dfrac{1}{x^2+1}.$

xii) $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x.$

xiii) $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0).$

xiv) $\dfrac{d}{dx}\log_a(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},$ $x > 0).$

xv) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) = \cosh(x).$

xvi) $\dfrac{d}{dx}\cosh(x) = \operatorname{senh}(x).$

xvii) $\dfrac{d}{dx}\tanh(x) = \operatorname{sech}^2(x).$

xviii) $\dfrac{d}{dx}\coth(x) = -\operatorname{csch}^2(x).$

xix) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}(x) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x).$

xx) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch}(x) = -\operatorname{csch}(x)\coth(x).$

Apéndice B - Integrales inmediatas

i) $\displaystyle\int a\,dx = ax + C, \quad a \in \mathbb{R}.$

ii) $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

De forma general, se tiene: $\displaystyle\int (f(x))^n f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$

De forma general, se tiene: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C, \quad f(x) \neq 0.$

iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a \in \mathbb{R}^*.$

v) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \in \mathbb{R}^*.$

vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, \quad a \in \mathbb{R}^*.$

vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0.$

viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad x > a > 0.$

ix) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad x < a.$

x) $\displaystyle\int a^{\alpha x+\beta}\,dx = \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha\ln(a)} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}.$

En particular: $\displaystyle\int e^{\alpha x+\beta}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta} + C.$

xi) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C, \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}.$

xii) $\displaystyle\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b) + C, \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}.$

xiii) $\displaystyle\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C, \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}.$

xiv) $\displaystyle\int \csc^2(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C, \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}.$

xv) $\displaystyle\int \sec(x)\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C.$

xvi) $\displaystyle\int \csc(x)\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C = \ln|\csc(x)-\cot(x)| + C.$

$xvii)$ $$\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)| + C.$$

$xviii)$ $$\int \cot(x)\,dx = \ln|\operatorname{sen}(x)| + C.$$

$xix)$ $$\int \operatorname{senh}(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\cosh(ax+b) + C, \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}.$$

$xx)$ $$\int \cosh(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{senh}(ax+b) + C, \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}.$$

Apéndice C - Identidades trigonométricas

Identidades trigonométricas e hiperbólicas	
Identidades pitagóricas $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$ $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$ $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ $1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$ $\coth^2(x) - 1 = \operatorname{csch}^2(x)$	**Recíprocas** $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{1}{\csc(x)}$ $\quad \cos(x) = \dfrac{1}{\sec(x)}$ $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ $\quad \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$ $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ $\quad \csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$
Ángulo doble $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$ $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)$ $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$	**Potencias** $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ **Ángulo triple** $\operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen}(x) - 4\operatorname{sen}^3(x)$ $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ $\tan(3x) = \dfrac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$
Suma y resta $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$ $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$	**Producto a suma** $\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$ $\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$

Apéndice D - Límites para fracciones parciales

Sea

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

una fracción racional propia, donde $Q(x)$ contiene un factor lineal repetido $(x-a)^m$.

Supongamos que la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m}, \quad A_i \in \mathbb{R} \text{ con } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Multiplicando la igualdad por $(x-a)^m$ se obtiene:

$$(x-a)^m \frac{P(x)}{Q(x)} = A_m + A_{m-1}(x-a) + \cdots + A_1(x-a)^{m-1}.$$

Tenemos que el lado derecho es un polinomio en $(x-a)$.

Esto permite aislar los coeficientes evaluando límites y derivadas en $x = a$.

Para el coeficiente de mayor orden

$$A_m = \lim_{x \to a} (x-a)^m \frac{P(x)}{Q(x)},$$

al tomar el límite, todos los términos que contienen $(x-a)$ se anulan. Y para los coeficientes restantes, $r = 1, 2, \ldots, m-1$

$$A_{m-r} = \frac{1}{r!} \lim_{x \to a} \frac{d^r}{dx^r} \left[(x-a)^m \frac{P(x)}{Q(x)} \right].$$

Las derivadas eliminan sucesivamente las potencias de $(x-a)$, dejando aislado cada coeficiente.

