MECÁNICA NEWTONIANA

2020 A

HOJA DE TRABAJO 9

TRABAJO Y ENERGÍA 1

PREGUNTAS

1. Un gato ha cazado un ratón y decide arrastrarle hasta la habitación para que la dueña de la casa pueda admirar su acción cuando despierte. Para arrastrar el ratón por la alfombra a velocidad constante de magnitud v el gato aplica una fuerza horizontal constante de 3 N. Si la fuerza del gato le permite realizar este trabajo con una potencia de 6 W, a) ¿cuál es su rapidez v? b) ¿qué trabajo W realiza el gato en 4 s?
   a) $v = 0$ m/s, $W = 1.5$ J
   b) $v = 2$ m/s, $W = 1.5$ J
   c) $v = 2$ m/s, $W = 24$ J
   d) $v = 18$ m/s, $W = 1.5$ J
   e) $v = 18$ m/s, $W = 24$ J

(a) $\vec{v} = cte$ $\quad$ $\int dP = \int \vec{F} \cdot d\vec{v}$

$\vec{F} = 3\hat{i}$ N $\quad$ $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$P = 6$ W $\quad$ $P = F \cdot v$

$\Rightarrow v = \frac{P}{F} = \frac{6W}{3N} = 2$ m/s //

(b) $P \cdot t = W = F v \cdot t$

$W = P \cdot t = 24$ J //

2. Dos veleros para hielo compiten en un lago horizontal sin fricción. Los veleros tienen masas m y $2m$, respectivamente; pero sus velas son idénticas, así que el viento ejerce la misma fuerza F constante sobre cada velero. Los 2 veleros parten del reposo y la meta está a una distancia s:
   a) el velero de masa m cruza la meta con mayor energía cinética que el velero de masa $2m$
   b) el velero de masa $2m$ cruza la meta con mayor energía cinética que el velero de masa m
   c) ambos veleros cruzan la meta con la misma energía cinética
   d) no existe suficiente información
   e) nada de lo anterior es correcto

$\Delta E_c = W$ $\quad$ Si $v_{10} = 0$ y $v_{20} = 0$

$W_1 = W_2$ $\quad$ $\Rightarrow E_{c10} = 0$ y $E_{c20} = 0$

$\Rightarrow \Delta E_{c1} = \Delta E_{c2}$ $\quad$ $\Rightarrow E_{c1} = E_{c2}$ //

3. Seleccione el enunciado correcto. Considere el sistema de referencia laboratorio (ligado a Tierra).
   a) El trabajo de una fuerza no conservativa para un cuerpo en movimiento es siempre igual a cero.
   b) El trabajo de una fuerza conservativa que actúa sobre un cuerpo es siempre igual al cambio en su energía cinética. –
   c) El trabajo de una fuerza no conservativa es siempre diferente de cero para toda trayectoria cerrada.
   d) El trabajo de una fuerza conservativa es siempre igual al negativo de la variación en la energía potencial asociada a dicha fuerza.
   e) Para cualquier trayectoria, el trabajo de una fuerza conservativa que actúa sobre un cuerpo es siempre diferente de cero.

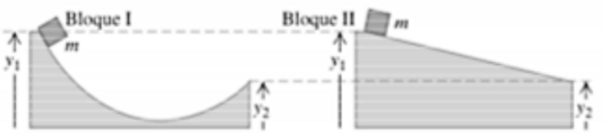
4. Una partícula se mueve bajo la acción de la fuerza $\vec{F} = (y^2\,\vec{\imath} + 2xy\,\vec{\jmath})$ N. El trabajo W realizado cuando la partícula se mueve desde el punto $(0, 0)$ m al punto $(2, 4)$ m siguiendo la trayectoria $y = 2x$, es:
   a) $W = 10$ J
   b) $W = 12$ J
   c) $W = 24$ J
   d) $W = 32$ J
   e) $W = 36$ J

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\quad$ $y = 2x$

$\quad$ $dy = 2dx$

$= \int_{(0,0)}^{(2,4)} y^2 dx + 2xy\,dy$ $\quad$ $\int_0^2 4x^2 + 8x^2 dx = \int_0^2 12x^2 dx = 4[x^3]_0^2 = 4 \cdot 8 = 32$ J

5. De la figura, los dos bloques parten del reposo y las superficies son lisas. Señale la opción correcta para la rapidez de los bloques al llegar al extremo de la plataforma:
   a) el bloque I tiene mayor rapidez x
   b) el bloque II tiene mayor rapidez x
   c) si el bloque I tuviera una masa mayor que el bloque II, el bloque I llegaría con una rapidez mayor. –
   d) si el bloque I tuviera una masa mayor que el bloque II, el bloque II llegaría con una rapidez mayor. x
   e) ambos bloques llegarían con la misma rapidez, independientemente de la relación de sus masas.



$E = cte$, $\quad h = y_1 - y_2$

$E_0 = U = mgh$

$E_f = \frac{1}{2} m v^2$ $\quad \Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \cancel{m} g h \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$ // (No depende de la masa ni trayectoria)

6. Se abandona un cuerpo de masa m, desde una altura h sobre un resorte vertical que se encuentra en su longitud natural. El cuerpo impacta en el resorte y logra comprimirlo una distancia d. Si se desprecia la resistencia del aire, desde que se abandona el cuerpo hasta que el resorte está en la máxima compresión, el trabajo de las fuerzas conservativas:
   a) es activo (positivo)
   b) es resistivo (negativo)
   c) es nulo
   d) primero es resistivo y luego activo
   e) no se puede determinar si es activo o resistivo

7. Una partícula se mueve bajo la acción de la fuerza $\vec{F} = y^2\vec{\imath} + (2xy + y^3)\vec{\jmath}$ N. El trabajo W realizado cuando la partícula se mueve desde el punto $(0,0)$ m, al punto $(2,4)$ m, siguiendo la trayectoria $y = 2x$, es:
   a) $W = 12$ J
   b) $W = 70$ J
   c) $W = 96$ J
   d) $W = 98$ J
   e) $W = 108$ J

