MECÁNICA NEWTONIANA
2020 A
HOJA DE TRABAJO 10
TRABAJO Y ENERGÍA 2

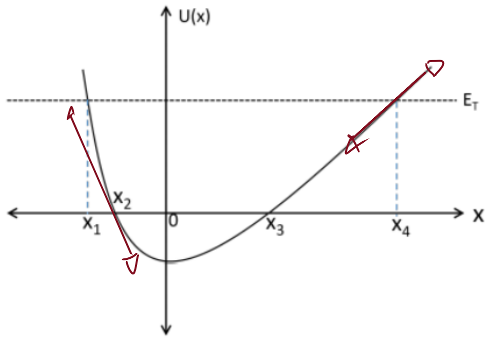
PREGUNTAS

1. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x, de tal manera que la curva de la energía potencial del sistema es la que se muestra. La aceleración de la partícula es máxima, en:
   a) $x = 0$
   b) x_1
   c) x_2
   d) x_3
   e) x_4

$F = -\frac{dU(x)}{dx}$

OBS, La fuerza es igual a la pendiente negativa de la gráfica

De x_1 a 0 f: +
pero en x_2 la pendiente es mayor

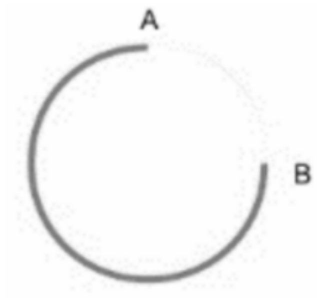


2. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x, de tal manera que la curva de la energía potencial del sistema es la que se muestra. La aceleración de la partícula es mínima, en:
   a) $x = 0$
   b) x_1
   c) x_2
   d) x_3
   e) x_4

3. Una fuerza $\vec{F}$ realiza un trabajo W cuando mueve una partícula entre el punto A y el punto B por un arco de circunferencia. Cuando la partícula se mueve del punto B al punto A el trabajo es exactamente el mismo. Es correcto afirmar que:
   a) $\vec{F}$ es una fuerza conservativa
   b) $\vec{F}$ es una fuerza no conservativa
   c) $\vec{F}$ es una fuerza central
   d) $\vec{F}$ realiza siempre un trabajo negativo
   e) nada de lo anterior es correcto

Si es conservativo
$W_{A \to B} = -W_{B \to A}$

$W_{A \to B} = W_{B \to A}$
No conservativo



4. La variación de energía potencial elástica de un sistema masa-resorte, en un plano horizontal sin rozamiento, con respecto a su longitud natural cuando se deforma una distancia, ya sea que se comprima o que se estire:
   a) es negativa cuando se comprime y positiva cuando se estira
   b) es negativa cuando se estira y positiva cuando se comprime
   c) es siempre positiva
   d) es siempre negativa
   e) falta información, para determinar si es positiva o negativa

$U_e = \frac{1}{2} K x^2$

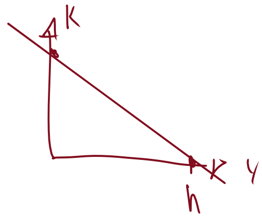
$x^2 \in \mathbb{R}^+$

K siempre +

5. Una partícula que se mueve en una dimensión bajo la influencia de una fuerza conservativa, dependiendo de su energía total, puede tener:
   a) ningún punto de retorno Si E es suficiente que pasa por encima de los obstáculos de potencial
   b) un punto de retorno Si la partícula choca con una barrera de potencial y nunca vuelve
   c) dos puntos de retorno Si esta atrapada en un pozo de potencial.
   d) tres puntos de retorno
   e) a), b), c)

6. Si el trabajo neto realizado sobre una partícula es cero. Es correcto afirmar que:
   a) $W_{FC} = W_{FNC}$
   b) $|W_{FC}| > |W_{FNC}|$
   c) $|W_{FC}| < |W_{FNC}|$
   d) $|W_{FC}| = |W_{FNC}|$
   e) nada de lo anterior

7. Se abandona un cuerpo de masa m, desde una altura h sobre el suelo. Si el movimiento se da sobre el eje y vertical con el origen en el suelo y se desprecia la resistencia del aire, al graficar la Energía Cinética en función de la posición, se obtiene:



a) una recta con pendiente positiva
b) una recta con pendiente negativa
c) un ramal de parábola que se abre hacia arriba
d) un ramal de parábola que se abre hacia abajo
e) nada de lo anterior

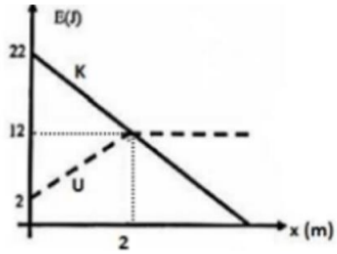
8. Un pequeño bloque de masa m se lanza desde un punto A hacia arriba de un plano inclinado, de tal manera que llega hasta un punto B sobre el mismo plano; si se conoce que: $E_{cA} = 70$ J, $E_{pgA} = 30$ J y $E_{cB} = 0$ J, $E_{pgB} = 100$ J, entonces el bloque:
a) se queda en B
b) baja pero no vuelve a pasar por A
c) baja y vuelve a pasar por A
d) no se puede determinar si se queda en B
e) no se puede determinar si vuelve a pasar por A