Ejemplo.- Descomponer en fracciones parciales la expresión

$$\frac{2x+1}{(x-1)^3(x+2)^2(x+3)}.$$

Solución. Dado que el denominador está compuesto por factores lineales y lineales repetidos, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{2x+1}{(x-1)^3(x+2)^2(x+3)} = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x+2)^2} + \frac{e}{x+2} + \frac{f}{x+3}.$$

Para determinar los coeficientes utilizamos el método de límites aplicado a cada factor:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{0!}\lim_{x\to 1}\frac{d^0}{dx^0}\left[(x-1)^3\frac{2x+1}{(x-1)^3(x+2)^2(x+3)}\right] = \frac{1}{12},\\
b &= \frac{1}{1!}\lim_{x\to 1}\frac{d^1}{dx^1}\left[(x-1)^3\frac{2x+1}{(x-1)^3(x+2)^2(x+3)}\right] = -\frac{1}{48},\\
c &= \frac{1}{2!}\lim_{x\to 1}\frac{d^2}{dx^2}\left[(x-1)^3\frac{2x+1}{(x-1)^3(x+2)^2(x+3)}\right] = -\frac{7}{1728},\\
d &= \frac{1}{0!}\lim_{x\to -2}\frac{d^0}{dx^0}\left[(x+2)^2\frac{2x+1}{(x-1)^3(x+2)^2(x+3)}\right] = \frac{1}{9},\\
e &= \frac{1}{1!}\lim_{x\to -2}\frac{d^1}{dx^1}\left[(x+2)^2\frac{2x+1}{(x-1)^3(x+2)^2(x+3)}\right] = -\frac{2}{27},\\
f &= \lim_{x\to -3}\left[(x+3)\frac{2x+1}{(x-1)^3(x+2)^2(x+3)}\right] = \frac{5}{64}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{2x+1}{(x-1)^3(x+2)^2(x+3)} = \frac{1}{12(x-1)^3}-\frac{1}{48(x-1)^2}-\frac{7}{1728(x-1)}+\frac{1}{9(x+2)^2}-\frac{2}{27(x+2)}+\frac{5}{64(x+3)}.$$

Apéndice E - Cálculo de volumenes

Método de rodajas (o elementos de sección) para volumenes de sólidos de revolución

Sea V el volumen de un sólido de la forma

$$\{(x,y,z)\in R^3 \mid a\le x\le b, (y,z)\in B_x\},$$

donde $a<b$, B_x es una figura plana cuya área $A(x)$ es conocida para $x\in[a,b]$. En este caso

$$V=\int_a^b A(x)\,dx.$$

Método de arandelas o discos para volúmenes de sólidos de revolución

1. **Rotación alrededor del eje x**

   a) Si la región limitada por la gráfica de $y=f(x)$ y el eje x entre $x=a$ y $x=b$ se gira alrededor del eje x, el volumen V resultante es,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

b) Si $|f(x)| \geq |g(x)|$, y si la región limitada por las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ se gira alrededor del eje x, el volumen V resultante es,

$$V = \pi \int_0^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]\, dx.$$

2. **Rotación alrededor del eje** y

a) Si la región limitada por la gráfica de $x = \psi(y)$ y las rectas horizontales $y = a$ e $y = b$ se gira alrededor del eje y, el volumen resultante es,

$$V = \pi \int_a^b \psi^2(y)\, dy.$$

b) Si la región comprendida entre las rectas horizontales de ecuaciones $y = a$ e $y = b$, limitada a la derecha y a la izquierda por las gráficas de $x = \psi(y)$ y $x = \varphi(y)$, con $|\psi(y)| \geq |\varphi(y)|$ para y en $[a, b]$; el volumen V obtenido al girar la región del eje y es,