$W = \int y^2\,dx + (2xy + y^3)\,dy$

$= \int 4x^2\,dx + (4x^2 + 8x^3)\,2\,dx$

$= \int (4x^2\,dx + 8x^2 + 16x^3)\,dx$

$= \int (12x^2 + 16x^3)\,dx$

$= [4x^3 + 4x^4]_0^2$

$= 96$ J

8. Sobre la plataforma de un camión está una carga de 80 kg. El camión parte del reposo acelera uniformemente y alcanza una rapidez de 20 m/s en una distancia de 50 m a lo largo de una carretera recta horizontal. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la plataforma y la carga son respectivamente 0.3 y 0.20, la fuerza de rozamiento que actúa sobre la carga ____________ y realiza un trabajo ____________, respecto a Tierra.
   a) es estática – activo (positivo)
   b) es cinética – activo
   c) es estática – resistivo (negativo)
   d) es cinética – resistivo
   e) no se puede determinar – que no se puede determinar

$V_0 = 0$
$V = 20$
$d = 50$
$v^2 = \cancel{v_0^2} + 2ad$
$a = \frac{20^2}{2d} = 4\,m/s^2$

$f_r = m \cdot a = \mu \cdot N$
$\Rightarrow a = \frac{\mu \cdot \cancel{m} g}{\cancel{m}}$
$a = 2.94\,m/s^2$
como $4 > 2.94$
la carga se mueve

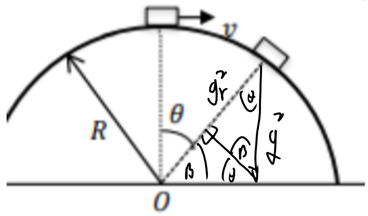
$W = \int f\,dr$
$\longrightarrow \vec{f_r}$
$\longrightarrow \vec{dr}$
respecto a la tierra
$\Rightarrow W = +$
$\Rightarrow$ Activo

9. A un pequeño bloque de masa m se le imprime una velocidad horizontal de magnitud $v = \sqrt{\frac{1}{4}gR}$ en la parte superior del montículo semiesférico liso de la figura. El coseno del ángulo θ al cual el bloque se separa del montículo es:
   a) 2/3
   b) 3/4
   c) 1/8
   d) 1/2
   e) 1/4

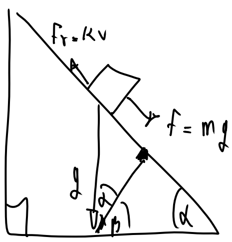
$E_0 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{4} gR + mgR = \frac{1}{8} mgR + mgR = \frac{9}{8} mgR$

$N = 0$
$\Sigma F_N = P_r = g\cos(\theta)\,\cancel{m} = \cancel{m} a_N$
$\frac{v^2}{R} = g\cos(\theta)$
$\Rightarrow v = \sqrt{gR\cos(\theta)}$

$E_f = \frac{1}{2} m\, gR\cos(\theta) + mgR\cos(\theta)$
$E_f = \frac{3}{2} mgR\cos(\theta)$
$E_0 = E_f$
$\frac{9}{8} \cancel{mg}R = \frac{3}{2} \cancel{mg}R\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 41.41°$ //



10. Un trineo que parte desde el reposo se desliza por un plano inclinado con un ángulo α, entre el plano inclinado y el trineo no existe fricción. El trineo experimenta un frenado por el aire proporcional a la velocidad instantánea. Cuánto trabajo resistivo realiza esta fuerza por unidad de tiempo después de que el trineo alcanza su velocidad máxima.
   a) $\frac{m^2 g sen(\alpha)}{k}\left[e^{-kt/m} + gsen(\alpha)\right]$
   b) $\frac{m^2 g^2 sen^2(\alpha)}{k}\left[e^{-kt/m} - gsen(\alpha)\right]$
   c) $\frac{m^2 g^2 sen(\alpha)}{k}$
   d) $\frac{m^2 g^2 sen^2(\alpha)}{k}$
   e) *cero*



$\Sigma f = f - f_r = m \cdot a$
Cuando v es max $\Rightarrow a = 0$
$\Rightarrow f - f_r = 0$
$\Rightarrow f = f_r$
$mg\,sen(\alpha) = Kv$
$\Rightarrow v = \frac{mg\,sen(\alpha)}{K}$

$P = cte$
cuando v es max dado que $a = 0$
$P = F\,v$
$= K v_{max}\, v_{max}$
$= K v_{max}^2$
$= \frac{m^2 g^2 sen^2(\alpha)}{K}$ //

Otra forma

$dE = W^{\circ}$
$E = \frac{1}{2} m v^2 + mgh$

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m\, 2v \cdot \dot{v} + mg\dot{h}$
$\frac{dE}{dt} = m v \dot{v} + mg\dot{h}$

Como V es max $\Rightarrow \dot{v} = 0$
$\dot{h} = v_y = -V_{max}\,sen(\alpha)$
$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = -mg V_{max}\,sen(\alpha)$

Remplazamos V_{max}
$\frac{dE}{dt} = -mg\,sen(\alpha) \cdot \frac{mg\,sen(\alpha)}{K}$
$\frac{dE}{dt} = \frac{W^{\circ}}{dt} = P^{\circ} = -\frac{m^2 g^2 sen^2(\alpha)}{K}$ //

PROBLEMAS

1) Determine el trabajo efectuado por un hombre que arrastra un saco de harina de 65 kg por 10 m a lo largo del piso con una fuerza constante de 245 N y que luego lo levanta hasta un camión de 75 cm de altura. ¿Cuál es la potencia promedio desarrollada si el proceso entero tomó 2 minutos?

R: 2927.75 J $P = 24.4$ W

$$W = \int_0^{10} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad \vec{F} = 245\,\hat{i}\ N \quad ; \quad \vec{d} = 10\,\hat{i}\ m$$

Como $\vec{F} = ctc$; $W_1 = 245 \cdot 10 = 2450\ J$

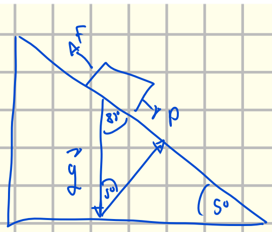
$W_2 = P \cdot h = 637 \cdot 0.75 = 477.75\ J$

$W_T = 2927.75\ J$ //

$$\langle P \rangle = \frac{W_T}{\Delta t} = \frac{2927.75\ J}{120\ s} \approx 24,40\ W \quad //$$

2) Un auto cuya masa es de 1200 kg sube por una colina de 5° de inclinación con velocidad constante de 36 km/h. Calcule el trabajo efectuado por el motor en 5 minutos y la potencia desarrollada por él. Desprecie cualquier tipo de pérdidas.