9. El siguiente gráfico muestra la energía potencial U y la energía cinética K en función de la posición, de un sistema en donde una partícula de masa m se mueve sobre el eje x. Cuando la partícula se desplaza desde $x = 0$ m a $x = 2$ m el trabajo de las fuerzas no conservativas es:
a) 0 J
b) 4 J
c) 10 J
d) 20 J
e) -20 J

$\Delta E = W^{8}$

$24 - 24 = 0$

$\Rightarrow W^{8} = 0$



10. En una región del espacio actúa el campo de fuerzas $\vec{F} = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$ N, este campo de fuerzas:
a) es conservativo
b) es no conservativo
c) puede ser conservativo o no conservativo
d) no se pude determinar si es conservativo o no
e) nada de lo anterior es correcto

$f_x = x^2 + yz \quad f_y = y^2 + xz \quad f_z = z^2 + xy$

Es conservativo si $\nabla \times \vec{F} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$; $\frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x}$; $\frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}$

$z = z$ ✓ ; $y = y$ ✓ ; $x = x$ ✓

$\therefore$ Es conservativo

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

PROBLEMAS

1) La función de la energía potencial que se encuentra asociada al campo de fuerzas en el cual se desplaza una partícula de masa $m = 2$ kg, es: $Ep = -(3xy^2z + 5y^3z)$ J. Determine: a) la fuerza en el punto A $(0, 2, -1)$ m, y b) la rapidez de la partícula al pasar por B $(2, -1, 1)$ m, si en el punto A, ésta era de $\sqrt{5}$ m/s.
R: a) $-12\,\vec{i} - 60\,\vec{j} + 40\,\vec{k}$ N, b) $\sqrt{46}$ m/s

(a) $\nabla U = -\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla U = \nabla(3xy^2z + 5y^3z)$

$\vec{F} = 3y^2z\,\vec{i} + (6xyz + 15y^2z)\,\vec{j} + (3xy^2 + 5y^3)\,\vec{k}$

$\vec{F}(0; 2; -1) = -12\vec{i} - 60\vec{j} + 40\vec{k}$ [N] //

(b) $E_0 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 + 40 = 45$ J

$E = v^2 - 1$

$E_0 = E$

$45 = v^2 - 1$

$\Rightarrow v = \sqrt{46}$ m/s //

2) Suponga que la energía potencial para una partícula que se mueve a lo largo del eje x es: $U(x) = \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x}$ donde b y c son constantes positivas, con $x > 0$. Determine: a) la posición del punto de equilibrio y b) los puntos de retorno del movimiento, si la energía total es $E = \frac{1}{2}\frac{c^2}{b}$.

R: a) $\frac{b}{c}$, b) $(-2+\sqrt{6})\frac{b}{c}$

$$\nabla U = -F = \frac{d(bx^{-2} - 2cx^{-1})}{dx} = -2bx^{-3} + 2cx^{-2}$$

(a) Cuando $F = 0$ encontramos puntos de equilibrio

$$-\cancel{2}bx^{-3} + \cancel{2}cx^{-2} = 0$$

$$cx^{-2} = bx^{-3} \Rightarrow \frac{c}{x^2} = \frac{b}{x^3} \Rightarrow cx^3 = bx^2 \; ; \; x \neq 0$$

$$cx^3 - bx^2 = 0 \Rightarrow cx - b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{c} \quad //$$

(b) Los puntos de retorno se dan cuando $E = U$

$$\frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{b}$$

$$\frac{b - 2cx}{x^2} = \frac{c^2}{2b}$$

$$2b^2 - 4bcx = x^2c^2$$

$$\Rightarrow x^2c^2 + 4bcx - 2b^2 = 0$$

$$x = \frac{-4bc \pm \sqrt{16b^2c^2 - 4c^2(-2b^2)}}{2c^2}$$

$$x = \frac{-4b\cancel{c} \pm \cancel{2}b\cancel{c}\sqrt{6}}{\cancel{2}c^{\cancel{2}}}$$

$$x = (-2 \pm \sqrt{6})\frac{b}{c}$$

OBS: Como $x > 0$ solo se toma el resultado positivo de la raiz

$$x = (-2+\sqrt{6})\frac{b}{c} \quad //$$

3) Una partícula parte del reposo en el origen y experimenta una aceleración $a = \frac{k}{(x+4)^2}$, donde a y x se expresan en m/s^2 y m respectivamente, y k es una constante. Si se sabe que la velocidad de la partícula es 2 m/s cuando $x = 4$ m, determine a) el valor de k (no olvide escribir las unidades de k), b) la posición de la partícula cuando $v = 1.5$ m/s, c) la rapidez máxima de la partícula, d) la expresión para la fuerza $F(x)$ que actúa sobre la partícula si se conoce que su masa $m = 2$ kg, e) la expresión para la energía potencial $U(x)$ asociada a la fuerza F. Note que su respuesta para U quedará expresada en términos de una constante arbitraria C.