$$V = \pi \int_a^b \left[\psi^2(y) - \varphi^2(y)\right]\, dy.$$

Método de cortezas para volúmenes de sólidos de revolución

1. **Rotación alrededor del eje** x

La región limitada en la parte superior por la gráfica de $x = \varphi(y)$ y en la parte inferior por la gráfica de $x = \psi(y)$, tal que las curvas $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ no se cruzan entre si, es decir $\varphi(y) - \psi(y) > 0$, para toda $y \in [c, d]$; entre las rectas horizontales de ecuaciones $y = c$ y $y = d$ gira alrededor del eje x, el volumen V resultante es,

$$V = 2\pi \int_c^d y\left[\varphi(y) - \psi(y)\right]\, dy.$$

2. **Rotación alrededor del eje** y

La región limitada en la parte superior por la gráfica de $y = f(x)$ y en la parte inferior por la gráfica de $y = g(x)$, tal que las curvas $f(x)$ y $g(x)$ no se cruzan entre si, es decir

$f(x) - g(x) > 0$, para toda $x \in [a, b]$; entre las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$ gira alrededor del eje y, el volumen V resultante es,

$$V = 2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\; dx.$$

Apéndice F - Paridad

Paridad de una función

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que:

$i)$ f es una función par si $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$ii)$ f es una función impar si $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Integral de una función par e impar en un intervalo simétrico

Ahora, sea f una función integrable en $[-a, a]$. Entonces:

$iii)$ Si f es una función par, se tiene que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx.$$

$iv)$ Si f es una función impar, se tiene que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Ilustraremos un ejemplo para el caso (iii) y (iv).
Ejemplo.- Determinar la integral de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$.
Solución. Para calcular la integral de f en el intervalo dado, primero podemos analizar la paridad de la función.
Para ello, $f(-x) = (-x)^2$ lo cual equivale a $f(-x) = x^2 = f(x)$. Así f es una función par.
Ahora, $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\, dx$ la resolveremos sin usar la propiedad (iii) y luego usándola.

$$\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Usando (iii):
$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2\,dx = 2\left[\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1\right] = 2\left[\frac{1}{3}-\frac{0}{3}\right] = \frac{2}{3}.$$
Así notamos que la propiedad (iii) se cumple.

Ejemplo.- Determinar la integral de $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución. Primero analizamos la paridad de f, para ello $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Por lo tanto, decimos que f es una función impar ya que cumple con (ii).

Resolveremos la integral de manera similar al ejemplo anterior, es decir, primero usaremos la propiedad (iv) y después sin usarla para obtener el mismo resultado.

Por la propiedad (iv), se cumple que
$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0.$$
Ahora, integrando de manera usual debería verificarse el resultado anterior. Integrando f en $[-1, 1]$,
$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 0.$$
Por lo tanto, podemos afirmar que la propiedad (iv) también es verdadera.

Apéndice G - King's Rule

La King's Rule es un método muy usado para resolver integrales de competencia, como las del MIT Integration Bee. Su identificación no es trivial, aunque es muy útil para resolver integrales trigonométricas cuyo intervalo de integración sea $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[0, \pi]$ o $[-\pi, \pi]$. Estos son intervalos muy usuales donde se puede aplicar esta técnica.

Propiedad.- Sea f una función integrable en $[a, b]$. Entonces, se cumple que:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$
Demostración. Sea
$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$
Tomando el cambio de variable $u = a + b - x$, derivando, $du = -\,dx$. Los nuevos límites son: $u = b$ cuando $x = a$ y $u = a$ cuando $x = b$.

Sustituyendo todo en la integral:
$$I = \int_b^a f(a+b-u)\cdot -\,du$$

$$I = \int_a^b f(a+b-u)\,du.$$

Como la variable de integración es muda, entonces

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

$\square$

Ejemplo.- Calcular el valor de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(x)}{\operatorname{sen}^n(x)+\cos^n(x)}\,dx$ con $n > 0$.
Solución. Usando King's Rule,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{sen}^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx.$$

Recordemos que $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \operatorname{sen}(x)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$.
Por lo tanto,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{\cos^n(x)+\operatorname{sen}^n(x)}\,dx.$$

Sumando el resultado anterior y la integral original, se tiene que:

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{\cos^n(x)+\operatorname{sen}^n(x)}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(x)}{\operatorname{sen}^n(x)+\cos^n(x)}\,dx\\
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{\cos^n(x)+\operatorname{sen}^n(x)} + \frac{\cos^n(x)}{\operatorname{sen}^n(x)+\cos^n(x)}\,dx\\
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^n(x)+\cos^n(x)}{\cos^n(x)+\operatorname{sen}^n(x)}\,dx\\
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx\\
2I &= x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

Apéndice H - Método SE-One

El método SE-One es una técnica particular. Sus siglas en inglés provienen de Same, Even y One, las cuales se explicarán a continuación.