R:3074.85 kJ, $P = 10.25$ kW



$\sum F = 0$

$\Rightarrow F - P = 0$

$F = P = mg\,sen(5°)$

$F = 1024,95\ N$

$W = F \cdot v \cdot t$

$W = 1024,95 \cdot 10 \cdot 5(60)$

$W = 3074.85\ kJ$ //

$P = Fv$

$P = 1024.95 \cdot 10$

$P = 10.25\ kW$ //

3) Una fuerza neta horizontal $F = 6t$ N actúa sobre una partícula de 2 kg de masa. Si la partícula parte del reposo, halle el trabajo efectuado por la fuerza durante los primeros 2 s.

R:36 J

$$W = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^x F\,dx \quad ; \quad F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{6t}{2} = 3t.$$

$\Rightarrow v(t) = \frac{3}{2}t^2 + C_1 \quad (C_1 \to 0)$

$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}t^2$

$\Rightarrow dx = \frac{3}{2}t^2\,dt$

$$W = \int_0^2 6t \cdot \frac{3}{2}t^2\,dt$$

$$= 9\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 = 36\ J \quad //$$

4) Una fuerza neta constante de 60 N actúa por 12 s en un cuerpo cuya masa es de 10 kg. El cuerpo tiene una velocidad inicial de 60 m/s en la misma dirección de la fuerza. Calcule: a) El trabajo efectuado por la fuerza. b) La energía cinética final. c) La potencia desarrollada y d) El aumento de la energía cinética.

R: $a)$ 69120 J, b) 87120 J, c) 5760 W, d) 69120 J

(a) $F = 60\ N = ctc$

$m = 10\ kg$

$v_0 = 60\ m/s$

$F = m \cdot a$

$\Rightarrow a = \frac{60}{10}\ m/s = 6\ m/s^2 \Rightarrow dv = 6\,dt$

$v = 6t + 60 \Rightarrow dx = (6t + 60)\,dt$

$$W = \int_0^x F\,dx = 60\int_0^{12}(6t+60)\,dt = 60\left[3t^2+60t\right]_0^{12} = 69120\ J$$

(b) $\Delta E_c = W \Rightarrow E_c = W + E_{c0}$

$$E_c = 69120\ J + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot (60)^2 = 87120\ J$$

(c) $P = \frac{dW}{dt} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{69120\ J}{12\ s} = 5760\ W$

(d) $\Delta E_c = W$

$\Rightarrow \Delta E_c = 69120\ J$

5) Un auto de peso W se mueve sobre una carretera recta horizontal durante un cierto intervalo de tiempo. Si el auto cambio su velocidad de v_1 a v_2 mientras está sometido a una potencia útil P constante, determine la distancia S recorrida. R: $\frac{W}{3Pg}(v_2{}^3 - v_1{}^3)$

$W = mg \Rightarrow m = \frac{W}{g}$

$P = cte = Fv = m\cdot a\cdot v$

$a\,dx = v\,dv \Rightarrow a = \frac{v\,dv}{dx}$

$P = m\cdot v\frac{dv}{dx}\cdot v = mv^2\frac{dv}{dx}$

Despejo $dx = ds$

$dx = \frac{mv^2\,dv}{P}$

$x = \frac{m}{3P}\left[v^3\right]_{v_1}^{v_2}$

$x = \frac{m}{3P}(v_2^3 - v_1^3)$

6) Las pruebas realizadas en un túnel aerodinámico vertical, de la resistencia para una esfera en una corriente de aire dan, para velocidades pequeñas, la relación $F_R = -kv^2$. Si la esfera tiene una masa m y se abandona desde el reposo, a) determine la velocidad de la esfera al cabo de moverse h metros en el túnel. b) Halle la velocidad límite de la esfera, c) el trabajo por unidad de tiempo que realiza la fuerza de resistencia del aire después de haber alcanzado la velocidad límite.

R:a) $\sqrt{\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}h})}$, b) $\sqrt{\frac{mg}{k}}$, c) $mg\sqrt{\frac{mg}{k}}$

(a) $\Sigma F_y = P - F_r = m\cdot a$

$mg - Kv^2 = m\cdot a$

$a = \frac{v\,dv}{dy}$

Remplazando

$mg - Kv^2 = \frac{v\,dv}{dy}\cdot m$

Despejo dy

$dy = \frac{v\,dv\cdot m}{mg - Kv^2}$

Sea $u = mg - Kv^2$

$\Rightarrow du = -2Kv\,dv$

$\Rightarrow dv = -\frac{du}{2Kv}$

Remplazando

$dy = \frac{1}{u}\cdot \cancel{v}\cdot -\frac{du}{2K\cancel{v}}\cdot m$

$dy = \frac{du}{u}\cdot -\frac{m}{2K}$

Integramos

$y = -\frac{m}{2K}\left[\ln(u)\right]_{v_0}^{v_f}$

$y(v) = -\frac{m}{2K}\left[\ln(mg - Kv^2)\right]_0^v$

$y(v) = -\frac{m}{2K}\ln\left(\frac{mg - Kv^2}{mg}\right)$

$\ln\left(1 - \frac{Kv^2}{mg}\right) = -\frac{2yK}{m}$

$1 - \frac{Kv^2}{mg} = e^{-\frac{2K}{m}y}$

Despejo v:

$$\frac{Kv^2}{mg} = 1 - e^{-\frac{2K}{m}y}$$

$$v(y) = \sqrt{mg\left(1 - e^{-\frac{2K}{m}y}\right)} \;//$$

$$v(h) = \sqrt{mg\left(1 - e^{-\frac{2K}{m}h}\right)} \;//$$

(b) $\Sigma F_y: P - F_r = 0$

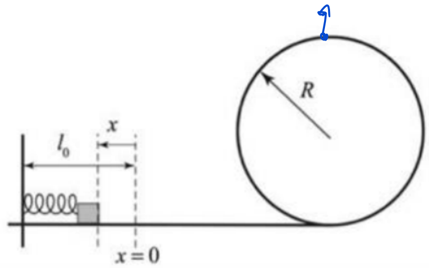
$P = F_r$

$mg = Kv_L^2 \Rightarrow v_L = \sqrt{\frac{mg}{K}}$ //

(c) $P = F \cdot v$

$P = mg\sqrt{\frac{mg}{K}}$ //

7) Un pequeño bloque de masa m comprime un resorte de constante elástica k una distancia x desconocida como se muestra en la figura. Cuando se libera, el bloque se desliza sobre una superficie horizontal lisa y luego a lo largo de de una pista circular lisa de radio R. Si se conoce que en el punto más alto de la pista la fuerza normal que ejerce la pista sobre el bloque es igual a dos veces su peso: a) Halle la rapidez del bloque en el punto más alto. b) Determine el valor de x.