R:a) 16 m^3/s^2, b) 1.57 m, c) $2\sqrt{2}$ m/s, d) $\frac{32}{(x+4)^2}$ N, e) $\frac{32}{x+4} + C$ J

(a)

$$a = K(x+4)^{-2}$$

$$v\,dv = a\,dx$$

$$v\,dv = K(x+4)^{-2}dx$$

$$\frac{v^2}{2} = -K(x+4)^{-1} + C_1$$

Cuando $v = 0$, $x = 0$

$$0 = -\frac{K}{4} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{K}{4}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{K}{4} - \frac{K}{x+4}$$

$$v^2 = \frac{K}{2} - \frac{2K}{x+4}$$

$v = 2$ cuando $x = 4$

$$4 = \frac{K}{2} - \frac{K}{4}$$

$$16 = 2K - K$$

$$\Rightarrow K = 16$$

$m^2/s^2 = U_K / m$

$\Rightarrow U_K = m^3/s^2$

U_K = Unidades de K

$\therefore K = 16 \; m^3/s^2 \quad //$

(d) $F = m \cdot a$

(Si consideramos m = cte)

$$F = \frac{32}{(x+4)^2} \; [N]$$

(b) $v^2 = 8 - \frac{32}{x+4}$

$\Rightarrow \frac{32}{x+4} = 8 - v^2$

$\Rightarrow \frac{32}{8-v^2} = x+4$

$\Rightarrow x(v) = \frac{32}{8-v^2} - 4$

$\therefore x(1.5) = 1.57 \, [m]$ //

(c) $a = \frac{16}{(x+4)^2} = 0$

$x \to \infty$

$V_{max} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{8 - \frac{32}{x+4}}$

$V_{max} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ m/s //

OBS, Otra solucion
$x \to -\infty$

(e) $\frac{\partial U}{\partial x} = -F$

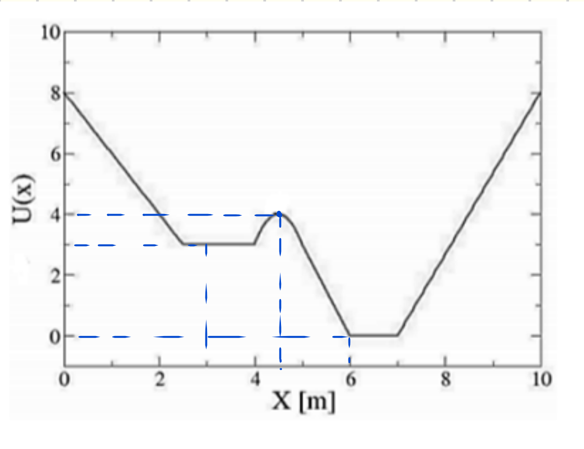
$\Rightarrow \partial U = -F \partial x$

$U = -\int \frac{32}{(x+4)^2} dx$

$U = \frac{32}{x+4} + C_1 \, [J]$ //

4) Para una partícula de masa 2 kg que se mueve sobre el eje x bajo la acción de la fuerza asociada a la energía potencial mostrada en la figura, determine la rapidez de la partícula cuando se encuentra en $x = 3$ m y $x = 6$ m, si se conoce que cuando $x = 4.5$ m, su energía cinética era de 2 J.

R: $\sqrt{3}$ m/s, $\sqrt{6}$ m/s



En $x = 4,5$

$E = 2 + 4 = 6$ J

En $x = 3$; $U(x) = 3$

$6 = 3 + K$

$\Rightarrow K = 3$

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v^2 = 3$

$\Rightarrow v = \sqrt{3}$ m/s //

En $X = 6$; $U(x) = 0$

$\Rightarrow K = 6$ J

$\Rightarrow v = \sqrt{6}$ m/s //

5) Una partícula está sujeta a una fuerza asociada con la energía potencial $Ep(x) = 3x^2 - x^3$ J.

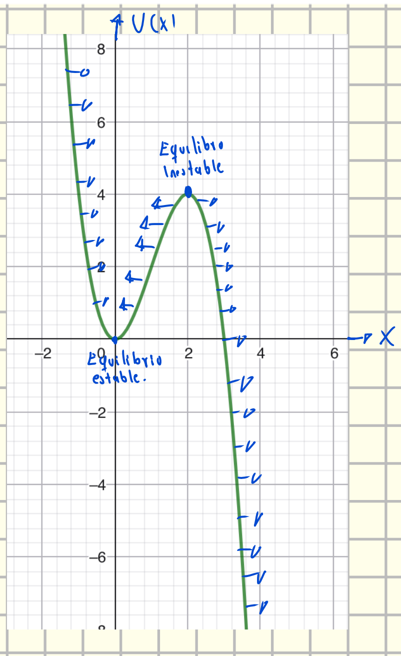
a) Grafique $Ep(x)$.

b) Determine la dirección de la fuerza en rangos apropiados de la variable x.

c) Discuta los posibles movimientos de la partícula para diferentes valores de su energía total y halle sus posiciones de equilibrio (estable e inestable).