Propiedad.- Consideremos $\frac{E(X)}{K(X)+1}$, una función integrable en $[-a, a]$. Entonces:

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{E(x)}{K(x)+1}\, dx = \int_{0}^{a} E(x)\, dx.$$

Condiciones:

i) Same: El intervalo de integración es simétrico respecto al origen, es decir, $[-a, a]$.

ii) Even: $E(x)$ es una función par.

iii) One: $K(x)K(-x) = 1$.

Notemos que una familia importante de funciones que satisface (*iii*) es

$$K(x) = \phi^{f(x)},$$

donde $f(x)$ es una función impar y $\phi \in \mathbb{R}$, pues

$$K(x)K(-x) = \phi^{f(x)}\phi^{f(-x)} = \phi^{f(x)-f(x)} = 1.$$

Demostración. Sea

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{E(x)}{K(x)+1}\, dx.$$

Consideremos el cambio de variable $b = -x$, derivando, $db = -\,dx$ y los nuevos límites son: $b = a$ cuando $x = -a$ y $b = -a$ cuando $x = a$.
Por lo tanto,

$$I = \int_{a}^{-a} \frac{E(-b)}{K(-b)+1} \cdot -\,db = \int_{-a}^{a} \frac{E(-b)}{K(-b)+1}\, db.$$

Como $E(b)$ es un función par, $E(-b) = E(b)$. Así,

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{E(b)}{K(-b)+1}\, db.$$

Dado que la variable del integrando es muda, trabajaremos ahora con la variable x

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{E(x)}{K(-x)+1}\, dx.$$

Sumando esta expresión y la integral original,

$$2I = \int_{-a}^{a} \frac{E(x)}{K(x)+1} + \frac{E(x)}{K(-x)+1}\, dx$$

$$2I = \int_{-a}^{a} \frac{E(x)}{K(x)+1} + \frac{K(x)}{K(x)} \cdot \frac{E(x)}{K(-x)+1}\, dx.$$

Usando la condición $K(x)K(-x) = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
2I &= \int_{-a}^{a} \frac{E(x)}{K(x)+1} + \frac{K(x)E(x)}{1+K(x)}\, dx \\
2I &= \int_{-a}^{a} \frac{E(x)+K(x)E(x)}{1+K(x)}\, dx \\
2I &= \int_{-a}^{a} \frac{(1+K(x))E(x)}{1+K(x)}\, dx \\
2I &= \int_{-a}^{a} E(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Como $E(x)$ es par y el intervalo es simétrico,

$$2I = 2\int_{0}^{a} E(x)\, dx.$$

Finalmente,

$$I = \int_{0}^{a} E(x)\, dx.$$

$\square$

Ejemplo.- Calcular el valor de $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{e^x+1}\, dx$.

Solución. Notemos que I cumple con las condiciones del método SE-1. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx \\
I &= \operatorname{sen}(x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} \\
I &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0).
\end{aligned}$$

Así, el valor de

$$I = 1.$$

Apéndice I - Series de Maclaurin

$i)$ $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^3),\ \text{con } |x| < 1.$

$$ii)\ \ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + O(x^3),\ \text{con } |x| < 1.$$

$$iii)\ \ e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^3),\ \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

$$iv)\ \ \text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^7),\ \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

$$v)\ \ \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^6),\ \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

$$vi)\ \ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^4),\ \text{con } -1 < x \leq 1.$$

$$vii)\ \ \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + O(x^7),\ \text{con } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

$$viii)\ \ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + O(x^7),\ \text{con } |x| \leq 1.$$

$$ix)\ \ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + O(x^3),\ \text{con } |x| < 1.$$

Apéndice J - Teoremas de Cálculo Diferencial e Integral

Cálculo Diferencial

Convergencia de una Sucesión

Decimos que la sucesión (a_n) de números reales **converge** al número real L, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_\varepsilon$, entonces

$$|a_n - L| < \varepsilon,$$

en este caso escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, para decir que (a_n) converge a L.