R:a) $v = \sqrt{3gR}$, b) $\sqrt{\frac{7mgR}{k}}$

(a) $N = 2P = 2mg$

$\Sigma F_r = N - P = m \cdot a_N$

$2mg + mg = m \cdot a_N$

$3g = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{3gR}$ //

(b) $E_0 = U = \frac{1}{2}Kx^2$

$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgR$

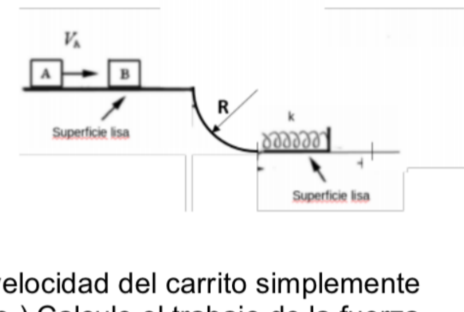
Igualamos:

$\frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgR$

$Kx^2 = 3mgR + 4mgR$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{7mgR}{K}}$ //

8) El carrito A de masa m_A se mueve horizontalmente sobre una superficie lisa con rapidez v_A. Al encontrarse con el carrito B que se encuentra inicialmente en reposo, colisiona de tal manera que luego de la colisión el carrito A permanece en reposo. Después de la colisión, el carrito B entra a una superficie lisa en forma de cuarto de círculo de radio R desde el punto P hasta el punto Q. Durante el tiempo que viaja sobre el cuarto de círculo, enciende sus motores que producen una fuerza tangencial T de módulo $b\,s$, donde b es una constante positiva y s es la distancia recorrida. Inmediatamente después de salir del cuarto de círculo, el carrito B apaga sus motores y colisiona con un resorte de constante elástica igual a k como se muestra en la figura.



(Nota: considere que, al ingresar a la sección de cuarto de círculo, la velocidad del carrito simplemente cambia de dirección para seguir por la pista, pero no cambia de módulo.) Calcule el trabajo de la fuerza de los motores T durante el viaje del carrito en la sección curva y b) Calcule la distancia D que se comprime el resorte cuando el bloque B queda en reposo si se conoce que $m_A = 2m_B$ y $v_A = \sqrt{gR}$.

R:a) $W_T = \frac{b\pi^2R^2}{8}$ b) $\sqrt{\frac{b\pi^2R^2}{4k} + \frac{6m_BgR}{k}}$

(a) $s = \frac{\pi}{2} R$

$$W^{*} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}R} b\, s\, ds = b\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}R}$$

$$W^{*} = \frac{b\pi^2 R^2}{8} \;//$$

(b) $\Delta \vec{p} = 0$

$m v_B - 2m\sqrt{gR} = 0$

$v_B = 2\sqrt{gR}$

$E_0 = \frac{1}{2} m\, 4gR + mgR$

$E_0 = 3\, mgR$

$\Delta E = W^{*}$

$E_f - E_0 = W^{*}$

$E_f = \frac{1}{2} k D^2$

$E_f = W^{*} + E_0$

$$\frac{1}{2} k D^2 = \frac{b\pi^2 R^2}{8} + 3mgR$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{b\pi^2 R^2}{4k} + \frac{6mgR}{k}} \;//$$

9) Una masa de 10 kg se mueve bajo la acción de la fuerza neta $\vec{F} = (5t)\,\vec{\imath} + (3t^2 - 1)\vec{\jmath}$ N. Cuando $t = 0$ el cuerpo está en reposo en el origen. a) Halle el momentum y la energía cinética del cuerpo cuanto $t = 10$ s. b) Calcule el impulso y el trabajo efectuado por la fuerza de $t = 0$ a $t = 10$ s y compare con el resultado en el literal a). R: a) $250\,\vec{\imath} + 990\,\vec{\jmath}$ kgm/s, b) 52130 J

(a) $m = 10$ kg

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$$\vec{p} = \int_0^{10} \vec{F}\, dt$$

$$\vec{p} = \int_0^{10} (5t\,\vec{i} + (3t^2 - 1)\vec{j})\, dt$$

$$\vec{p} = \left[\frac{5t^2}{2}\vec{i} + (t^3 - t)\vec{j}\right]_0^{10}$$

$\vec{p} = 250\,\vec{i} + 990\,\vec{j}$ kg m/s //

$E_c = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (102.11)^2$

$E_c = 52130$ J //

(b) $\vec{I} = \int_0^{10} \vec{F}\, dt = 250\,\vec{i} + 990\,\vec{j}$ kg m/s

$W = \Delta E_c = E_c - \cancel{E_{c_0}}$

$W = 52130$ J //

10) Una partícula se mueve bajo la acción de la fuerza $\vec{F} = y^2\,\vec{\imath} + 3x^2y\,\vec{\jmath}$ N. Calcule el trabajo W realizado cuando la partícula se mueve desde el punto $(0,0)$m al punto $(2,4)$m siguiendo la trayectoria $y = 2x$.

R: 58.67 J

$$W = \int_{(0,0)}^{(2;4)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int y^2\,dx + 3x^2y\,dy = \int_0^2 4x^2\,dx + 3x^2(2x)(2dx)$$

$$= \int_0^2 4x^2 + 12x^3\,dx = \left[\frac{4}{3}x^3 + 3x^4\right]_0^2 = 58.67\text{ J}$$

11) Sobre una partícula actúa la fuerza $\vec{F} = (y^2 - x^2)\,\vec{\imath} + (3xy)\vec{\jmath}$ N. Halle el trabajo efectuado por la fuerza al mover la partícula del punto $(0,0)$ m al punto $(2,4)$ m siguiendo las siguientes trayectorias: a) A lo largo del eje x desde $(0,0)$ m hasta $(2,0)$ m y, paralelamente al eje y hasta $(2,4)$ m. b) A lo largo de la recta que une ambos puntos. c) A lo largo de la parábola $y = x^2$ y d) ¿Es conservativa esta fuerza?