R: b) *derecha* $(x < 0)$, *izquierda* $(0 < x < 2)$, *derecha* $(x > 2)$, c) $EE: x = 0, EI: x = 2$

(a)



(b) $\nabla U = -F$

$F = -\frac{\partial U}{\partial x}$

$F = 3x^2 - 6x$ [N]

$3x^2 - 6x = 0$

$x_1 = 0$

$3x - 6 = 0$

$x_2 = 2$

Si $x < 0$

$F(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1)$

$F(-1) = 9$ N

Si $0 < x < 2$

$F(1) = 3 - 6 = -3$

Si $x > 2$

$F(3) = 27 - 18 = 9$

$\therefore$ derecha (+) $(x < 0 \wedge x > 2)$

izquierda (−) $(0 < x < 2)$

(c) Equilibrio: Estable: $x = 0$

Inestable: $x = 2$

OBS, Los puntos de equilibrio son cuando $F = 0$.

6) Una única fuerza conservativa $F(x)$ actúa sobre una partícula de masa $m = 2$ kg que se mueve sobre el eje x. La energía potencial asociada a dicha fuerza está dada por: $U(x) = -4xe^{-x/4}$ J. En $x = 5$ m, la partícula tiene una energía cinética de 2 J. a) Determine la aceleración de la partícula en $x = 5$ m. b) Halle los valores finitos de x para los cuales $F(x) = 0$. c) Determine si para las condiciones dadas la partícula se encuentra atrapada, y determine la región sobre el eje x en la que la partícula puede moverse. R: a) $-0{,}14\,\vec{\imath}$ m/s^2, b) $x = 4$ m, c) $Si, entre$: $x = 1.28$ m y $x = 9.12$ m

(a) $U(x) = -4xe^{-x/4}$ [J]

$$F = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\left(-4e^{-x/4} + \frac{4x}{4}e^{-x/4}\right)$$

$$F(x) = 4e^{-x/4} - xe^{-x/4} = m \cdot a(x)$$

$$\Rightarrow a(x) = \frac{F(x)}{m} = 2e^{-x/4} - \frac{x}{2}e^{-x/4}$$

$$a(x) = e^{-x/4}\left(2 - \frac{x}{2}\right)$$

$$a(5) = -0.14 \text{ m/s}^2 \;//$$

(b) $e^{-x/4}(4-x) = 0$

$$\frac{4-x}{e^{x/4}} = 0$$

$$\Rightarrow 4 - x = 0$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ m} \;//$$

(c) En 5

$E = 2 - 5.73 = -3.73$ J

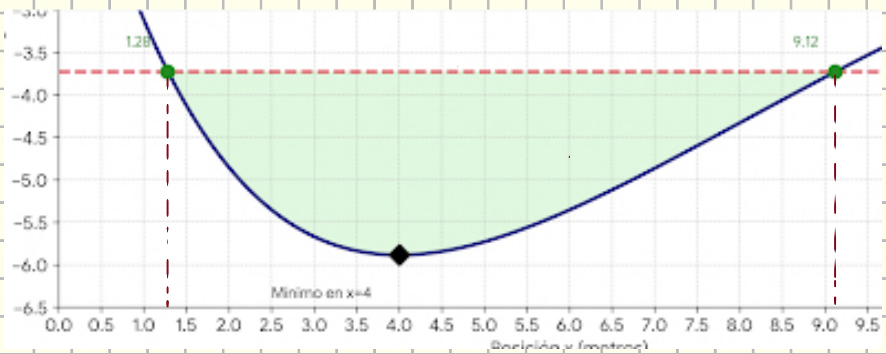
Cuando $E \geq U$ la partícula no esta atrapada

$$-3.73 \geq -4xe^{-x/4}$$

$$4xe^{-x/4} \geq 3.73$$

$$xe^{-x/4} \geq 0.93$$

OBS, Es una ecuación trascendente, no se puede despejar de forma algebraica simplemente, por tanto a partir de la gráfica se tomará una aproximación



Esta entre $x = 1.28$ m y $x = 9.12$ m

7) Dada la función de energía potencial $U(x) = -U_0 e^{-x^2/a^2}$, realice una gráfica de U vs. x y obtenga analíticamente la expresión para $F(x)$. Si se conoce que una cierta partícula de masa m se mueve bajo la acción de dicha fuerza, y que invierte su movimiento cuando $x^2 = a$, halle el valor de la rapidez v_0 de dicha partícula cuando pasa por el punto $x = 0$.