Observación: El subíndice ε en el término N_ε es para resaltar que N_ε depende de ε, es decir, para cada ε existe un correspondiente N_ε.

El Producto de Límites en Sucesiones

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de números reales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = LM = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Teorema de Compresión para Sucesiones (Teorema del Sandwich para Sucesiones)

Sean (a_n), (b_n), (c_n) sucesiones de números reales, supongamos que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Proposición

Sea (a_n) una sucesión de números reales tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, entonces

$$L \geq 0.$$

Límite y Desigualdades con Sucesiones

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de números reales tales que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, entonces

$$L \leq M.$$

Sucesiones Acotadas

Sea (a_n) una sucesión de números reales, diremos que (a_n) está **acotada** (o que es acotada) si existe $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad

$$|a_n| \leq M.$$

Las Sucesiones Convergentes son Acotadas

Sea (a_n) una sucesión, si (a_n) es **convergente**, entonces (a_n) está **acotada**.

Sucesiones Crecientes

Sea (a_n) una sucesión de números reales, diremos que (a_n) es **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y diremos que es **estrictamente creciente** si $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación: Una sucesión es creciente si los valores de a_n aumentan conforme n aumenta.

Sucesiones Decrecientes

Sea (a_n) una sucesión de números reales, diremos que (a_n) es **decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y diremos que es **estrictamente decreciente** si $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación: Una sucesión es decreciente si los valores de a_n disminuyen conforme n aumenta.

Nota: Diremos que una sucesión (a_n) es monótona si es creciente o decreciente, y diremos que es estrictamente monótona si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Convergencia de las Sucesiones Monótonas Acotadas

Sea (a_n) una sucesión de números reales acotada, se cumple lo siguiente:

i) Si (a_n) es **creciente**, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Si (a_n) es **decreciente**, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Propiedad del valor absoluto y el límite

Sea (a_n) una sucesión de números reales, si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces (a_n) converge y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Punto de Acumulación

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, decimos que a es un **punto de acumulación** de A si para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\} \cap A \neq \emptyset$.

El Producto de Límites en funciones

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = LM = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Proposición

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A, supongamos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, entonces

$$L \geq 0.$$

Límite de Funciones y Desigualdades

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A, supongamos que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces

$$L \leq M.$$

Teorema de la Compresión para Funciones (Teorema del Sandwich para Funciones)

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A, supongamos que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in A$, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Proposición

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A, supongamos que $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in A \setminus \{a\}$, así que:

i) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, entonces se tiene que $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

ii) Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, entonces se tiene que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Derivada y Monotonía

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $[a, b]$, entonces:

i) f es **creciente** sobre $[a, b]$ si y sólo si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

ii) f es **decreciente** sobre $[a, b]$ si y sólo si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Primera Regla de L'Hôpital

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) tales que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, si $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observación: El teorema anterior, también es válido para los siguientes límites

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Segunda Regla de L'Hôpital

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) tales que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \infty$, si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Cálculo Integral

Teorema 1

Sea $c \in (a, b)$, entonces f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, y además

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Teorema 2

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es **integrable** en $[a, b]$, y además

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Teorema 3

Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$, entonces la función cf es **integrable** en $[a, b]$, y además

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f.$$

Teorema 4

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable, si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f \geq 0.$$

Teorema 5

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables en $[a,b]$, tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Teorema 6

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$, si para todo $x \in [a,b]$ se cumple que $m \leq f(x) \leq M$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Teorema 7

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$, entonces se cumple que

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Teorema 8 (Teorema del Valor Medio para la Integral)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Teorema 9