R: a) 45.33 J, b) 40 J, c) 42.13 J, d) No

(a) $W_1 = \int_0^2 -x^2\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{8}{3}$ J

$W_2 = \int_0^4 6y\,dy = \left[3y^2\right]_0^4 = 48$ J

$\Rightarrow W_T = 45.3\hat{3}$ J

(b) $2x = y \Rightarrow 2dx = dy$

$$W = \int_0^2 (4x^2 - x^2)\,dx + 12x^2\,dx = \int_0^2 15x^2\,dx = 5\left[x^3\right]_0^2 = 40\text{ J}$$

(c) $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$

$$W = \int_0^2 (x^4 - x^2)\,dx + 6x^4\,dx = \int_0^2 (7x^4 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{7}{5}\left[x^5\right]_0^2 - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2 = 42.13\text{ J}$$

(d) No es conservativa, nótese que por cada trayectoria recorrida realizó un trabajo distinto, el trabajo de un fuerza conservativa no depende de la trayectoria

12) Determine el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F} = (6xy - y,\ 3x^2 - x - 1)$ N, al trasladar un cuerpo del punto (0,1) m al punto (2,3) m siguiendo la trayectoria $y = x^2 - x + 1$.

R: 28 J

$dy = 2x\,dx - dx = dx\,(2x - 1)$

$$W = \int_0^2 \left[6x(x^2 - x + 1) - x^2 + x - 1\right] dx + (3x^2 - x - 1)(2x - 1)\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[6x^3 - 6x^2 + 6x - x^2 + x - \cancel{1} + 6x^3 - 3x^2 - 2x^2 + x - 2x + \cancel{1}\right] dx$$

$$= \int_0^2 (12x^3 - 12x^2 + 6x)\,dx = \left[3x^4 - 4x^3 + 3x^2\right]_0^2 = 28\text{ J}$$

13) Verifique que el campo de fuerza $\vec{F} = (x^2 + yz)\vec{\imath} + (y^2 + xz)\vec{\jmath} + (z^2 + xy)\vec{k}$ N es conservativo y determine el trabajo realizado por la fuerza al mover una partícula desde el punto $A = (1,2,-1)$ m hasta el punto $B = (-1,0,2)$ m, considerando: a) un camino en línea recta que une a los dos puntos, b) usando la función de energía potencial. R: 5/3 J

Si $\nabla \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}$ es conservativo.

$\Rightarrow \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial z}$; $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$; $\dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x}$

$\dfrac{\partial F_z}{\partial y} = x$; $\dfrac{\partial F_y}{\partial z} = x$; $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = z$; $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} = z$; $\dfrac{\partial F_x}{\partial z} = y$; $\dfrac{\partial F_z}{\partial x} = y$

$\therefore$ Si es conservativo

(a) $\vec{B} - \vec{A} = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

$x(t) = 1 - 2t \Rightarrow dx = -2dt$

$y(t) = 2 - 2t \Rightarrow dy = -2dt$

$z(t) = -1 + 3t \Rightarrow dz = 3dt.$

$W = \int_0^1 (47t^2 - 38t + 5)dt = \dfrac{5}{3}$ J

(b) $\int F_x dx = \int (x^2 + yz)dx = \dfrac{x^3}{3} + xyz + C_1(y;z)$

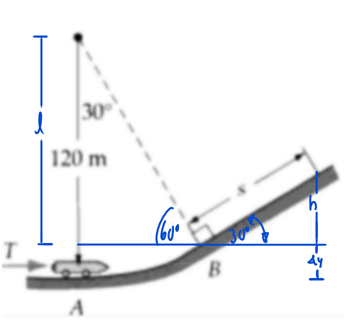
$\int F_y dy = \int (y^2 + xz)dy = \dfrac{y^3}{3} + xyz + C_2(x;z)$

$\int F_z dz = \int (z^2 + xy)dz = \dfrac{z^3}{3} + xyz + C_3(x,y)$

$\phi(x;y;z) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{z^3}{3} + xyz = -U_{física}$

$\phi(B) - \phi(A) = \dfrac{(-1)^3}{3} + \cancel{\dfrac{2^3}{3}} - \cancel{\dfrac{1}{3}} - \cancel{\dfrac{2^3}{3}} + \cancel{\dfrac{1}{3}} + 2 = \dfrac{5}{3}$ J

14) Un vehículo de prueba pequeño, propulsado por un cohete, con una masa de 100 kg, parte del reposo en A y avanza sin rozamiento a lo largo de la pista en el plano vertical según se indica. Si el cohete propulsor ejerce un empuje tangencial constante T de 1.5 kN desde A hasta B (tome en cuenta que entre A y B el vehículo se mueve sobre un arco de circunferencia). En B el cohete se apaga. Halle la distancia s que alcanza el vehículo hasta detenerse. La pérdida de masa por la expulsión de los gases es pequeña y se puede despreciar. R: 160.2 m



$\overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{6} \cdot 120\text{ m} = 20\pi$ m

$W^T = \int_0^{20\pi} F\, dr = 1500\text{ N} \cdot 20\pi = 30\,000\pi$ J

$E_B - E_A = W^T$ Obs. $E_A = 0$

$E_B = E_C$

$E_C - E_A = W^T$

$E_c = W^{g}$

$mg\,(h + \Delta y) = W^{g}$

$\Rightarrow h + \Delta y = \dfrac{W^{g}}{mg} = 96.17\ [m]$

$\Rightarrow h = 96.17\ [m] - \Delta y$

$\cos(30°) = l/120$

$\Rightarrow l = 60\sqrt{3}\ m \approx 103.92$

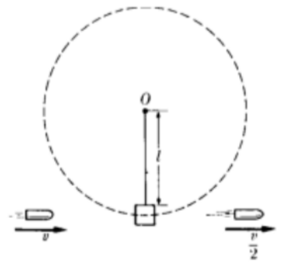
$\Delta y = 120 - 60\sqrt{3} \approx 16.08\ m$

$\Rightarrow h = 80.09\ m$

$sen(30°) = h/s \Rightarrow s = \dfrac{h}{sen(30°)} = 160.18\ [m]$ //

15) Una bala de masa m y velocidad v pasa a través de la esfera de un péndulo de masa M saliendo con una velocidad de $v/2$ como se muestra en la figura. La esfera pendular cuelga del extremo de la cuerda de longitud l. ¿Cuál es el menor valor de v para el cual el péndulo completará una circunferencia entera?