R: $F(x) = -\frac{2x}{a^2}U_o e^{-x^2/a^2}, v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}U_0(1 - e^{-\frac{1}{a}})}$

(a) $$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = U_0 \cdot -\frac{2x}{a^2} \cdot e^{-x^2/a^2}$$

$$F = -\frac{2x}{a^2} U_0 e^{-x^2/a^2} \;//$$

(b) En $x = \sqrt{a}$; $v = 0$

$$E = -U_0 e^{-a/a^2} = -U_0 e^{-1/a}$$

En $x = 0$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - U_0$$

Igualamos: $\frac{1}{2}mv^2 - U_0 = -U_0 e^{-1/a}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(U_0 - U_0 e^{-1/a}\right)} \text{ m/s}$$

(b) Otra forma

$$a(x) = -\frac{2x}{ma^2} V_0 e^{-x^2/a^2}$$

$$v\,dv = a\,dx$$

$$v\,dv = -\frac{2x}{ma^2} V_0 e^{-x^2/a^2}$$

$$\int v\,dv = \int -\frac{2x}{ma^2} V_0 e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{2V_0}{ma^2} \int e^{-x^2/a^2} x\,dx$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{2V_0}{ma^2}\left(-\frac{a^2 e^{-x^2/a^2}}{2} + C_1'\right)$$

$$v^2(x) = \frac{2}{m} V_0 e^{-x^2/a^2} + C_1'$$

$$I = \int e^{-x^2/a^2} x\,dx$$

$$u = e^{-x^2/a^2}$$

$$\Rightarrow du = -\frac{2x}{a^2} \cdot e^{-x^2/a^2} dx$$

$$du = -\frac{2x}{a^2} \cdot u\,dx$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{a^2\,du}{2xu}$$

Remplazando

$$I = \int \cancel{u} \cdot \cancel{x} \cdot -\frac{a^2\,du}{2\cancel{x}\cancel{u}}$$

$$I = -\frac{a^2}{2} \cdot u + C_1$$

$$I = -\frac{a^2}{2} \cdot e^{-x^2/a^2} + C_1$$

$$v^2(\sqrt{a}) = 0 = \frac{2}{m} V_0 e^{-1/a}$$

$$\Rightarrow C_1' = -\frac{2}{m} V_0 e^{-1/a}$$

$$v^2(x) = \frac{2}{m} V_0 e^{-x^2/a^2} - \frac{2}{m} V_0 e^{-1/a}$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m} V_0 \left(e^{-x^2/a^2} - e^{-1/a}\right)}$$

$$v(0) = \sqrt{\frac{2}{m} V_0 \left(1 - e^{-1/a}\right)} \;//$$

OBS: Nótese la gran utilidad de las leyes de conservación.

8) Dada la función de energía potencial $U(x) = -10e^{-x^2/4}$ J, a) realice una gráfica de U vs. x b) Obtenga analíticamente la expresión para $F(x)$. Si se conoce que una cierta partícula de masa $m = 3$ kg se mueve bajo la acción de dicha fuerza, y que invierte su movimiento cuando $x = 2$, c) halle el valor de la rapidez v_0 de dicha partícula cuando pasa por el punto $x = 0$. d) Para que valores de energía total E la partícula no se encuentra atrapada. e) Si la energía total de la partícula es $E = 2$ J, halle su rapidez máxima.

R: b) $F(x) = -5xe^{-\frac{x^2}{4}}$N, c) 2.05 m/s, d) $E > 0$, e) $v_{max} = 1.15$ m/s

(b) $U(x) = -10\, e^{-x^2/4}$

$$\Rightarrow F(x) = \cancel{10}^{5} \cdot -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{4}_2} \cdot e^{-x^2/4}$$

$$= -5x\,e^{-x^2/4} \;[N]$$

(c) en $x = 2$; $v = 0$

$$E_{x=2} = -10\,e^{-4/4} \approx -3.679 \;[J]$$

$$E_{x=0} = \frac{1}{2} 3 \cdot v^2 - 10 \;[J]$$

Igualamos:

$$\frac{3}{2} v^2 - 10 = -3.679$$

$$\Rightarrow v = 2.05 \;[m/s] \;//$$

(d) $E = K + U$

OBS: $U \in \mathbb{R}^-$

$K \in \mathbb{R}^+$

Si $K \geq -U \Rightarrow$ la partícula puede salir del pozo de potencial.

$$\Rightarrow E = K + U \geq 0 \;//$$

(e) $E = K + U \Rightarrow K = E - U$

$$K = 2 - (-10^{-x^2/4})$$

U es max cuando $F = 0 \Rightarrow x = 0$

$$K = 2 - (-10) = 12$$

$$3/2\; v_{max}^2 = 12$$

$$\Rightarrow v_{max} = 2.828 \;[m/s]$$

OBS: $v = 1.15$ es cuando $K = 2$ J

9) Una partícula de masa $m = 2$ kg se mueve en una dimensión bajo la acción de una fuerza neta asociada a la energía potencial $U(x) = x^3 - 6x^2 + 1$. a) Realice una gráfica de la energía potencial en función de la posición. b) Halle (de existir) los puntos de equilibrio estable e inestable. c) Si se conoce que en el punto $x = 2$ m, su rapidez es igual a 4 m/s, determine los puntos de retorno del movimiento (de existir). d) Cuando la partícula se encuentra en la posición $x = 3$ m, halle el valor de su aceleración, su rapidez, y la fuerza (indicando su dirección) que actúa sobre la partícula. Suponga que ahora la partícula tiene una energía total E (diferente a la del literal c) tal que llega justo hasta la posición $x = 7$ m. e) Obtenga el valor de E.