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$, tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, si existe $x_0 \in [a,b]$ tal que f es **continua** en x_0 y además $f(x_0) > 0$, entonces

$$\int_a^b f > 0.$$

Teorema 10

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$, si se cumple que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f > 0.$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz para Integrales

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables en $[a, b]$, entonces

$$\Big(\int_a^b fg\Big)^2 \leq \Big(\int_a^b f^2\Big)\Big(\int_a^b g^2\Big).$$

Teorema Fundamental del Cálculo Parte 1

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ y $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

si f es **continua** en $c \in [a, b]$, entonces F es **derivable** en c y además

$$F'(c) = f(c).$$

Corolario del Teorema Fundamental del Cálculo Parte 1

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, **si existe** una función g tal que $f(x) = g'(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a).$$

Teorema Fundamental del Cálculo Parte 2

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$, **si existe** una función F **continua** en $[a, b]$, tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Doble Regla de la Cadena con Integrales (Regla de Leibniz)

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$ y $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables en $\mathbb{R}$, entonces

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$, y además $F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$.

Antiderivada

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces una **antiderivada** o **primitiva** de f es una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Integrales de las Potencias del Seno

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Integrales de las Potencias del Coseno

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)\, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Teorema de Taylor

Teorema de Taylor

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ tal que las derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ son **continuas** en $[a, b]$ y $f^{(n+1)}$ existe en (a, b).
Si $x_0 \in [a, b]$, entonces para cualquier $x \in [a, b]$ existe c_x entre x_0 y x tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Series Infinitas

Sumas Parciales

Sea (a_n) una sucesión de números reales, definimos a la sucesión de **sumas parciales** (S_n) de la siguiente forma

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Series Infinitas

Sea (a_n) una sucesión de números reales, si la sucesión de sumas parciales (S_n) converge a un número real L, definimos a la **serie infinita** de a_k como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = L.$$

Nota: Cuando $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no exista, entonces diremos que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ es **divergente**.

Suma de Series y Producto por una Constante

Sean $c \in \mathbb{N}$ y $(a_n), (b_n)$ sucesiones, tales que las series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces se cumple lo siguiente:

i) La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ converge y $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

ii) La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(c \cdot a_k)$ converge y $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(c \cdot a_k) = c \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Criterio para Series de Términos no Negativos

Sea (a_n) una sucesión de números reales no negativos, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** si y sólo si la sucesión (S_n) es **acotada**.

Criterio del n-ésimo Término

Sea (a_n) una sucesión de números reales tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces **se cumple que** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Primer Criterio de Comparación para Series

Sean $(a_n), (b_n)$ sucesiones de números reales, supongamos que existen $c > 0$ y $K \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq c \cdot b_n$ si $n \geq K$, entonces:

i) La convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica la **convergencia** de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) La divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica la **divergencia** de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Segundo Criterio de Comparación para Series

Sean $(a_n), (b_n)$ sucesiones de números reales positivos, supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r \in \mathbb{R}, \text{ entonces:}$$

i) Si $r > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

ii) Si $r = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Convergencia Absoluta de Series

Sea (a_n) una sucesión de números reales, diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Convergencia Absoluta implica la Convergencia normal

Sea (a_n) una sucesión de números reales, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente**, entonces es convergente.

Criterio del Cociente

Sea (a_n) una sucesión de números reales distintos de cero, entonces:

i) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

ii) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

iii) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ puede converger o puede diverger.

Criterio de la Raíz

Sea (a_n) una sucesión de números reales distintos de cero, entonces:

i) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

ii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

iii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ puede converger o puede diverger.

Criterio de Series Alternantes

Sea (x_n) una sucesión de números positivos decreciente, tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ converge.

Bibliografía

[1] Cortés, Á. Y. *Cálculo diferencial e integral: MathPures*. 3ª ed., Independently Published, 2023.

[2] Demidóvich, B. P. *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. 2ª ed., Editorial MIR, Moscú, 1967.

[3] Rojas, Germán. *Cálculo integral: cálculo en una variable*. 2ª ed., Escuela Politécnica Nacional, Quito, 2016.