R: $^{M}/_{m}\sqrt{20\,lg}$



$Mv' + m\dfrac{v}{2} = mv$

$\Rightarrow Mv' = \dfrac{mv}{2}$

$\Rightarrow v = \dfrac{2Mv'}{m}$

$v' = \dfrac{mv}{2M}$

$E_0 = \dfrac{1}{2} m v'^2$

$E = \dfrac{1}{2} m v_{min}^2 + 2mgl$

$\dfrac{1}{2}\cancel{m} v'^2 = \dfrac{1}{2}\cancel{m} v_{min}^2 + 2\cancel{m}gl$

$v'^2 = gl + 4gl = 5gl$

$\Rightarrow v' = \sqrt{5gl}$

OBS: $v_{min} = \sqrt{gl}$

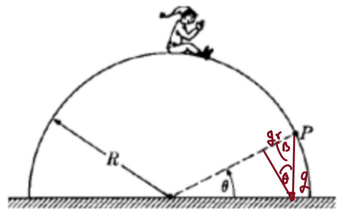
$\Sigma F_r = T + P = m \cdot a_N$

Si $T = 0$

$\cancel{m}g = \cancel{m} \cdot \dfrac{v^2}{l} \Rightarrow v = \sqrt{gl}$ //

$v = 2\dfrac{M}{m}\sqrt{5gl} = \dfrac{M}{m}\sqrt{20gl}$ //

16) Un muchacho de masa m está sentado sobre un montículo esférico de nieve como se muestra en la figura. Si empieza a resbalar desde el reposo (suponiendo que el hielo es perfectamente liso) ¿en qué punto P deja el muchacho de tener contacto con el hielo? R:41.81°



$N = 0$

$\Sigma F_r = P = m \cdot a_N$

$\cancel{m} \cdot g\,sen(\theta) = \cancel{m} \cdot a_N$

$\dfrac{v^2}{R} = g\,sen(\theta)$

$\Rightarrow v = \sqrt{gR\,sen(\theta)}$

$E_0 = mgR$

$E_p = \dfrac{1}{2} m \cdot gR\,sen(\theta) + mgR\,sen(\theta)$

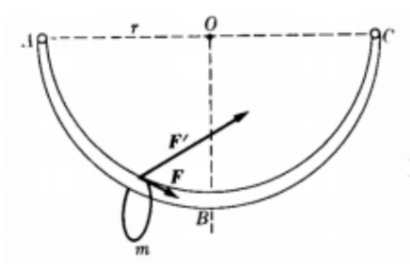
$E_p = \dfrac{3}{2} mgR\,sen(\theta)$

$mgR = \dfrac{3}{2} mgR\,sen(\theta)$

$\Rightarrow sen(\theta) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \theta = 41.81°$ //

17) Un anillo de masa m resbala a lo largo de un arco metálico ABC muy pulido que es arco de una circunferencia de 4 pies de radio. Sobre el anillo actúan dos fuerzas F y F', cuyas magnitudes constantes son 40 N y 150 N respectivamente. La fuerza F es siempre tangente a la circunferencia. La fuerza F' actúa en dirección constante formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcule el trabajo total efectuado por el sistema de fuerzas sobre el anillo al moverse de a) A a B y de b) A a C.

R: a) 143.6 J, b) 469.9 J



(a) $r = 4\,ft = 1.22\,m$

$W_F = 40\,N \cdot 1.22\,m \cdot \frac{\pi}{2}$

$W_F = 76.65\,J$

$\vec{F'} = 75\sqrt{3}\,\hat{i} + 75\,\hat{j}\ N$

$\Delta\vec{r} = \vec{B} - \vec{A} = 1.22\,\hat{i} - 1.22\,\hat{j}\ [m]$

$W_{F'} = \vec{F'} \cdot \Delta\vec{r}$

$= 75\sqrt{3} \cdot 1.22 - 75 \cdot 1.22$

$= 66.98\,J$

$W^o = W_F + W_{F'} = 143.63\,J$

(b) $W_F = 40\,N \cdot 1.22 \cdot \pi = 153.31\,J$

$W_{F'} = \vec{F'} \cdot \Delta\vec{r}$

$\Delta\vec{r} = \vec{C} - \vec{A}$

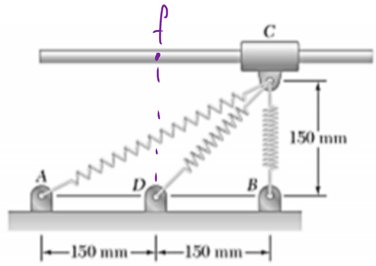
$\Delta\vec{r} = 2.44\,\hat{i}$

$W_{F'} = 316.97\,J$

$W^o = 470.28\,J$ //

18) Un collarín C de 1.2 kg puede deslizarse sin fricción a lo largo de una varilla horizontal. Está unido a tres resortes, cada uno de constante $k = 400$ N/m y con una longitud no deformada de 150 mm. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine la rapidez máxima que alcanzará con el movimiento resultante.

R:3.19 m/s



$E_0 = \cancel{E_k}^{\,0} + \frac{k}{2}\Delta x_A^2 + \frac{k}{2}\Delta x_D^2$

$E_f = \frac{1}{2} m v_{max}^2 + \frac{k}{2}\Delta x_A^2 + \frac{k}{2}\Delta x_B^2$

$\Delta x_A = 0.1854\ [m]$

$\Delta x_B = 0.0621\ [m]$

$E_0 = 200(\Delta x_A^2 + \Delta x_B^2)$

$E_0 = 7.646\,J$

$U = 200 \cdot 2(0.0621)^2 = 1.543\,J$

$E_0 = E_f$

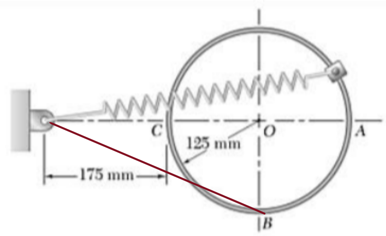
$7.646\,J = 1.543\,J + 0.6\,v_{max}^2$

$\Rightarrow v_{max} = 3.19\ m/s$ //

OBS, En f el cuerpo se encuentra en equilibrio!

19) Un collarín de 1.5 kg está unido a un resorte y se desliza sin fricción a lo largo de una varilla circular en un plano vertical. El resorte tiene una longitud no deformada de 150 mm y una constante $k = 400$ N/m. Si se sabe que el collarín se suelta de la posición A con rapidez igual a cero, determine la rapidez del collarín a) cuando pasa por B, b) cuando pasa por C.