R: b) $EE\ x = 4$ m, $EI\ x = 0$, c) $x = 0, x = 6$ m, d) $a = 4.5$ m/s², $v = 3\sqrt{3}$ m/s, $F = 9$ N *hacia la derecha*, e) $E = 50$ J

(b) $F = -3x^2 + 12x$

$0 = -3x^2 + 12x$

$x_1 = 0$ [m]

$3x = 12$

$x_2 = 4$ [m]

$U(0) = 1$ J

$U(4) = -31$ J

OBS, $x = 0$ es un max
$x = 4$ es un min

∴ Punto de equilibrio

inestable: $x = 0$
estable: $x = 4$

(c) En $x = 2$

$K = \frac{1}{2} 2 \cdot 16 = 16$ J

$U = -15$ J

$E = 1$ J

La partícula retorna si

$K = 0 \Rightarrow U = 1$

$x^3 - 6x^2 + \cancel{1} = \cancel{1}$

$x_1 = 0$ [m] //

$x_2 = 6$ [m] //

(d) En $x = 3$

$F = 9$ [N]

$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m}$

$a = 9/2 = 4.5$ [m/s²] //

En $x = 3$

$E = v^2 - 26$

$v^2 - 26 = 1 \Rightarrow v^2 = 27$

$v = 3\sqrt{3}$ [m/s] //

(e) $x = 7$, $K = 0$

$E = U = 50$ [J] //

10) Calcule la energía potencial asociada con las siguientes fuerzas centrales, conservativas:

a) $F = Kr$ R: $-\frac{K}{2}r^2$

b) $F = K/r^2$ R: $\frac{K}{r}$

(a) $F = -\frac{\partial U}{\partial r}$

$\Rightarrow \partial U = -F \partial r = -K r\, \partial r$

$U = -K \frac{r^2}{2} + C_1$

Si $r = 0 \Rightarrow U = 0$

∴ $U = -K \frac{r^2}{2}$ //

(b) $F = \frac{K}{r^2}$

$F = -\frac{\partial U}{\partial r} \Rightarrow \partial U = -F \partial r = -K r^{-2}$

$U = K r^{-1} + C_1$

Si $r = \infty \Rightarrow U = 0$

$U = K r^{-1}$ //

11) Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza neta atractiva que varía con el inverso del cuadrado de r, es decir, $F = -k/r^2$. La trayectoria es una circunferencia de radio r. Demuestre que la energía total es $E = -k/2r$, que la rapidez es $(k/mr)^{1/2}$, y que el momento angular alrededor del centro de la circunferencia es $L = (mkr)^{1/2}$.

$F = -K/r^2 = -\frac{\partial U}{\partial r}$

$\Rightarrow \partial U = K r^{-2} \partial r$

$U = -K r^{-1}$

$\sum F_r = -F = m \cdot a_N$

$\frac{K}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$

$\frac{K}{2r} = m \frac{v^2}{2} = K$

$E = K + U = \frac{K}{2r} - \frac{K}{r} = -\frac{K}{2r}$ [J] //

$\Rightarrow \frac{K}{r} = m \cdot v^2$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{K}{mr}}$ [m/s]

$\therefore v = (K/mr)^{1/2}$ [m/s] //

$L = |r \times p|$

$L = m |r \times v|$

$L = m r \sqrt{\frac{K}{mr}}$

$\therefore L = (mrK)^{1/2}$ [Kg m²/s²] //

12) La energía potencial para la interacción entre 2 moléculas de gas puede aproximarse por la expresión: $E_p(r) = -E_{p,0}\left[2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}\right]$. Donde $E_{p,0}$ y r_0 son constantes positivas y r es la separación entre las moléculas. Halle la posición de equilibrio y el valor de la energía potencial en dicho punto.

R: a) r_o ,b) $-E_{p,0}$

$U(r) = -E_p \left[2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}\right]$

$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = 12\left[-r_0^6 \cdot r^{-7} + r_0^{12} \cdot r^{-13}\right]$

(a) Cuando $F=0$, $U(r)$ es max o min

$F = 0 = -r_0^6 r^{-7} + r_0^{12} \cdot r^{-13}$

$\Rightarrow r_0^6 r^{-7} = r_0^{12} r^{-13}$

$r_0^6 \cdot r^{13} = r_0^{12} \cdot r^7$

$r^6 = r_0^6 \Rightarrow r = r_0$ //

(b) $U(r_0) = -E_p$ //

13) La interacción entre dos nucleones puede ser representada con cierta aproximación por el potencial de Yukawa $Ep(r) = -Vo(r_0/r)e^{-r/r_0}$, donde Vo vale alrededor de 50 MeV y $r_0 = 1{,}5 \times 10^{-15}$ m. Halle la fuerza entre los dos nucleones como función de r. Halle el valor de la fuerza para $r = r_0$.