R: a) 3.8 m/s, b) 4.47 m/s



$E_A = U = \frac{k}{2} \cdot \Delta x_A^2$; $\Delta x_A = 425 - 150 = 275\ mm$

$= 0.275\ m$

(a) $E_A = 200\cdot(0,275)^2 = 15.125\ J$ ✓

$E_B = E_C + U_B + U_G$

$U_B = \frac{k}{2}\Delta x_B^2$; $U_G = mg(h) = -1.8375\ J$

$\Delta x_B = 325 - 150 = 175\ mm = 0,175\ m$

$U_B = 200\cdot 0.175^2 = 6.125\ J$

$E_C = 10.8375\ J$

$\frac{1}{2} m v_B^2 = 10.8375 \Rightarrow v_B = 3.80\ m/s$

(b) $\Delta x_C = 25\ mm = 0,025\ m$

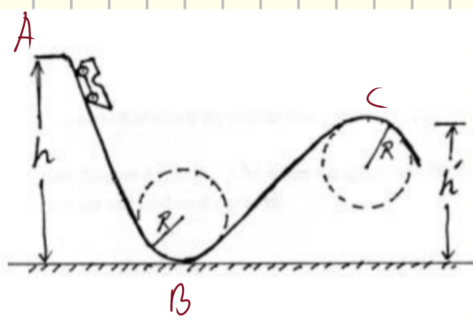
$U = 200\cdot 0.025^2 = 0.125\ J$

$\frac{1}{2} m v^2 = 15$

$\Rightarrow v = 2\sqrt{5} \approx 4.47\ m/s$

20) Considere una montaña rusa como la que se muestra en la figura. El coche inicia desde el reposo a una altura h y baja hasta un valle de forma cirular con radio R. Asuma que no existe rozamiento y el valor de la aceleración de la gravedad es g. Si se conoce que en la parte más baja de la trayectoria la fuerza neta que actúa sobre el pasajero es igual a $8\,mg$, a) calcule el valor de R. De igual manera, se conoce que al llegar al punto más alto del siguiente montículo (circunferencia del mismo radio R) el coche pierde momentáneamente contacto con la pista, b) calcule la altura del montículo h'.

R: a) $\frac{h}{4}$, b) $\frac{7}{8}h$



(a) $E_A = mgh$

$E_B = \frac{1}{2} m v_B^2$

En B:

$\sum F_r = 8mg = m a_N$

$8\cancel{m}g = \cancel{m}\frac{v_B^2}{R}$

$\Rightarrow v_B = \sqrt{8gR}$

$\cancel{m}\cancel{g}h = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\,\overset{4}{\cancel{8}}\cancel{g}R$

$\Rightarrow R = \frac{h}{4}$ //

(b) $N_C = 0$

$\sum F_r = P = m\cdot a_N$

$\cancel{m}g = \cancel{m}\cdot a_N$

$\Rightarrow v_C = \sqrt{gR}$

$E_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + mgh'$

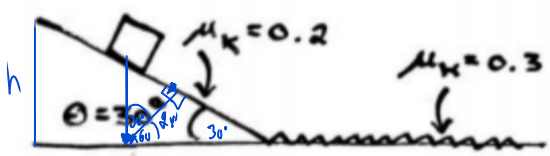
$mgh = \frac{1}{2} m\cdot g\cdot\frac{h}{4} + mgh'$

$h = \frac{1}{8}h + h'$

$\Rightarrow h' = \frac{7}{8}h$ //

21) Un objeto de masa $m = 4$ kg se suelta desde el reposo en un plano inclinado rugoso de longitud $l = 4$ m. El ángulo de inclinación del plano es de 30° con el suelo. Al llegar al suelo, la masa se desliza sobre una superficie horizontal rugosa. Utilizando consideraciones energéticas, calcule la distancia sobre el suelo que desliza el objeto hasta detenerse.

R: 4.36 m



$\Delta E = W^{fr}$;

$\sum F_{y'} = N - P = 0 \Rightarrow N = P$

$N = m\cdot g\cos(30°)$

$N = 33.95\ N$

$\cos(30°) = \frac{g_{y'}}{g}$

$g_{y'} = g\cos(30°)$

$F_r = \mu N = -6.79\ N$

$W_i^{fr} = F_r \cdot d = -6.79\ N \cdot 4m = -27.16\ J$

$h = 4 \sin(30°) = 2\ m$

$E_0 = m g h = 78.4\ J$

$E_f - E_0 = W_i^{fr}$

$E_f = W^{fr} + E_0 = 51.24\ J$

$W_2^{fr} = f_r d = \mu \cdot N \cdot d$

$W_2^{fr} = -11.76\ d$

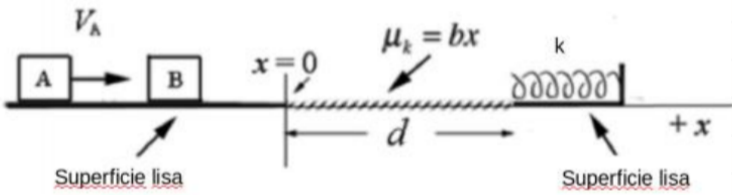
$E_0 = 51.24\ J$

$E_f = 0$

$\Delta E = -51.24\ J = -11.76\ d$

$\Rightarrow d = 4.36\ m$ //

22) El bloque A de masa m_A se mueve horizontalmente sobre una superficie lisa con rapidez v_A. Al encontrarse con el bloque B que está inicialmente en reposo, colisiona de tal manera que luego de la colisión el bloque A permanece en reposo y el bloque B se mueve con velocidad v_B. Después de la colisión, el bloque B entra a una superficie rugosa en $x = 0$, cuyo coeficiente de fricción crece como $\mu(x) = bx$ para $0 \leq x \leq d$, donde b y d son constantes positivas. Al llegar a $x = d$, el bloque B colisiona con un resorte de constante elástica igual a k como se muestra en la figura. Calcule la distancia que se comprime el resorte cuando el bloque B queda en reposo. Exprese su respuesta en términos de $v_A, m_A, m_B, b, d, g, k$.



R: $\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{m_A^2}{m_B} v_A^2 - b m_B g d^2\right)}$

$\Delta p = 0$

$m_B v_B = m_A v_A$

$v_B = \frac{m_A}{m_B} v_A$

$f_r = \mu(x) N$

$= b x m_B g$

$W_{fr} = \int_0^d -b x m_B g\, dx$

$W_{fr} = -b m_B g \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^d$

$W_{fr} = -\frac{1}{2} b m_B g d^2$

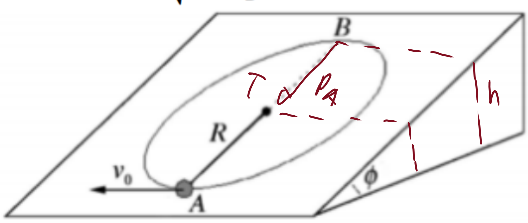
$\Delta E = W_{fr}$

$E - E_0 = W_{fr}$

$\cancel{\tfrac{1}{2}} k D^2 - \cancel{\tfrac{1}{2}} m_B \cdot v_B^2 = -\cancel{\tfrac{1}{2}} b m_B g d^2$

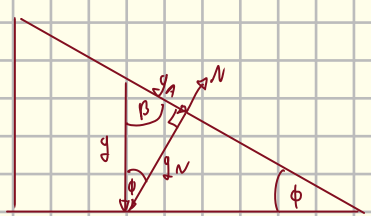
$D = \sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{m_A^2 v_A^2}{m_B} - b m_B g d^2\right)}$ //

23) Un cuerpo de masa m está unido al extremo de una cuerda de longitud R como se muestra en la figura. El cuerpo se mueve sobre un plano inclinado rugoso con coeficiente de fricción μ, que forma un ángulo ϕ con la horizontal. En el punto A la rapidez del cuerpo es v_0. Si el cuerpo se mueve en una trayectoria circular sobre el plano inclinado, determine: a) el trabajo de la fuerza de rozamiento al ir de A hasta B. Además, determine: b) la tensión de la cuerda cuando el cuerpo llega al punto B. Puede expresar sus respuestas en términos de $m,\ \phi, v_0, g, \mu,\ R$ según sea necesario.



R:a)$-\mu m g \pi R \cos\phi$, b)$\frac{m}{R} v_o^2 - 5mg \sin\phi - 2mg\mu\pi \cos\phi$

(a)



$\Sigma F_N = N - P_N = 0$

$\Rightarrow N = P_N$

$N = mg\cos(\phi)$

$f_r = \mu N$

$f_r = \mu m g \cos(\phi)$

$S = \pi R$

$W^{fr} = \int_0^{\pi R} -f_r\, ds$

$W^{fr} = -\mu m g \cos(\phi) \pi R$

$W^{fr} = -\mu m g \pi R \cos(\phi)$ //

(b) $\Delta E_c = W_{neto} = W_p + W^{*}$

$E_{cA} = \frac{1}{2} m v_0^2$

$E_{cB} = \frac{1}{2} m v^2$

$W_p = -mgh$

$W_p = -mg2R\,sen(\phi)$

$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mg2R\,sen(\phi) - \mu mg\pi R\cos(\phi)$

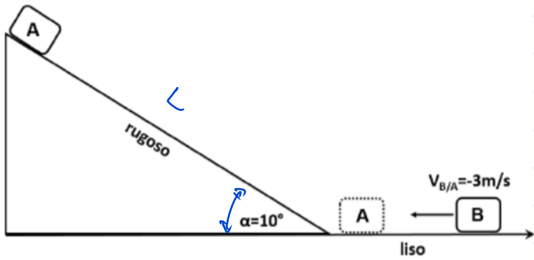
$m\frac{v^2}{R} - m\frac{v_0^2}{R} = -4mg\,sen(\phi) - 2\mu mg\pi\cos(\phi)$

$\Sigma F = T + P_A = m\cdot a_N$

$T + gm\,sen(\phi) = m\frac{v^2}{R}$

$T = m\frac{v_0^2}{R} - 5mg\,sen(\phi) - 2\mu mg\pi\cos(\phi)$

24) Considere un bloque A de masa $m_A = 5$ kg que se encuentra en la cima de un plano inclinado de longitud 20 m, y que forma un ángulo $\alpha = 10°$ con la horizontal. El bloque se deja resbalar sobre la superficie rugosa del plano inclinado, el mismo que ejerce una fuerza de rozamiento $F_f = 0.8\,s$ N; siendo s la distancia recorrida en m. Al llegar a la base del plano inclinado, el bloque se mueve sobre una superficie lisa y poco después se pega (colisión totalmente inelástica) con un bloque B de masa $m_B = 12$ kg, que visto desde un observador ubicado en el bloque A se mueve hacia A con una velocidad de 3 m/s (velocidad relativa a A). Calcule la velocidad final de los bloques. R: $-0.1\vec{\imath}$ m/s



$E_0 = mgL\,sen(\alpha) = 170.18$ J

$W^{*} = \int_0^{20} -0.8s\,ds = -0.8\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^{20} = -160$ J

$E_f = \frac{1}{2} m v^2 = 2,5 v^2$

$dE = W^{*} \Rightarrow 2.5v^2 - 170.18 = -160$ J

$\Rightarrow v = 2.02$ m/s

$V_{B/A} = -3$ m/s

$V_{B/A} = V_{B/T} + V_{T/A}$

$V_{B/A} = V_{B/T} - V_{A/T}$

$\Rightarrow V_{B/T} = V_{B/A} + V_{A/T}$

$V_B = -3\,m/s + 2,02\,m/s$

$V_B = -0,98$ m/s

$m\cdot v + m_B\cdot V_B = (m + m_B)\cdot V_f$

$\Rightarrow V_f = -0.1$ m/s //

25) Un pequeño bloque de masa M, que desliza a lo largo de un plano horizontal liso, con una velocidad $\overrightarrow{v_0}$ ingresa a superficie horizontal rugosa, en la cual logra moverse una distancia L, hasta detenerse. La magnitud de la fuerza de rozamiento que ejerce la superficie rugosa sobre el bloque es $\mu\lambda g\, x$, donde μ es el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie rugosa, $\lambda = M/L$, g es la magnitud de la aceleración de la gravedad y x es la distancia que el bloque se va deslizando sobre la superficie rugosa. Determine: a) el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento y b) la rapidez v_0.

R:a) $-\frac{1}{2}\mu M g L$ b) $\sqrt{\mu g L}$

(a) $f_r = \mu \lambda g x$

$$W^{f} = \int_0^L -\mu \lambda g x \, dx = -\mu \frac{M}{L} g \frac{L^2}{2} = -\frac{\mu M g L}{2} = -\frac{1}{2}\mu M g L \ //$$

(b) $E_0 = \frac{1}{2} M v_0^2$

$E_f = 0$

$dE = W^f$

$+\frac{1}{2} M v_0^2 = +\frac{1}{2} \mu M g L$

$v_0 = \sqrt{\mu g L} \ //$