R: $-\frac{V_o e^{-\frac{r}{r_0}}}{r^2}(r_0 + r), -\frac{2V_0}{er_0}$

(a) $V(r) = -V_0 (r_0/r) e^{-r/r_0}$

$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial (V_0 (r_0/r) e^{-r/r_0})}{\partial r}$

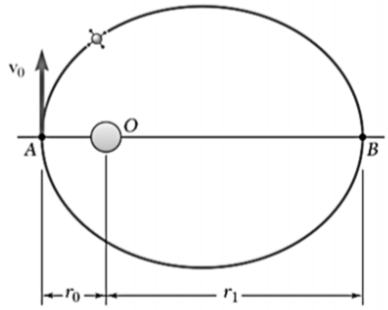
$= V_0 (-r_0 r^{-2} \cdot e^{-r/r_0} + r_0/r \cdot -1/r_0 \cdot e^{-r/r_0})$

$= -V_0 \left(\frac{r_0}{r^2} \cdot e^{-r/r_0} + \frac{1}{r} \cdot e^{-r/r_0} \right)$

$\therefore F = -V_0 \cdot \frac{e^{-r/r_0}}{r^2} (r_0 + r)$ //

(b) $F(r) = -\frac{2V_0}{er_0}$ //

14) Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de un planeta de masa M. Los valores mínimo y máximo de la distancia r desde el satélite hasta el centro del planeta son, respectivamente, r_0 y r_1. Utilice los principios de la conservación de la energía y la conservación de la cantidad de movimiento angular para obtener la relación: $\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$, donde h es la cantidad de movimiento angular por unidad de masa del satélite y G es la constante de gravitación.



$h = L/m = |r \times v|$

$L_0 = m v_0 \cdot r_0$

$L = m v_B \cdot r_1$

$v_0 \cdot r_0 = v_B \cdot r_1 = h$

$E_A = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GmM}{r_0}$

$E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{GmM}{r_1}$

Igualamos

$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 - \frac{G\cancel{m}M}{r_0} = \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 - \frac{G\cancel{m}M}{r_1}$

$\frac{v_0^2 \cdot r_0^2}{r_0^2} - \frac{v_B^2 \cdot r_1^2}{r_1^2} = 2GM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)$

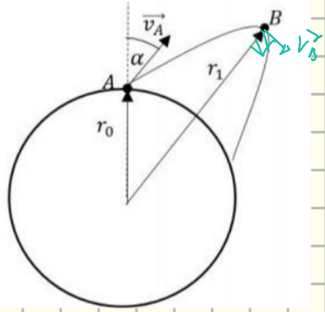
$h^2 \left(\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2 r_1^2} \right) = 2GM \left(\frac{r_1 - r_0}{r_0 r_1} \right)$

$\frac{\cancel{(r_1 - r_0)}(r_1 + r_0)}{r_0 r_1 \cancel{(r_1 - r_0)}} = \frac{2GM}{h^2}$

$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$

15) Un planeta esférico, sin atmósfera (no tome en cuenta la resistencia del aire) tiene masa m_0 y radio r_0. Un proyectil de masa m_1 se dispara desde un punto A en la superficie del planeta, con rapidez v_A y un ángulo $\alpha = 30°$ con respecto a la dirección radial. En su trayectoria, el proyectil alcanza una altura máxima en el punto B igual a $r_1 = \frac{5}{2} r_0$. Encuentre la velocidad inicial v_A en términos de G, m_0, r_0.

R: $\sqrt{\frac{5 m_0 G}{4 r_0}}$



$L_A = |r_0 \times p_0| = \frac{m \cdot v_A \cdot r_0}{2}$

$L_B = |r_1 \times p_B| = m \cdot V_B \cdot r_1$

$= m \cdot V_B \cdot \frac{5}{2} r_0$

Igualamos

$\frac{\cancel{m} V_A \cancel{r_0}}{\cancel{2}} = \frac{5}{\cancel{2}} \cancel{m} V_B \cdot \cancel{r_0} \Rightarrow V_B = \frac{V_A}{5}$

$E_A = \frac{1}{2} m V_A^2 - \frac{G m m_0}{r_0}$

$E_B = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{G m m_0}{r_1}$

$\frac{1}{2} \cancel{m} V_A^2 - \frac{G \cancel{m} m_0}{r_0} = \frac{1}{2} \cancel{m} V_B^2 - \frac{G \cancel{m} m_0}{5/2 r_0}$

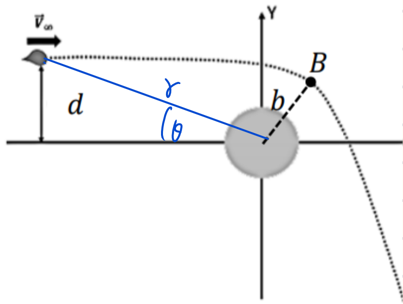
$\frac{24}{25} V_A^2 = \frac{2 G m_0}{r_0} - \frac{4}{5} \frac{G m_0}{r_0}$

$V_A^2 = \frac{6}{5} \cdot \frac{G m_0}{r_0} \cdot \frac{25}{24} = \frac{5}{4} \cdot \frac{G m_0}{r_0}$

$\Rightarrow V_A = \sqrt{\frac{5}{4} \cdot \frac{G m_0}{r_0}}$ //

16) Un cometa de masa m se aproxima a un planeta de masa M de tal manera que su velocidad a una distancia muy lejana es igual a $\vec{v_\infty} = v_0 \vec{\iota}$ como se muestra en la figura. La distancia inicial al planeta es suficientemente grande tal que la energía potencial es despreciable. Si se conoce que en el punto más cercano al planeta (punto B) la posición con respecto al centro del planeta y la velocidad v_B forman un ángulo de 90° , calcule: a) La razón entre la rapidez en dicho punto v_B y la distancia d. b) La distancia d en término del resto de variables.

R: a) $\frac{v_B}{d} = \frac{v_0}{b}$, b) $d = \sqrt{\frac{2bGM}{{v_0}^2} + b^2}$



(a) $L_0 = |r \times V| = r \cdot V_0 \cdot \operatorname{sen}(\theta)$

$\operatorname{sen}(\theta) = d/r$

$\Rightarrow L_0 = d V_0$

$L = |b \times V_B| = b V_B$

Igualamos.

$d V_0 = b V_B$

$\frac{V_B}{d} = \frac{V_0}{b}$ //

$V_B = V_0 \frac{d}{b}$

(b) $E_0 = \frac{1}{2} m V_0^2$

$E = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{G m M}{b}$

$\frac{1}{2} \cancel{m} V_0^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} V_B^2 - \frac{G \cancel{m} M}{b}$

$V_0^2 - V_0^2 \frac{d^2}{b^2} = - \frac{2 G M}{b}$

$V_0^2 \left(\frac{b^2 - d^2}{b^2} \right) = - \frac{2 G M}{b}$

$b^2 - d^2 = \frac{-2 G M b}{V_0^2}$

$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{2 G M b}{V_0^2} + b^2}$ //

17) Una nave especial es enviada a investigar un planeta esférico de masa $m_p = 1.898 \times 10^{24}$ kg y radio $r_p = 69911$ km. Mientras permanece a una distancia $5r_p$ del centro del planeta, la nave dispara un instrumento de medición con rapidez $v_0 = 2000$ km/h. El paquete tiene masa $m_i = 20$ kg mucho más pequeña que la masa de la nave. El paquete es lanzado con un ángulo θ con respecto a la dirección radial al planeta. ¿Cuál debe ser el valor de θ de manera que el paquete pase rozando (tangente) el planeta? R: 40.13°

$L_0 = 5r_p \times V_0 = m5r_p \cdot V_0 \cdot sen(\theta)$

$L_f = r_p \times V = m r_p \cdot V$

$E_0 = \frac{1}{2} V_0^2 \cdot m - \frac{G m M}{5r_p}$

$E = \frac{1}{2} V^2 \cdot m - \frac{G m M}{r_p}$

$\frac{1}{2} v_0^2 \cancel{m} - \frac{G \cancel{m} M}{5r_p} = \frac{1}{2} v^2 \cancel{m} - \frac{G \cancel{m} M}{r_p}$

$V^2 = V_0^2 + 2 \frac{GM}{r_p} \cdot \frac{4}{5}$

$V = 1790.99$ m/s

$> 5 \cancel{r_p} \cdot V_0 \cdot sen(\theta) = \cancel{r_p} \cdot V$

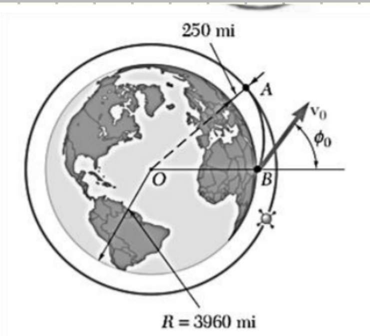
$sen(\theta) = \frac{V}{5V_0}$

$sen(\theta) = 0.645$

$\Rightarrow \theta = 40.143°$ //

de manera que el paquete pase rozando (tangente) el planeta? R: 40.13°

18) Un transbordador espacial se encontrará con una estación espacial que está en órbita a una altura de 250 millas sobre la superficie de la Tierra. El transbordador ha alcanzado una altura de 40 millas cuando su motor es desactivado en el punto B. Si se sabe que en ese momento la velocidad v_0 del transbordador forma un ángulo $\phi_0 = 55°$ con la vertical, determine la magnitud requerida de v_0 si la trayectoria del transbordador debe ser tangente en A a la órbita de la estación espacial. R: 3966.2 m/s



$E_B = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G m M}{r_B}$

$E_A = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m M}{r_A}$

$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 - \frac{G \cancel{m} M}{r_B} = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 - \frac{G \cancel{m} M}{r_A}$

$(1.285V)^2 - V^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$

$0.651V^2 = 6176663.012$

$V = 3080.25$ m/s

$L_B = |\vec{r}_B \times \vec{v}_0| = r_B \cdot V_0 \, sen(55°)$

$L_A = |\vec{r}_A \times \vec{v}| = r_A \cdot V$

Igualamos: $r_B \cdot V_0 \, sen(45°) = r_A \cdot V$

$\Rightarrow V_0 = \frac{r_A \cdot V}{r_B \, sen(55°)} = 1.285 V$

$V_0 = 3958.13$ m/s